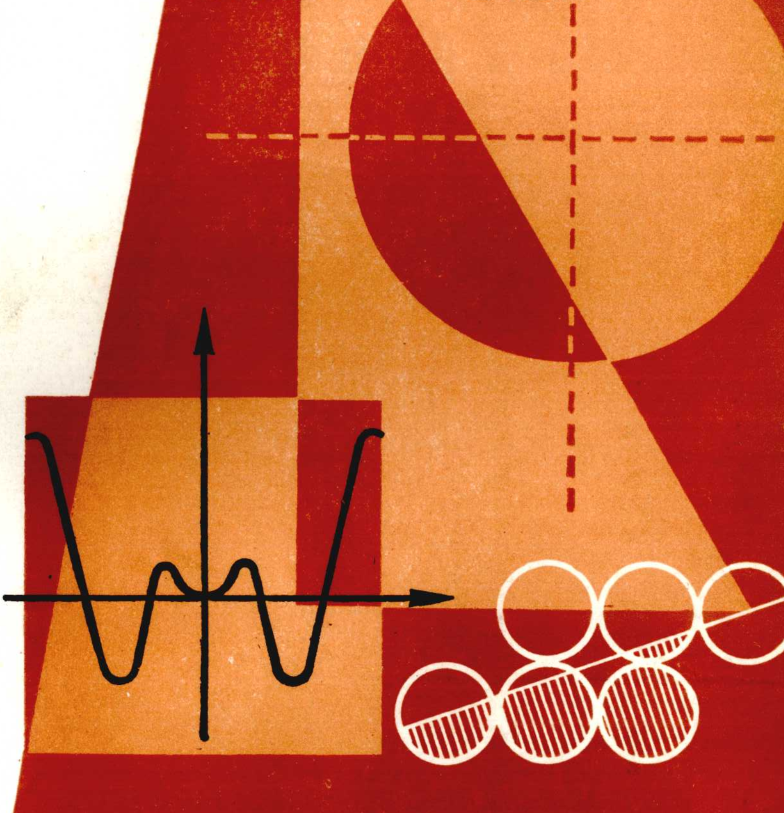
中学数学中的对称



IRANKEXUE XIAOCONGSHU

自然科学小丛书

北京出版社

自然科学小丛书

中学数学中的对称

张 文 忠

北 京 出 版 社

编辑说明

《自然科学小丛书》是综合性科学普及读物，包括数学、物理、化学、天文、地学、生物、航空和无线电电子等学科。主要介绍这些学科的基础知识，以及现代科学技术成就。编写上力求深入浅出，通俗易懂，使它具有思想性、知识性和趣味性，可以作为中学的课外辅导读物，并适合具有初中文化水平的广大读者阅读。

自然科学小丛书
中学数学中的对称
Zhongxue shuxue zhong de duicheng
张 文 忠
*
北 京 出 版 社 出 版
（北京北三环中路6号）
新华书店北京发行所发行
马 池 口 印 刷 厂 印 刷
*
787×1092毫米 32开本 5印张 79,000字
1987年4月第1版 1987年4月第1次印刷
印数1—9,000
书号：7071·1094 定价：0.78元

前　言

当你面对一只彩蝶、一个甲虫、一片绿叶、一朵红花的时候，除去其绚丽的色彩之外，最令人惊叹的莫过于它们外形的几何对称性：每一种都是这样的相对而又相称(相等)，如果把相对的部分互换一下，就好象没有动一样。

人们很早就发现，在我们周围的千姿万态的物体中，很多都具有某种对称性。从各种动物的形体到众多的植物花果与枝叶，甚至小到肉眼难见的原子结构，大到浩瀚无垠的宇宙空间，具有奇妙的对称性的例子比比皆是。在大自然的启示之下，人们很早就知道用对称的方法去美化生活，从小巧精致的艺术珍宝到雄伟壮丽的建筑，从工农业产品到日常生活用品，大多具有对称性。可以毫不夸张地说，我们是生活在一个充满对称性的世界之中。这些对称不仅给人以平衡与和谐的美感，而且有助于我们认识自然的规律，探索宇宙的奥秘。

数学家还注意到，不仅在几何图形中含有对称性，在代数中也会经常遇到对称问题。数学中赏心悦目的对称，正是现实世界形形色色对称的再现，它也是数学家所悉心追求的美感之一。由研究对称而发展起来的群论成了数学史中最辉煌的成果之一，今天群论已成了数学中一个蓬勃发展的重要分支，并在科学领域中获得了愈来愈广泛的应用。

这个小册子将通俗易懂地介绍关于对称的一些使人兴趣盎然的基本结论，介绍它的一些巧妙而简洁的应用。编写时我力求把它写得浅显有趣一些，以使具有初中以上数学知识的读者能轻松愉快地阅读它。愿爱好数学的青年朋友能在这块五彩缤纷的对称园地中领略到思维的乐趣，感受到智慧的启迪！

目　录

一 处处可见的平面几何对称

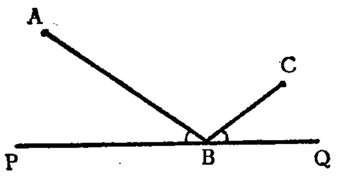
从海罗论证光线反射说起

在人类古代科学发现的宝藏中，有一个至今还在熠熠生辉的结论，那就是古希腊亚力山大时代著名的科学家海罗(Heron，约公元前一世纪)所指出的：光线是节约时间的能手，它总是选择最佳路径以保证用最短的时间去走完它要走的路！

海罗在作光线反射的实验时，注意到了如下的重要事实：当光线从 A 点射出，由镜面 PQ 上的 B 点反射到 C 点时，AB 和 BC 与镜面构成的角必然相等，即 $\angle ABP=\angle CBQ$(图 1-1 a)。

光线反射时为什么会保持这个性质呢？海罗经过研究发现，光线对反射路径所作的这种聪明选择的原因在于，如果在镜面 PQ 上另外任取一点 B'，那么 $AB'+B'C$ 总要比 $AB+BC$ 大。也就是说，光线由 A 经 B 反射到 C 是路程最短的一种选择。

海罗证明上述结论的方法是十分巧妙的：将图



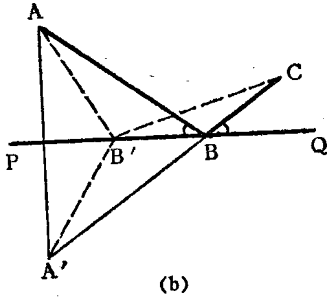


图 1-1

1-1b 沿直线 PQ 翻折过来， 那么 A 点将落到 A'点的位置，即：A' 是 A 关于轴 PQ 的对称点，因此有：

$$AB=A'B,\ AB'=A'B',\ \angle ABP=\angle A'BP$$

由于 $\angle CBQ=\angle ABP=\angle A'BP$,

说明 A'、B、C 三点在一条直线上。

所以 $A'B'+B'C>A'B+BC$。

即 $AB'+B'C>AB+BC$，这就是说路径 $AB+BC$ 最短。

其实，不仅光线的反射沿最短路径传播，声波、无线电波的反射，也是循着同一规律传播的。这正如一位科学家所概括的结论："大自然不会作无用的功"。

实践中所碰到的有些问题，可以在上述例子的启示下，借助对称点获得巧妙的解决，我们的兴趣也正

在于此。例如，若把图1-1中的点 A 和 C 分别看成两个村庄，而把 PQ 看成一条河流。现在要在 PQ 上确定一个抽水站的位置 B，使得它到 A 和 C 这两个村庄间的输水管道的总长 $AB+BC$ 最小。很明显，只要先找出点 A 关于 PQ 的对称点 A'，那么连线 $A'C$ 与 PQ 的交点 B 就是要求的抽水站的位置。如果告诉了两个村庄与河流间的距离，要算出输水管的最小长度和抽水站的位置也是容易的。

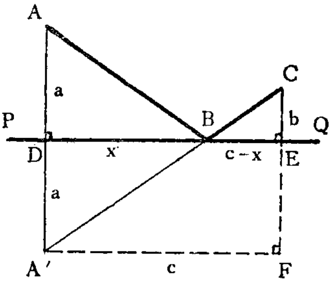


图 1-2

例如，若 A、C 两村到河流 PQ 的距离分别为 $AD=a$，$CE=b$，且 $DE=c$，那么利用 A 关于 PQ 的对称点作直角$\triangle A'CF$(图1-2)，立即就可按勾股定理求出输水管的最小长度为

$$AB+BC=A'C=\sqrt{CF^2+A'F^2}$$
$$=\sqrt{(a+b)^2+c^2}.$$

若设 $DB=x$，则由$\triangle A'BD\backsim\triangle BCE$ 可知：

$$\frac{A'D}{CE}=\frac{DB}{BE}，即\frac{a}{b}=\frac{x}{c-x}$$

故有 $x=\dfrac{ac}{a+b}$.

如果不利用 A 关于 PQ 的对称点 A' 来解这题，那就麻烦多了。比如由图1-2中的直角$\triangle ABD$ 和直角$\triangle BCE$ 可知

$$AB+BC=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}.$$

要想从这个式子求出当 $x=\dfrac{ac}{a+b}$时它取得最小值$\sqrt{(a+b)^2+c^2}$，就没有上面的方法容易了。

下面再来看两个借助对称点解决应用问题的例子。

若村庄 A 和 B 分别位于一条河的两侧(图1-3a)，要想建造一座桥，使两村居民到桥边的距离相等，问桥址应选在什么位置？

一种容易想到的解法如图1-3b 所示：设直线 PQ 与河的两岸 CD 和 EF 距离相等，作 A 关于 PQ 的对称点 A'。连结$A'B$，作 $A'B$ 的垂直平分线 OG 交 EF 于 G。作 $GH\perp CD$ 于 H，由对称性立即可知：

$$A'G=BG,\ AH=A'G$$

于是 $AH=BG$，即 GH 为符合要求的桥址。

球碰到障碍物后的反弹方向也遵循光的反射规律，注意到这点将启发我们做好下面的击球游戏：

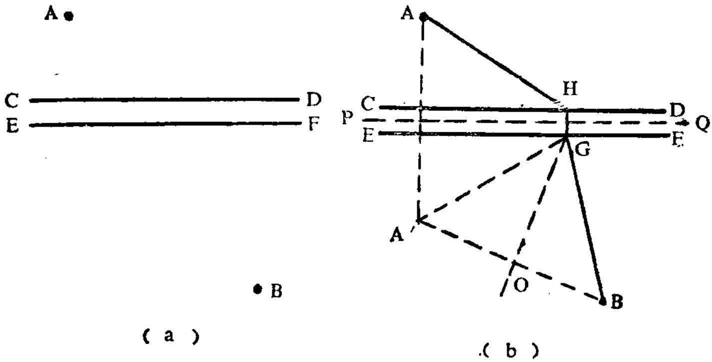


图 1-3

矩形球台 $CDEF$ 上有两个球 A 和 B，问要依什么方向击球 A，才能使这球顺次碰击球台的边框 CD、DE、EF 后，再击中球 B？

按图 1-4 顺次作对称点：A 关于 CD 的对称点为 A_1；A_1 关于 DE 的对称点为 A_2；A_2 关于 EF 的对称

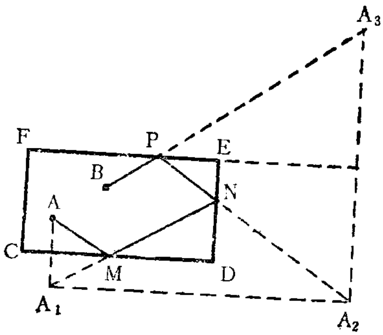


图 1-4

点为 A_3。连接 A_3B 交 EF 于 P; 连接 A_2P 交 DE 于 N; 连接 NA_1 交 CD 于 M。根据球的反弹与光线反射规律的一致性，容易知道折线 $AMNPB$ 就是球的反弹路径，AM 为球 A 的击出方向。如果不用这个方法，要想解答它就不那么容易了。

自然，这个击球游戏的路径只是一个理论方案，实际击球时要想得心应手地按图 1-4 估计准击出的方向，还须多次实践才行。

蝴蝶和花朵的对称

最早使人认识到对称图形的就是我们所熟悉的自然界。如图 1-5 中的蝴蝶、甲虫、树叶、花朵都是现实生活中处处可见的对称物体，正是这类对称形体启示着人们去思考平面几何图形的对称性。

平面几何图形有两种不同的对称形式。

一种如象图 1-5 a 中所绘的蝴蝶，如果将它沿着中间的竖直线对折起来，其左右两部分将会完全重合。

如果一个图形沿一条直线对折，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做它的对称轴。

等腰三角形(如图 1-6)就是最常见的轴对称图形

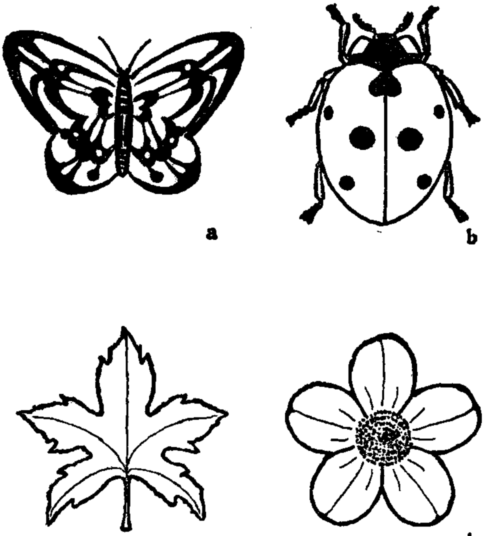


图 1-5

之一，其底边上的高是它的对称轴。

同样地，对于两个图形我们可作如下推论：

如果沿着一条直线对折，两个图形能够互相重合，那么这两个图形叫做以这条直线为对称轴的对称图形。

例如，图 1-7 沿着 MN 对折后，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相互重合，因此这两个三角形是以 MN 为对称轴的对称图形。

如果沿着一条直线对折，两个点能够互相重合，

那么这两个点叫做以这条直线为对称轴的对称点。

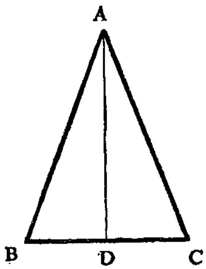


图 1-6

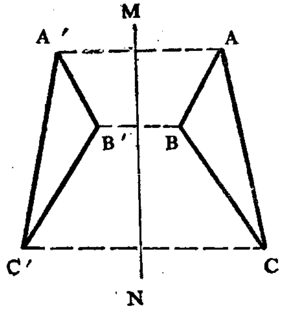


图 1-7

例如，图1-8沿着直线 MN 对折，点 A 和点 A' 重合，于是 A 和 A' 就是以 MN 为对称轴的对称点。这时若连结线段 AA' 与 MN 相交于点 O，很容易证明：

$$AA' \perp MN, \qquad 且\ AO=OA'$$

这表明 MN 是 AA' 的垂直平分线。反之，若 MN 是线段 AA' 的垂直平分线，那么沿 MN 对折，显然点 A 和点 A' 能够重合。就是说：

一条线段的两个端点是以这条线段的垂直平分线为对称轴的对称点。

显然，在对称轴上的点的对称点就是它本身。例如，图1-8中点 O 的对称点就是 O。

另一种对称如象图 1-5 中的 d，如果把平面绕着

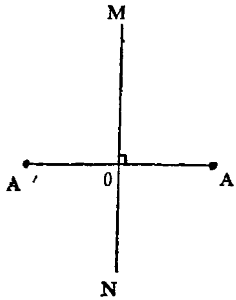


图 1-8

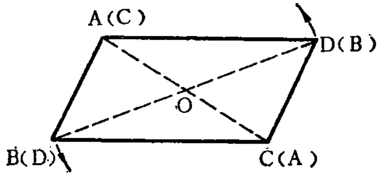


图 1-9

花的中心旋转适当的角度(比如旋转$\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$),这时花仍然与原来的位置重合，好象没有转动过一样。对于这种形式的对称，我们见得最多的是下面这种情况：

如果绕着一个定点旋转180°后，一个图形的一部分能够和另一部分的原来位置互相重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个定点叫做它的对称中心。

例如，图 1-9 中的 $\square ABCD$ 绕着对角线的交点O旋转180°后，因为$\triangle ACD \cong \triangle ABC$，于是$\triangle ACD$能够和$\triangle ABC$原来的位置重合，而$\triangle ABC$同时又能和$\triangle ACD$原来的位置重合。因此，$\square ABCD$是中心对称图形，$O$点就是它的对称中心。

又如，不难证明：如果六边形的三组对边分别平

行并相等(如图1-10)，则它是一个中心对称图形。

同样地，对于两个图形可有如下结论：

如果绕着一个定点旋转180°后，两个图形中的每一个能够与另一个的原来位置互相重合，那么这两个图形叫做以这个定点为对称中心的对称图形。

例如，图1-11中的$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$当绕着点O旋转180°后，两个三角形中的每一个能够与另一个的原来位置互相重合，于是这两个三角形是以点O为对称中心的对称图形。这时容易证明，点O一定是线段AA'、BB'、CC'的公共点，并且分别平分这三条线段。

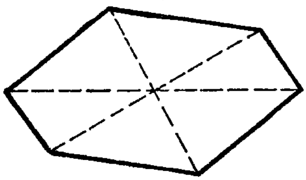


图 1-10

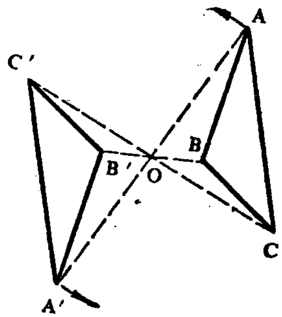


图 1-11

很明显，如果两个图形对于某一个定点对称，那么这两个图形就一定全等。

如果绕着一个定点旋转180°后，两个点中每一个

能够和另一个点原来的位置互相重合，那么这两个点叫做以这个定点为对称中心的对称点。

例如，图 1-12 中点 O 是线段 AA'的中点，如果把 AA' 绕着点 O 旋转 180°，那么点 A 转到点 A' 的位置，点 A' 转到点A的位置。因此，点 A 和点 A' 是以点 O为对称中心的对称点。于是我们得到了结论：

一条线段的两个端点是以这条线段的中点为对称中心的对称点。

很明显，对于某条直线对称的两个图形不一定是对某个点对称的(如图1-7)。反之，对某个点对称的两个图形也不一定是对某条直线对称的(如图1-11)。有时两个图形可能既对某条直线对称，也对某一个点对称。例如，图 1-13中的两个弯月形就既对直线MN

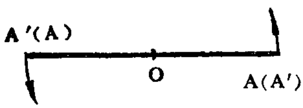


图 1-12

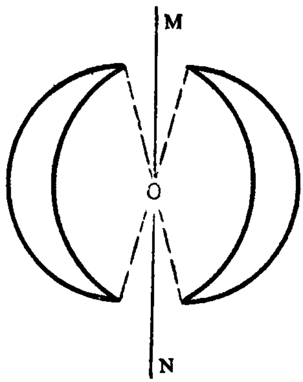


图 1-13