初中學生文庫

平面三角法問題解法指導

編者 匡文濤

中華書局編印

民國二十五年六月發行
民國三十年一月四版

初中學生文庫 平面三角法問題解法指導（全一冊）

◎實價國幣四角
（郵運匯費另加）

編者 匡文濤
發行者 中華書局有限公司 代表人 路錫三
印刷者 上海澳門路 美商永寧有限公司
總發行處 昆明 中華書局發行所
分發行處 各埠 中華書局
（九九〇四）

平面三角法問題解法指導

目　次

平面三角法問題解法指導

摘 要 第 一

1. 三角函數即 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\cot A$, $\sec A$, $\operatorname{cosec} A$, $\operatorname{vers} A$, $\operatorname{covers} A$.

2. 三角函數相互之關係.

(1) $\sin A=1/\operatorname{cosec} A$, $\cos A=1/\sec A$, $\tan A=1/\cot A$.

(2) $\tan A=\sin A/\cos A$, $\cot A=\cos A/\sin A$.

(3) $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, $\tan^2 A+1=\sec^2 A$,

$\cot^2 A+1=\operatorname{cosec}^2 A$.

3. 負角之三角函數之公式.

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$,

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$, $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$,

$\sec(-\alpha)=\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}(-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha$.

4. 餘角之公式.

$\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)$, $\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)$,

$\tan\alpha=\cot(90^\circ-\alpha)$, $\cot\alpha=\tan(90^\circ-\alpha)$,

$\sec\alpha=\operatorname{cosec}(90^\circ-\alpha)$, $\operatorname{cosec}\alpha=\sec(90^\circ-\alpha)$.

5. 負角之餘角.

$-\sin\alpha=\cos(90^\circ+\alpha)$, $\cos\alpha=\sin(90^\circ+\alpha)$,

$-\tan\alpha=\cot(90^\circ+\alpha)$, $-\cot\alpha=\tan(90^\circ+\alpha)$,

$\sec\alpha=\mathrm{cosec}(90^\circ+\alpha)$, $-\mathrm{cosec}\alpha=\sec(90^\circ+\alpha)$.

6. 補角之公式.

$\sin\alpha=\sin(180^\circ-\alpha)$, $-\cos\alpha=\cos(180^\circ-\alpha)$,

$-\tan\alpha=\tan(180^\circ-\alpha)$, $-\cot\alpha=\cot(180^\circ-\alpha)$,

$-\sec\alpha=\sec(180^\circ-\alpha)$, $\mathrm{cosec}\alpha=\mathrm{cosec}(180^\circ-\alpha)$.

7. 負角之補角.

$-\sin\alpha=\sin(180^\circ+\alpha)$, $-\cos\alpha=\cos(180^\circ+\alpha)$,

$\tan\alpha=\tan(180^\circ+\alpha)$, $\cot\alpha=\cot(180^\circ+\alpha)$,

$-\sec\alpha=\sec(180^\circ+\alpha)$, $-\mathrm{cosec}\alpha=\mathrm{cosec}(180^\circ+\alpha)$.

8. 弧度法之公式.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$,

$\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\cot\alpha$, $\cot\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\tan\alpha$,

$\sec\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\mathrm{cosec}\alpha$, $\mathrm{cosec}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\sec\alpha$.

9. 周期.

$\sin\{n\pi+(-1)^n\alpha\}=\sin\alpha$, $\cos\{2n\pi\pm\alpha\}=\cos\alpha$,

$\tan(n\pi+\alpha)=\tan\alpha$, $\cot(n\pi+\alpha)=\cot\alpha$,

$\sec\{2n\pi\pm\alpha\}=\sec\alpha$,

$\mathrm{cosec}\{n\pi+(-1)^n\alpha\}=\mathrm{cosec}\alpha$.

10. 和及差角之三角函數之公式.

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$$

11. 和差及積之正餘弦.

$$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2},$$

$$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2},$$

$$\sin\theta-\sin\phi=2\sin\frac{\theta-\phi}{2}\cos\frac{\theta+\phi}{2},$$

$$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}.$$

12. 二倍角之三角函數之公式.

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

13. 三倍角之三角函數之公式.

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

$$\tan3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}.$$

三角函數之關係

1. 設 $vers\alpha=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$,則

$sin\alpha+cos\alpha+tan\alpha+cot\alpha+sec\alpha+cosec\alpha$ 之值如何?

【解】 $\because cos\alpha=1-vers\alpha=1-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$sec\alpha=\frac{1}{cos\alpha}=\sqrt{2},$$

$$sin\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$cosec\alpha=\frac{1}{sin\alpha}=\sqrt{2},$$

$$tan\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=1=cot\alpha.$$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+1+1+\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2.$

2. 試以 $vers\alpha$ 之項,表示其他三角函數.

【解】 $cos\alpha=1-vers\alpha$,

$$sin\alpha=\sqrt{1-(1-vers\alpha)^2}$$

$$=\sqrt{2vers\alpha-vers^2\alpha},$$

$$tan\alpha=\frac{\sqrt{2vers\alpha-vers^2\alpha}}{1-vers\alpha},$$

$$cot\alpha=\frac{1-vers\alpha}{\sqrt{2vers\alpha-vers^2\alpha}},$$

$$sec\alpha=\frac{1}{1-vers\alpha},$$

$$cosec\alpha=\frac{1}{\sqrt{2vers\alpha-vers^2\alpha}}.$$

3. 設 $\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=1$, 則

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0,$$

試證之.

【證】 第一式之 1,順次以

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$, 及 $\cos^2\theta+\sin^2\theta$ 代之,

得 $\frac{\cos^3\theta-\cos^3\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin^3\alpha-\sin^3\theta}{\sin\alpha}$

及 $\frac{\cos^2\theta(\cos\theta-\cos\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{\sin^2\theta(\sin\alpha-\sin\theta)}{\sin\alpha}$.

由除法得

$$\frac{\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\sin\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}+\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}=0,$$

$$\therefore\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0.$$

4. 試求下列各角在何象限內:

$370°$, $420°$, $\frac{7}{3}\pi$, $-40°$, $-100°$, $-365°$, $-750°$,

$-\frac{5}{2}\pi$.

$\because$ $370°=360°+10°$, $\therefore$ 在第一象限內.

$\because$ $420° = 360° + 60°$, $\therefore$ 在第一象限內.

$\because$ $\frac{7}{3}\pi = 2\pi + \frac{1}{3}\pi$, $\therefore$ 在第一象限內.

而 $-40°$ $-365°$ $-750°$ 均在第四象限內.

$-100°$ 則在第三象限內,

$-\frac{5}{2}\pi$ 在第三第四兩象限之間.

5. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

【證】 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$

$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta$

$= \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - (1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

6. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

【證】 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$= \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta$

$= \cos^2\alpha(1-\sin^2\beta) - (1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

7. $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \sin2\alpha\sin2\beta$.

【證】 $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$

$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 - (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2$

$= 4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$

$= \sin2\alpha\sin2\beta$.

8. $\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\cos 2\beta.$

【證】 $\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)$

$$=\frac{1+\cos 2(\alpha+\beta)}{2}-\frac{1-\cos 2(\alpha-\beta)}{2}$$

$$=\frac{\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha\cos 2\beta-\sin 2\alpha\sin 2\beta+\cos 2\alpha\cos 2\beta$$

$$+\sin 2\alpha\sin 2\beta)$$

$$=\cos 2\alpha\cos 2\beta.$$

9. $\cos 5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha.$

【證】 $\cos 5\alpha=\cos(4\alpha+\alpha)$

$$=\cos 4\alpha\cos\alpha-\sin 4\alpha\sin\alpha$$

$$=(2\cos^2 2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$=\{2(2\cos^2\alpha-1)^2-1\}\cos\alpha$$

$$-4\sin^2\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)$$

$$=(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1)\cos\alpha$$

$$-4(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)$$

$$=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha.$$

10. $\sin 5\alpha+\cos 5\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(2\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha-1).$

【證】 $\sin 5\alpha+\cos 5\alpha=\cos(4\alpha+\alpha)+\sin(4\alpha+\alpha)$

$$=\cos 4\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)-\sin 4\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)$$

$=\cos 4\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$-2\sin 2\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\}$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha(1-\sin 2\alpha)\}$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(2\cos 4\alpha+2\sin 2\alpha-1).$

11. $8(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha)=\cos 6\alpha+7\cos 2\alpha.$

【證】 $8(\cos^8\alpha-\sin^8\alpha)=8\{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2$

$-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\}\times(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$=8(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha)\cos 2\alpha$

$=2(4-2\sin^2 2\alpha)\cos 2\alpha$

$=2(3+\cos 4\alpha)\cos 2\alpha$

$=6\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha\cos 2\alpha$

$=6\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 2\alpha$

$=\cos 6\alpha+7\cos 2\alpha$

12. $64(\cos^8\alpha+\sin^8\alpha)=\cos 8\alpha+28\cos 4\alpha+35.$

【證】 $64(\cos^8\alpha+\sin^8\alpha)$

$=64\{(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)^2-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha\}$

$=64\{(1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha\}$

$=8\{8(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha)^2-\sin^4 2\alpha\}$

$=8(8-8\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha)$

$=8\{8-4(1-\cos 4\alpha)+\sin^4 2\alpha\}$

$=32+32\cos 4\alpha+2(1-\cos 4\alpha)^2$

$=34+28\cos 4\alpha+2\cos^2 4\alpha$

$=35+28\cos 4\alpha+(2\cos^2 4\alpha-1)$

$=35+28\cos 4\alpha+\cos 8\alpha.$

13. $\tan\alpha+2\tan 2\alpha+4\tan 4\alpha+8\cot 8\alpha=\cot\alpha.$

【證】 原式之左端$=\tan\alpha+2\tan 2\alpha+4\tan 4\alpha+\dfrac{8}{\tan 8\alpha}$

$=\tan\alpha+2\tan 2\alpha+4\tan 4\alpha+\dfrac{8(1-\tan^2 4\alpha)}{2\tan 4\alpha}$

$=\tan\alpha+2\tan 2\alpha+\dfrac{4}{\tan 4\alpha}$

$=\tan\alpha+2\tan 2\alpha+\dfrac{4(1-\tan^2 2\alpha)}{2\tan 2\alpha}$

$=\tan\alpha+\dfrac{2}{\tan 2\alpha}$

$=\tan\alpha+\dfrac{2(1-\tan^2\alpha)}{2\tan\alpha}$

$=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\cot\alpha.$

14. $\dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha-\beta)\tan(\alpha-\gamma)}$

$+\dfrac{\tan\beta}{\tan(\beta-\gamma)\tan(\beta-\alpha)}$

$+\dfrac{\tan\gamma}{\tan(\gamma-\alpha)\tan(\gamma-\beta)}=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$

【證】 $\because \dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha-\beta)\tan(\alpha-\gamma)}$

$=\dfrac{\tan\alpha(1+\tan\alpha\tan\beta)(1+\tan\alpha\tan\gamma)}{(\tan\alpha-\tan\beta)(\tan\alpha-\tan\gamma)}$

$$=\frac{\tan\alpha(\tan\beta-\tan\gamma)+\tan^2\alpha(\tan^2\beta-\tan^2\gamma)+\tan^3\alpha\tan\beta\tan\gamma(\tan\beta-\tan\gamma)}{-(\tan\alpha-\tan\beta)(\tan\beta-\tan\gamma)(\tan\gamma-\tan\alpha)}$$

∴原式 $=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\{\tan^2\alpha(\tan\beta-\tan\gamma)$

$+\tan^2\beta(\tan\gamma-\tan\alpha)+\tan^2\gamma(\tan\alpha-\tan\beta)\}$

$\div\{-(\tan\alpha-\tan\beta)(\tan\beta-\tan\gamma)(\tan\gamma-\tan\alpha)\}$

$=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$

15. $\sin\alpha=p\sin\beta,\cos\alpha=q\cos\beta$ 及 $\sin\alpha+\cos\alpha=r(\sin\beta+\cos\beta)$ 則

$(p-r)^2(1-q^2)+(q-r)^2(1-p^2)=0.$

【證】 $\because p^2\sin^2\beta+q^2\cos^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$

卽 $p^2\tan^2\beta+q^2=1+\tan^2\beta,$

$\therefore \tan^2\beta=\dfrac{-(1-q^2)}{1-p^2}.$

又 $p\sin\beta+q\cos\beta=r(\sin\beta+\cos\beta),$

$\therefore tan\beta=\frac{-(q-r)}{p-r}$,

$\therefore \frac{-(1-q^2)}{1-p^2}=\frac{(q-r)^2}{(p-r)^2}$,

$\therefore (p-r)^2(1-q^2)+(q-r)^2(1-p^2)=0$.

16. $cos\theta+cos\phi+cos\psi+cos\theta cos\phi cos\psi=0$, 則

$cosec^2\theta+cosec^2\phi+cosec^2\psi\pm 2cosec\theta cosec\phi cosec\psi=1$.

【證】 令 $cos\theta=x$, $cos\phi=y$, $cos\psi=z$,

$sin\theta=m$, $sin\phi=n$, $sin\psi=p$.

則 $x+y+z=-xyz$,

$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=x^2y^2z^2$,

卽 $(1-m^2)+(1-n^2)+(1-p^2)+2(xy+yz+zx)$

$=(1-m^2)(1-n^2)(1-p^2)$,

卽 $2(xy+yz+zx)=m^2n^2+n^2p^2$

$+p^2m^2-m^2n^2p^2-2$.

$\therefore 4\{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)\}$

$=(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2-2)^2$,

卽 $4\{(1-m^2)(1-n^2)+(1-n^2)(1-p^2)$

$+(1-p^2)(1-m^2)-2x^2y^2z^2\}$

$=(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2-2)^2$,

卽 $4\{3-2(m^2+n^2+p^2)+m^2n^2+n^2p^2$

$+p^2m^2-2(1-m^2)(1-n^2)(1-p^2)\}$

$=(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2-2)^2$.

$\therefore m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2p^2=\pm 2mnp.$

由是$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\pm\frac{2}{mnp}=1.$

$\therefore cosec^2\theta+cosec^2\phi+cosec^2\psi\pm 2cosec\theta\, cosec\phi\, cosec\psi=1.$

摘要第二

1. 三角和之三角函數之公式.

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha$$
$$+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$
$$-\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}.$$

2. 特別角之三角函數之值.

(*a*) 45°之三角函數之值.

$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \tan 45^\circ=\cot 45^\circ=1,$$

$$\sec 45^\circ=\operatorname{cosec} 45^\circ=\sqrt{2}.$$

從此可求得135°, 225°及315°等之三角函數之值.

(*b*) 30°之三角函數之值.

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2},\ \cos 30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3},\ \tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

從此可求得60°, 120°, 150°, 210°, 240°, 300°等之三角函數之值.