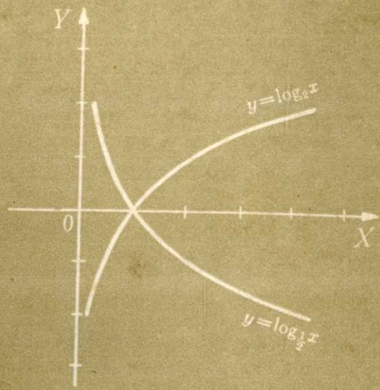
数学进修用书



王传国

指数和对数

ZHISHUYUDUISHU

浙江人民出版社

数学进修用书

指数和对数

王传国

浙江人民出版社

内 容 提 要

本书比较完整和系统地叙述了指数与对数的基础知识，较部编中学数学教材稍有扩大，尤其对中学教材中虽已提及但未加讨论的内容作了详细的论述，有利于帮助读者提高数学观点．并配置有适量的习题，可供练习．适合中学师生和工农青年自学．

数学进修用书

指 数 和 对 数

王传国

*

浙江人民出版社出版

（杭州武林路196号）

浙江新华印刷厂印刷

（杭州环城北路天水桥堍）

浙江省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张 4 字数 80,000

1981年1月第 一 版

1981年1月第一次印刷

印数：1—4,000

统一书号：7103·1126

定 价：0.34 元

前　言

指数和对数的发现是社会生产力发展的必然产物.

十七世纪初，欧洲开始了资产阶级革命，社会生产力也随着得到迅速发展. 于是工业生产和科学技术中所提出的问题就愈来愈复杂，尤其在航海、天文等学科上，航海家们为了定出船只在大海中的航程和位置，天文学家为了迅速处理观察行星所得的结果等等都需要进行大量繁复的计算. 这就要求迅速提高计算工作的效率，也即，不但要求计算准确无误，而且要求计算过程简捷，能迅速得出结果. 这种新的要求和旧的计算技术效率低的矛盾，促进了新的计算方法和计算工具的产生和发展. 采用记号 a^n 来表示实数指数幂和对数的发现就是发生在这个时候的事. 特别是对数的发现在当时是一项极其重大的成就，它较圆满地解决了天文、航海等各方面提出的大量的繁复计算，深受各方面人士的欢迎. 著名的物理学家、天文学家伽利略(Galileo Galilei 1564—1642)曾说过："给我空间、时间及对数，我即可创造宇宙." 这充分说明了对数在科学家心目中的地位，因此在当时，欧洲的所有人士在进行大量复杂计算时，全都采用对数这一工具.

指数和对数在计算中的地位，长期以来一直受到重视，革命导师恩格斯在《自然辩证法》一书中曾经指出过："一个数的几个幂的乘或除，可以变做它们的各个指数的相加或相减. 任何一个数都可以理解为和表示为其它任何一个数的幂（对数，$y=a^x$）. 而这种从一个形式到另一个相反的形式的转变，并不

是一种无聊的游戏，它是数学科学的最有力的杠杆之一，如果没有它，今天就几乎无法去进行一个比较困难的计算．如果从数学中仅仅把负数幂和分数幂取消掉，那末结果会怎样呢？”著名的法国数学家、天文学家拉普拉斯(Pierre Simon Laplace，1749—1827)也说过：“对数的算法，不仅免除了大量计算时不易避免的错误，而且数月的工作可用数天做成，无异延长了天文学家的生命．”时至今日，虽然科学技术迅速发展，已经有了大量新型的计算工具（如各种类型的电子计算机），利用对数直接计算已日趋减少，但是以对数原理制成的各种算尺、算图仍在各方面广泛应用．况且指数和对数的概念是数学中最基本的概念之一，不仅在其它学科（如物理、化学等）中广泛地应用着，就是在数学本身中，离开了这些基本概念，也无法进一步学习更高深的理论．因此深入理解、牢固掌握指数和对数的概念及其性质，仍然是很重要的．

在本小册子中，笔者试图给指数和对数这部分内容以一个尽可能完整和严谨的介绍．特别对中学教材中虽已涉及但讨论较少的内容，如无理数指数幂的概念和性质的证明；常用对数表的制作；指数函数和对数函数的重要性质等都作了详细的讨论．此外还介绍了自然对数；指数函数和对数函数的固有特性和它们的超越性；一些与指数函数和对数函数有关的函数；指数方程和对数方程的近似解法等内容．在阐述这些知识的同时，还着重介绍了某些有关解决指数和对数问题时常用的基本方法和基本技巧．

目　　录

一、指　数

二、对　数

一、指　　数

§1·1　整数指数幂

在乘法运算中，经常会遇到一个实数连乘的情况．为了使运算简便，若一个数 a 连乘自身 n 次，则我们记 $a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{个}}$，称 a^n 为 a 的 n 次方或 n 次幂．这里，相同的乘数 a 叫做底数，相同乘数的个数 n 叫做指数，这种求相同乘数的积的运算叫做乘方，乘方的结果 a^n 叫做幂．

在上面幂的定义中，对 a 没有限制，但 n 必须是正整数，因此这个定义也称为正整数指数幂的定义．最早采用 a^n 这个记号的是法国数学家笛卡儿（René Descartes 1596—1650）．

此外，我们也可对正整数指数幂采用下列的归纳定义：

若 a 为实数，n 为正整数，且有

1．$a^1=a$，

2．$a^{n+1}=a\times a^n$．

则称 a^n 为 a 的 n 次幂．

我们来说明这两个定义是等价的，即是说，如果把 $a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{个}}$ 称为定义 1，上面的归纳定义称为定义 2，则由定义 1 可以推出定义 2，同样地由定义 2 可以推出定义 1．前者是显然的事实，下面用数学归纳法来证明由定义 2 可以推出定

义1来．事实上，由定义2知，当$n=1$时，有$a^1=a$，设$a^k=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{k个}$，上式两边同乘$a$后，$a\times a^k=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{(k+1)个}$，根据定义2的2．有$a^{k+1}=a\times a^k$，因此$a^{k+1}=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{(k+1)个}$，这就证明了对所有的正整数$n$，均有$a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n个}$.

正整数指数幂有下列五个运算规律：

1．对于任意正整数m、n均有

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

2．若$a\neq0$，$m>n$，m、n均为正整数，则有

$$a^m\div a^n=a^{m-n}.$$

3．对于任意正整数m、n均有

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

4．对任意正整数n均有

$$(ab)^n=a^nb^n.$$

5．若$b\neq0$，对任意正整数n均有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

这些规律的证明是很容易的，读者可以从任何一本中学教科书中找到.

上述规律还可以作如下推广：

若n_1，n_2，…，n_k均为正整数，则有

$$a^{n_1}a^{n_2}\cdots a^{n_k}=a^{n_1+n_2+\cdots+n_k}.$$

若n、k均为正整数，则有

$$(a_1a_2\cdots a_k)^n=a_1{}^na_2{}^n\cdots a_k{}^n.$$

证　$a^{n_1}a^{n_2}\cdots a^{n_k}$

$$=\underbrace{aa\cdots a}_{n_1个}\underbrace{aa\cdots a}_{n_2个}\cdots\underbrace{aa\cdots a}_{n_k个}$$

$$=\underbrace{aa\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a}_{(n_1+n_2+\cdots+n_k)个}=a^{n_1+n_2+\cdots+n_k}.$$

$$(a_1a_2\cdots a_k)^n$$

$$=\underbrace{(a_1a_2\cdots a_k)(a_1a_2\cdots a_k)\cdots(a_1a_2\cdots a_k)}_{n 个}$$

$$=\underbrace{a_1a_1\cdots a_1}_{n 个}\ \underbrace{a_2a_2\cdots a_2}_{n 个}\cdots\underbrace{a_ka_k\cdots a_k}_{n 个}$$

$$=a_1^na_2^n\cdots a_k^n.$$

例 1 化简 $(a^2+ab+b^2)\left(\dfrac{xy^4z^3}{a-b}\right)^5\dfrac{(a^2-2ab+b^2)^3}{(y^5z^2)^3}$.

解 $(a^2+ab+b^2)\left(\dfrac{xy^4z^3}{a-b}\right)^5\dfrac{(a^2-2ab+b^2)^3}{(y^5z^2)^3}$

$$=(a^2+ab+b^2)\frac{x^5y^{20}z^{15}(a-b)^6}{(a-b)^5y^{15}z^6}$$

$$=(a^2+ab+b^2)x^5y^5z^9(a-b)$$

$$=(a^3-b^3)x^5y^5z^9.$$

从这个例子中可以看出，运用正整数指数幂的运算规律可以使运算得到很大的简便．但是我们发现在很多场合仅仅只有正整数指数幂的概念和它的运算规律是远远不够的．例如在下式

$$a^2\div a^5=\frac{1}{a^3}$$

的运算中，是不能运用正整数指数幂的运算规律的，因为这时 $2<5$，是不符合运算规律 2 的条件的．如果我们希望幂的指数运算规律依然成立，那么就应该有

$$a^2 \div a^5 = a^{2-5} = a^{-3},$$

这时产生了负整数指数幂．同样地在下式

$$a^2 \div a^2 = 1$$

的运算中，如果我们采用正整数指数幂的运算规律，就有

$$a^2 \div a^2 = a^{2-2} = a^0,$$

这时产生了零指数幂的规定．

显然要使这样的运算有意义，应该有 $a^{-3}=\dfrac{1}{a^3}$，$a^0=1$．因此在涉及整数指数幂的运算时，为了使得正整数指数幂的运算规律能保持下来，以便利运算，我们必须把正整数指数幂的概念加以推广．为此，引进负整数指数幂和零指数幂的概念：

当 n 为正整数时，$a \neq 0$，约定

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

根据这一定义就有 $(-3)^{-5} = \dfrac{1}{(-3)^5}$，

$$(x^2+1)^{-9} = \frac{1}{(x^2+1)^9}.$$

当 $a \neq 0$ 时，约定

$$a^0 = 1.$$

根据这一定义就有 $5^0=1$，$(\sqrt{2})^0=1$，

$$(a+2b)^0 = 1 \quad (a \neq -2b).$$

要注意的是0^0是没有意义的．

至此，我们对整数指数幂的各种情况都作了规定，但是指数运算规律 1 — 5 在引进负整数指数幂和零指数幂概念后是否依然成立呢？这个回答是肯定的．下面逐一给予证明．

1．若 $a \neq 0$，对任意整数 m、n，均有

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

证 当 m、n 均为正整数时，当然是成立的.

当 m、n 中有一为零时，不妨设 $m=0$，则有

$$a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^{n+0} = a^{m+n}.$$

当 m、n 中一个为正整数，另一个为负整数时，不妨设 m 为正的，n 为负的，此时令 $n'=-n$，则 $n'>0$，于是

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-n'} = \frac{a^m}{a^{n'}}$$

$$= \begin{cases} a^{m-n'} = a^{m+n} & (m>n' \text{ 时}), \\ 1 = a^0 = a^{m-n'} = a^{m+n} & (m=n' \text{ 时}), \\ \dfrac{1}{a^{n'-m}} = a^{-(n'-m)} = a^{m-n'} = a^{m+n} & (m<n' \text{ 时}). \end{cases}$$

当 m、n 均为负整数时，令 $m'=-m, n'=-n$，则 $m'>0$，$n'>0$，于是

$$a^m \cdot a^n = a^{-m'} \cdot a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} \cdot \frac{1}{a^{n'}}$$

$$= \frac{1}{a^{m'+n'}} = a^{-(m'+n')} = a^{m+n}.$$

这就证明了：对于任意整数 m、n，指数运算规律 1 是成立的.

2. 若 $a \neq 0$，m、n 为整数，则有

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

证 因为 $a^m \div a^n = a^m \times \dfrac{1}{a^n}$，

当 $n=0$ 时，$\dfrac{1}{a^n} = 1 = a^0 = a^{-n}$，

当 $n>0$ 时，$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$，

当 $n<0$ 时，令 $n=-n'$，则 $n'>0$，于是

$$\frac{1}{a^n}=\frac{1}{\frac{1}{a^{n'}}}=a^{n'}=a^{-n}.$$

故对任意整数 n，均有 $\frac{1}{a^n}=a^{-n}$，由规律 1 就有

$$a^m\div a^n=a^m\times\frac{1}{a^n}=a^m\cdot a^{-n}=a^{m-n}.$$

3．若 $a\neq0$，对任意整数 m、n 均有

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

证 当 m、n 均为正整数或至少有一为零时，显然成立。当 $m<0$，$n>0$ 时，令 $m'=-m$，则 $m'>0$，于是

$$(a^m)^n=(a^{-m'})^n=\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^n$$

$$=\frac{1}{a^{m'n}}=a^{-m'n}=a^{mn}.$$

当 $m>0$，$n<0$ 时，令 $n'=-n$，则 $n'>0$，于是

$$(a^m)^n=(a^m)^{-n'}=\frac{1}{(a^m)^{n'}}$$

$$=\frac{1}{a^{mn'}}=a^{-mn'}=a^{mn}.$$

当 $m<0$，$n<0$ 时，令 $m'=-m$，$n'=-n$，则 $m'>0$，$n'>0$，于是

$$(a^m)^n=(a^{-m'})^{-n'}=\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{-n'}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n'}}=\frac{1}{\frac{1}{a^{m'n'}}}$$

$$=a^{m'n'}=a^{mn}.$$

这就证明了：对于任意整数m、n，指数运算规律3是成立的.

4. 若$a\neq0$，$b\neq0$，对任意整数n均有

$$(ab)^n=a^nb^n.$$

证 当n为正整数或零时显然成立.

当n为负整数时，令$n'=-n$，则$n'>0$，于是

$$(ab)^n=(ab)^{-n'}=\frac{1}{(ab)^{n'}}=\frac{1}{a^{n'}b^{n'}}$$

$$=a^{-n'}b^{-n'}=a^nb^n.$$

5. 若$a\neq0$，$b\neq0$，对任意整数n均有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

证 因为$\frac{a}{b}=ab^{-1}$，$\frac{a^n}{b^n}=a^nb^{-n}=a^n(b^{-1})^n$，我们只需证明$(ab^{-1})^n=a^n(b^{-1})^n$，而这即是规律4的直接结果.

至此，完全证明了对任意整数指数幂，指数运算规律1—5依然成立，这就说明了我们推广正整数指数幂到整数指数幂是合理的. 另外，我们也看到了引入整数指数幂的好处：它将幂的“乘、除运算”化为“幂指数的加、减运算”；将幂的“乘方运算”化为“幂指数的乘法运算”. 还要强调指出的一点是，在指数为负整数n或零的幂中，此时n或零已失去了在定义正整数指数幂时指数的意义，即n或零已不是底数自身连乘的次数(次数为负或零是毫无意义的)，它的意义是在它们的定义中约定的，因此只有在有了负整数或零指数幂的概念后才能验证指数运算规律1—5，而绝不能把负整数指数幂和零指数幂看作是运用指数运算规律而得出的.

此外，指数运算规律1—5中，$a\neq0$及$b\neq0$的条件是不

能少的，因为在证明中要用到负整数指数幂和零指数幂，而零的负整数指数幂和零指数幂是没有意义的. 在证明中，我们还可以看出规律1与规律2实质上是同一个规律，规律4与规律5也是同一个规律，即规律1—5可合并成下列三个：

1°. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2°. $(a^m)^n = a^{mn}$.

3°. $(ab)^n = a^n b^n$.

以后，我们就用指数运算规律1°—3°代替1—5，这三个规律在用到负整数指数幂和零指数幂时要求底数$a \neq 0, b \neq 0$，其余情况下对a、b不作任何限制.

例2 化简 $(x^3y)^7\left(\dfrac{a^3x^{-2}y^{-2}z^0}{a^{-2}x^5}\right)^3$.

解 $(x^3y)^7\left(\dfrac{a^3x^{-2}y^{-2}z^0}{a^{-2}x^5}\right)^3$

$$=x^{21}y^7(a^5x^{-7}y^{-2})^3=x^{21}y^7a^{15}x^{-21}y^{-6}=a^{15}y.$$

例3 化简$\dfrac{(a+a^{-1})(a^2-a^{-2})(a^3-3a+3a^{-1}-a^{-3})}{(a^2+a^{-2}-2)(a^4+a^{-4}-2)}$.

解 $\dfrac{(a+a^{-1})(a^2-a^{-2})(a^3-3a+3a^{-1}-a^{-3})}{(a^2+a^{-2}-2)(a^4+a^{-4}-2)}$

$$=\frac{(a+a^{-1})(a+a^{-1})(a-a^{-1})(a-a^{-1})^3}{(a-a^{-1})^2(a^2-a^{-2})^2}$$

$$=\frac{(a+a^{-1})^2(a-a^{-1})^4}{(a-a^{-1})^2(a+a^{-1})^2(a-a^{-1})^2}=1.$$

§1·2 有理数指数幂

在本节，我们将把整数指数幂作进一步的推广. 在讨论之前先把有关根式和根式的性质作一简单回顾. 大家知道，若n

为正整数，a 为正数，a 的正的 n 次方根称为 a 的 n 次算术根，记为$\sqrt[n]{a}$，a 称为被开方数，n 为根指数，为了方便起见，通常也把零的任意次方根零称为算术根．根式的性质也只限于讨论算术根的性质，归纳起来主要有下列五条：

1．$\sqrt[n]{a\times b}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$.

2．$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3．$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

4．$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$.

5．$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

式中 m、n、p 均为正整数，$a\geqslant0$，在 1 中 $b\geqslant0$，在 2 中 $b>0$.

下面来看几个例子：

$$\sqrt{a^4}=a^2=a^{\frac{4}{2}},$$

$$\sqrt[3]{a^{21}}=a^7=a^{\frac{21}{3}},$$

$$\sqrt[4]{b^{12}}=b^3=b^{\frac{12}{4}}\quad(b\geqslant0).$$

这就是说，当根式的被开方数的指数能被根指数整除时，根式可以写成分数指数幂的形式.

为了实际计算的需要，当根式的被开方数不能被根指数整除时，我们引进正分数指数幂的概念：当 $a\geqslant0$，m、n 为正整数时，规定

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

同样地，在引进正分数指数幂后，我们也引进正数的负分数指数幂，即当 $a>0$，m、n 为正整数时，规定

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

由定义中可知零的正分数指数幂是零．零的负分数指数幂是没有意义的．

有了分数指数幂的概念后，我们只要利用上述算术根的五条性质，就能很容易地说明上节谈到的整数指数幂的运算规律 1°—3°，对分数指数幂也是完全适用的．这里我们先就正分数指数幂的情况下给出证明．

证 设 $m=\frac{p}{q}$，$n=\frac{r}{s}$ 均为正分数，其中 p，q，r，s 都为正整数，则有

1°．$a^m\cdot a^n=a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps}\cdot a^{qr}}=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}$$

$$=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}=a^{m+n}.$$

2°．$(a^m)^n=(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^p})^r}=\sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}}$

$$=\sqrt[sq]{a^{pr}}=a^{\frac{pr}{qs}}=a^{mn}.$$

3°．$(ab)^n=(ab)^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{(ab)^r}=\sqrt[s]{a^rb^r}$

$$=\sqrt[s]{a^r}\cdot\sqrt[s]{b^r}=a^{\frac{r}{s}}\cdot b^{\frac{r}{s}}=a^nb^n.$$

在幂中有负分数指数或零指数时，我们只要把负分数指数幂写成正分数指数幂的倒数，并且注意到 $a^0=1$，对各种情况分别进行讨论，就不难一一给出证明．下面就指数运算规律2°给出完全的证明，1°和 3°的全部证明请读者自己作出．

证 m、n 共有下列五种情况：

(1) m、n 有一为零，此时显然成立．

(2) $m>0$，$n>0$，上面已给出证明.

(3) $m>0$，$n<0$，令 $n'=-n$，则 $n'>0$，故有

$$(a^m)^n=(a^m)^{-n'}=\frac{1}{(a^m)^{n'}}$$

$$=\frac{1}{a^{mn'}}=a^{-mn'}=a^{mn}.$$

(4) $m<0$，$n>0$，令 $m'=-m$，则 $m'>0$，故有

$$(a^m)^n=(a^{-m'})^n=\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^n$$

$$=\frac{1}{a^{m'n}}=a^{-m'n}=a^{mn}.$$

(5) $m<0$，$n<0$，令 $m'=-m$，$n'=-n$，则 $m'>0$，$n'>0$，故有

$$(a^m)^n=(a^{-m'})^{-n'}=\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{-n'}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n'}}=\frac{1}{\frac{1}{a^{m'n'}}}=a^{m'n'}=a^{mn}.$$

这就证明了对任意有理数 m、n，指数运算规律 2° 是成立的.

以上，我们证明了分数指数幂是适合指数运算规律1°—3°的，这就说明了我们将整数指数幂的概念扩张到有理数指数幂是合理的. 分数指数幂的引进给运算上带来不少的方便，尤其在一些复杂的根式运算中，这一点更为明显. 因为我们可以先把根式化为分数指数幂的形式，然后按照指数运算规律进行运算，就会变得简单方便. 况且指数运算规律的三个公式比算术根的性质的五个公式显得更加单纯、方便，也便于记忆，因此在学习了分数指数幂后，就可以把算术根的五条性质统一到指数运算规律中.