SHUXUE BAITI
JINGCAI QIANJIE

数学百题
精彩千解

王淼生 著

决战高考
冲刺奥赛

福建教育出版社

厦门一中数学奥赛金牌教练 王淼生 力作

责任编辑：范秋炎
美术编辑：赵 艺

ISBN 978-7-5334-5217-9

9 787533 452179 >

定价：28.00元

SHUXUE BAITI
JINGCAI QIANJIE

数学百题
精彩千解

王淼生 著

决战高考
冲刺奥赛

福建教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学百题　精彩千解/王淼生著．—福州：福建教育出版社，2009.6
ISBN 978-7-5334-5217-9

Ⅰ．数…　Ⅱ．王…　Ⅲ．数学课—高中—解题　Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 094651 号

数学百题　精彩千解

王淼生　著

出版发行　福建教育出版社
（福州梦山路 27 号　邮编：350001　电话：0591—83706771
83733693　传真：83726980　网址：www.fep.com.cn）

印　　刷　人民日报社福州印务中心
（福州鼓屏路 33 号　邮编：350001）

开　　本　889 毫米×1194 毫米　1/16

印　　张　15.5

字　　数　591 千

版　　次　2009 年 9 月第 1 版
2009 年 9 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5334-5217-9

定　　价　28.00 元

如发现本书印装质量问题，影响阅读，
请向本社营销部（电话：0591—83726019）调换。

前　言

一道好的数学题，如同一块璞玉，我们需要耐心揣摩，用手雕刻，用眼欣赏，用心品味，方能领悟到它的精妙绝伦与动人心魄。

作为一名长期从事高中毕业班数学教学的老师，我深切地感受到高中数学题型广、知识面宽、信息量多、跨跃度大、综合性强的特点，特别是新课改，许多新的知识模块为我们带来大量的新题型、新方法、新技巧、新机遇，同时也给我们带来新的挑战，新的难题。仔细审视近几年的各省市高考试题，特别是全国卷，明显感觉到这些高考试题除了具有以前的立足教材，重视基础，强调重点和能力的特点外，更加注意创设新情景，凸显应用功能，题型新颖，越来越重视创新意识的培养，越来越重视创新能力的考查。这就需要经常对数学思想方法和解题规律进行归纳、总结，注重一题多解，一题多变，以期举一反三，触类旁通。

作为一名长期从事数学竞赛辅导的教练，我纵观各种竞赛，无论是每年的“希望杯”全国数学邀请赛，各个省市的数学竞赛初赛、预赛，还是全国高中数学联合竞赛，甚至国际数学奥林匹克竞赛，很多题型就是从课本中、高考试题中提炼、引申出来的，同时很多高考题也是借鉴竞赛题的背景，由此改编而来，高考命题专家经常从“希望杯”、省市竞赛、全国联赛及国际数学竞赛中吸取营养，许多有经验的高三一线老师经常从中选取资料。

由此可见，随着新课程的改革深入，高考和竞赛越来越紧密相连。

本书立足于这两个基本点，以高考促竞赛，以竞赛带高考，将二者紧密结合于一体，书中精选一百个例题，全都来自大家熟悉的课本例题、习题、高考试题、“希望杯”试题、联赛试题及国际数学奥林匹克竞赛试题，从不同的角度、不同的层次、不同的思维方式，运用各种常见的数学思想和数学方法寻找常规解法。在此基础上，大胆探索，积极寻求一题多解、一题多巧解、一题多妙解、一题多奇解，开拓思维，激发学生学习数学的积极性，勇于去探索数学的解题规律，从具体的一题解答升华到理性的认识，以理论为指导，科学进行推广，提高解题能力，从而体会到数学的博大与精深，体会到数学的神奇与奥妙，体会到数学的和谐与优美。

玉石的珍贵在于其稀缺，更在于其质感玲珑剔透，姿态随形就势，雕琢惟妙惟肖，让人浮想联翩，赏玩不已，流连忘返，爱不释手；数学范题贵在出题精妙，更在于创新性强，联系面大，练一题而能调动相关知识的应用，练一题而能辐射整个高中数学，几度峰回路转，终归柳暗花明，让人怦然心动，悠然心会，涵泳回味，欲罢不能。希望这一百个范题的精析详解，能为您撩开数学王国的曼妙轻纱，让您的视野在千姿百态的解题方法中得以拓宽，让您的思维在纷繁芜杂的挑战中得以历练，让您的数学思想与数学方法从此与众不同！

解题仅仅是一种手段，不是我们的终极目标！这一百个范题的精析详解，使我们将数形结合、函数与方程、分类与讨论、转化与化归等数学思想糅为一体，进而灵活运用数学归纳法、消元法、换元法、坐标法、分析法、综合法等数学方法，尤其注意构造图形、构造向量、构造复数、构造柯西不等式、构造分布列、构造行列式、构造积分等构造法的绝妙应用，必将让我们处处有极强的创新意识和创新能力，从而让我们的数学修养达到一种高雅的境地，必将让我们受益终生。

厦门市教育局副局长、著名的数学特级教师、北京师范大学兼职教授、国务院政府特殊津贴获得者、苏步青数学教育奖一等奖获得者、中国学习科学学会理事、全国中学学习研究会副秘书长任勇先生，一直十分关心我的成长，他的家就是一个小型图书馆，我常常呆在那里一边请教，一边看书、查找资料，常常一起探讨高考试题及奥赛试题。去年7月26日，当我们探讨到当年的福建省高考试题及全国卷高考试题（详见书中第15、90题）时，为能有幸遇到这样的妙不可言的题目而陶醉时，突然一个念头在我脑海升起：为何不把这些典型的范题进行研究，并记录下来，深思一个晚上，第二天清晨，我把这个想法告诉任局长，当即得到他的大力支持，从那一刻起就全身心投入这本书的写作，特别是在本书的写作过程中，自始至终得到他精心的指导，并欣然为书作序，在此谨表深深的敬意！在这本书的写作过程中还拜读了国内自1990年以来各种数学期刊上的文章，在此向这些论文的作者及关心、爱护和帮助我的朋友致以真诚的谢意！

历经二十多年的积累，经过几个月的艰辛撰写，书稿终于即将付梓出版，满怀感恩之心，特别感谢福建教育出版社社长黄旭先生的大力支持与关心爱护！

由于笔者的水平有限，加上时间仓促，书中肯定有不少不足和错误，敬请同行和读者斧正。

王淼生

2009年2月28日

数学名师与精彩之解（代序）

任　勇

四年前的一个台风之夜，风雨交加，我在厦门一中对面的闽侨大厦见到了王森生老师。他代表九江一中来福州参加闽浙赣数学竞赛活动，我特地请这位金牌教练来厦门一中看看，希望他能加盟厦门一中团队。

瘦小，拘谨，极为朴素，是他给我的第一印象。交谈中得知他仅有一个孩子——一个弱智的儿子，之所以想来厦门看一眼，是因为厦门有可能为他儿子提供一个他所期望的教育。

虽是金牌教练，虽是内心喜欢这位老师，但要进厦门一中，还是要参加笔试、试教和面试等基本程序的。爱才心切的我，一时找不到合适的机会说这事，便特意把自己的著作《中学数学解题百技巧》送给他，我在扉页上写道："诚邀天下英才，共创一中伟业。"

王老师痴迷地进入数学的抽象世界，也不搭理我们，屋里极为宁静，唯闻屋外愈发猛烈的风雨声。忽然间，王老师激动了，说他就希望能有这样一本书，并说："任校长，我明天就上课，就笔试、面试。"

第二天，王老师借班上课，我早早地等在那儿准备听课。我听了十几分钟，就认定要引进这位数学金牌教练了！数学教师就应该是这个样子！

课上完后，班级掌声四起，学生觉得听这样的数学课，爽！启发大，印象深，是一种美的享受，是一次智慧之旅。

几经周折，半年后王老师融入了厦门一中团队。

刚来厦门，两地的文化差异让王老师一时难以适应，有点"水土不服"。王老师忧心忡忡，我也深感焦虑。

一日，王老师带儿子到一中篮球馆看我们打球，他也抓起球来拨弄，真没想到王老师篮球基本功不错！我便邀请他加入球队。

每周两次的球队活动，让王老师有一个与大家交流的机会，不然他会憋坏的。打着打着，王老师打出了与老师们的友谊，打出了他的阳光心态，打出了一中的球队文化。

就这样，在大家的帮助下，王老师终于"水土相服"了，他不仅带出了一个特别优秀的班级，还带出了两块厦门一中久违的数学金牌。

王老师的适应、融入，我不敢说一定就是打篮球打出来的，但打篮球一定是其中一项重要因素。

回想我和王老师的交往，有几件事让我印象特别深刻。

第一件事，源于厦门中招等级划分。

近年中考，厦门市物理、化学和政治采用划分等级制，每个学科划分 A、B、C、D 四个等级，不计较学科排序，可划分出 AAA，AAB，…，DDD 各类等级。

究竟有多少种不同的等级？这显然可以转化为一个数学问题。怎样用数学方法加以解决呢？

就此问题，我问厦门市招生考试中心的同志，"你们是怎么得出 20 种的？"他们说："硬排呗，从 AAA，AAB……排到 DDD。"我点点头，不能要求他们也都用数学眼光看问题。我就问数学老师，大多数人想了想，说："应该用分类法算。"

解答如下：

按位置排序计算。

第一位选 A，第二位有 4 种不同的排法。

第二位选 A，第三位有 4 种不同的排法；

第二位选 B，第三位有 3 种不同的排法；

第二位选 C，第三位有 2 种不同的排法；

第二位选 D，第三位有 1 种不同的排法。

故，第一位选 A，共有 $4+3+2+1=10$ 种不同的排法。

同理，第一位选 B，共有 $3+2+1=6$ 种不同的排法；

第一位选 C，共有 $2+1=3$ 种不同的排法；

第一位选 D，共有 1 种不同的排法。

故，总共有 $10+6+3+1=20$ 种不同的排法。

但绝大多数老师没有给出这个问题的更多的解法，更没有把这个问题一般化。

有一次球队打球，打完球后，大家在球馆外的台阶上休息。我就这个问题试着问王老师，他想了想，说了上面的那种解答，我问“还有不同的解答吗”？旁边一位数学老师说“没有纸和笔，不好算”。王老师好像没听到，继续想，说“可按字母分类解答”。

口述如下：按字母分类计算。

选一个字母，共有 C_4^1 种不同的排法；选两个字母，其中一个字母必用两次，共有 $2\cdot C_4^2$ 种不同的排法；选三个字母，共有 C_4^3 种不同的排法。

故，共有 $C_4^1+2\cdot C_4^2+C_4^3=20$ 种不同的排法。

我称赞“好！”之后就坐车回家。车开不久，手机来了短信，是王老师发的，一看，几行小字映入眼帘。

用排除法：共有 $4^3-5\cdot C_4^3-4\cdot C_4^2=20$ 种不同的排法。(读者想一想，为什么?)

我高兴地回复：“好！好！”

车开到家楼下时，短信又来了，又是王老师发的：“校长，我有新解法。”

我上电梯到家时，短信显示的几乎是数学文字：

设选 A 的有 X_1 种，选 B 的有 X_2 种，选 C 的有 X_3 种，选 D 的有 X_4 种，有

$X_1+X_2+X_3+X_4=3$，

$(X_1+1)+(X_2+1)+(X_3+1)+(X_4+1)=7$。

设 $X_i+1=Y_i$，$i=1, 2, 3, 4$，

有 $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=7$，$Y_i\in\mathbf{N}^*$，$i=1, 2, 3, 4$。

问题转化为求方程 $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=7$ 的正整数解。

用“隔板法”解决：

设有 7 个小球，用三块板来隔，如图

●●●●●●●

至少要“隔”出一个球，有 6 个缝，故共有 $C_6^3=20$ 种不同的排法。

为了让大家看得更明白，我加了上面的中文和七个小球。

我激动不已，打电话过去，连说：“好！好！好！”

浑身湿透的我，赶紧去洗澡。刚脱下衣服，短信又来了，当然还是王老师的，我顾不得患感冒之险，良知告诉我必须看短信。

“校长，这个问题我彻底解决了！发你邮箱。”

我立即披上浴巾，打开电脑，打开邮箱，王老师的邮件也恰好发来。

推广：设有 m 个学科，每个学科有 n 个等级，不计较学科排序，共有多少种不同的排法？

解法：设选每个等级为 X_1，X_2，…，X_n，则有

$X_1+X_2+\cdots+X_n=m$，

有 $(X_1+1)+(X_2+1)+\cdots+(X_n+1)=m+n$。

设 $X_i+1=Y_i$，$i=1$，2，…，n，

则 $Y_1+Y_2+\cdots+Y_n=m+n$，$Y_i\in\mathbf{N}^*$，$i=1$，2，…，n。

类似地，用“隔板法”，计算得共有 C_{m+n-1}^{n-1} 种不同的排法。

我一手抓着浴巾，一手给王老师回复。

“把一个实际问题数学化，是数学教师的基本素质；把一个数学问题一般化，是数学教师的基本功底。数学教师的研究性备课，当从这个方面开始。你是最优秀的数学老师，你让我看到了什么是真正的专业功底，数学老师都要向你学习！”

我一边洗澡，一边计算着“数学遭遇”的时段：大约 6 分钟后，给出按字母分类解法；又过了 6 分钟，给出排除法解法；又过 7 分钟，给出隔板法；又过 9 分钟，给出一般性解答。前后一共 28 分钟，给出四种解答，还包括从球馆到王老师家的 500 米路程、发短信、发邮件。正当我惊叹时，我忽然想到：“王老师换湿衣了吗？”

第二件事，源于我的一节公开课。

我有一节被数学教育界颇为称道的数学复习课《借题发挥》，即利用数学课本上一道简单的不等式证明题，给出一题多解，引导一题多变，巧妙一题多用。许多数学老师听过我的这节数学课，好评如潮；应编辑部约稿，课例整理后拿去发表，赞语颇多。

是怎样的一节数学课？“不等式 $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$ 证明”的教学。

我充分利用一题多解的教学价值，绞尽脑汁，苦思冥想，终于给出这道题的 13 种解法，即分析法、综合法、求差比较法、求商比较法、反证法、放缩法、构造函数法、增量法、定比分点法、斜率法 1、斜率法 2、三角法 1、三角法 2，我自以为是“登峰造极”了。

王老师在我的一本书里读到我写的关于这个不等式的“一题多解”，忽然他发现这道题还有新的解法，完全出自于学术探讨和完善这题的解法，王老师发来了他的新解——证法 14（详见本书第 47 题证法 17）。

过了不久，王老师一发不可收拾，又陆续给出 11 种解法。分别是三角形相似法、换元法、双换元法、综合法、定义域与值域关系法、椭圆离心率法、双曲线离心率法、一次函数法、几何法、矩形面积法及积分法。

我心理暗暗惊喜。惊的是已经“空索枯肠”的解法，王老师竟还能再“索”出 12 种解法；喜的是有了这 12 种解法，这道题的证法就有 25 种了，我今后再上这节课就更加从容而自信了！

第三件事，源于我的调离。

2006 年 10 月，我主持完厦门一中百年校庆后到厦门市教育局履新，一中有不少教师舍不得我离开，王老师就是其中的一位。

"确实舍不得您离开！您永远是我心目中的校长！去年的今天认识您，今年的今天你却要调离了！真诚感谢您一年来对我们全家无微不至的关心和爱护！也许我这一生无能为力报答您和师母，等到您年纪大了，我一定陪您散步；当您身体不舒服时，我一定陪您上医院。真诚感谢您！"这是王老师当时发给我的短信，一般人是不会这样发短信的。我是能读懂这样的短信，我是红着眼圈读完这条短信的。

我对王老师说，今后有什么困难有什么想法，还来找我，一定不要客气。

如今，王老师成了我那间颇有特色的书房里的常客。我们在书房里谈论着数学，谈论着数学竞赛，谈论着数学教育，谈论着数学文化，谈论着数学名家大师。有时也谈论厦门教育，谈论厦门城市文化，谈论篮球。

当然，谈论最多的还是数学解题。那是我的喜好，更是他的追求。谈着谈着，忽然间他觉得可以把他对数学各类题型的巧妙解法汇集起来，我觉得行，就鼓励他着手编书。我们想了好几个书名，比如《数学解题：新、奇、趣、巧》，《高中数学精彩解题 100 例》，最后定为现在这个书名——《数学百题　精彩千解》。

记得是去年七月底说到写书的事，八月我忙于暑期各种公务，九月我到北京参加教育部教育局长培训，国庆长假里，王老师告诉我说，书快写完了。

10 月 11 日，周六，我们例行打球，王老师把书稿带来了，嘱我写序。天啊！100 题，A4 纸 450 页，300 个图，全部自己打印，还附有光盘。我觉得我自己是够勤奋的了，但在王老师这一摞书稿面前，我再一次被王老师的勤奋、睿智、毅力所折服。

我一直在想：什么样的老师算专业成长?

现在我明白了，也找到具体的人了，那就是王老师！

王老师把书写出来了，我可要兑现写序啊！序言的标题，我想了好几个，比如《为师当如王淼生》，《精彩之师的精彩之解》，《专业名师与精彩之解》，权衡之，最后定为现在这个标题——《数学名师与精彩之解》。

现代专业价值观告诉我们：没有专业素养，就没有专业地位；没有专业能力，就没有专业报酬。教师的专业形象是由教师的素养、教师的文化、教师的气节、教师的胸怀、教师的智慧等诸多方面综合形成的。

读了王老师的书，你就能体验到什么叫精深的专业知识，什么叫数学教师的智慧！

做了行政工作，我远离了课堂，远离了数学。我多想还能有这样的机会，有一个班级，有一群学生，有一个有王老师在内的数学团队，我们研究数学解题，我们欣赏学生进步，我们感悟数学文化。

还好现在有了这本《数学百题　精彩千解》的书，我要钻进书里，去弥补我的缺憾，我要再一次去领略数学的情趣，去品味解题的智慧，去发掘更多的数学之美。

2009 年 3 月 20 日于无名书屋

（任勇，厦门市教育局副局长，特级教师，苏步青数学教育奖一等奖获得者，北京师范大学兼职教授）

目　录

上篇　代　　数

下篇　几　　何

上篇 代数

第一章 集 合

1. （1993 年全国高中数学联赛试题）集合 A、B 的并集 $A\cup B=\{a_1, a_2, a_3\}$，当且仅当 $A=B$ 时，(A, B) 与 (B, A) 看作相同的一对，则这样的 (A, B) 配对的个数为（ ）.

A. 8　　B. 9　　C. 26　　D. 27

剖析 1：由题意可知，当 $A=B$ 时，$A\cup B=\{a_1, a_2, a_3\}$ 的情形只有 1 个配对，此时 $A=B=\{a_1, a_2, a_3\}$，而当 $A\neq B$ 时，显然配对个数必为偶数，故结果必为奇数对.

▶解法 1：作为选择题，由上面的剖析就可以删除 A、C.

而当 A 含两个元素时，如 $A=\{a_1, a_2\}$ 时，此时满足要求的 B 就有

$B=\{a_3\}$、$\{a_1, a_3\}$、$\{a_2, a_3\}$、$\{a_1, a_2, a_3\}$

共 4 个配对，故当 A 含两个元素时，一共有 12 个配对，再删除 B. 故选择 D.

剖析 2：尽管上述解法 1 得到了答案，但数学讲究的是，如何准确详细地展示求解答案的过程，我们可以利用分类与讨论来处理.

▶解法 2：(1) 当 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$，即 A 中含三个元素时，此时 $B=\varnothing$、$\{a_1\}$、$\{a_2\}$、$\{a_3\}$、$\{a_1, a_2\}$、$\{a_1, a_3\}$、$\{a_2, a_3\}$、$\{a_1, a_2, a_3\}$，

故 A 中含三个元素时，一共有 8 个配对.

(2) 当 $A=\{a_1, a_2\}$时，即 A 中含两个元素时，此时

$B=\{a_3\}$、$\{a_1, a_3\}$、$\{a_2, a_3\}$、$\{a_1, a_2, a_3\}$，

故当 A 中含两个元素时，一共有 12 个配对.

(3) 当 $A=\{a_1\}$时，即 A 中含一个元素时，此时 $B=\{a_2, a_3\}$、$\{a_1, a_2, a_3\}$，

故当 A 中含一个元素时，一共有 6 个配对.

(4) 当 $A=\varnothing$时，此时 $B=\{a_1, a_2, a_3\}$，即当 $A=\varnothing$ 时，只有 1 个配对.

依据分类计数加法原理，共有 $8+12+6+1=27$，故选择 D.

剖析 3：同时利用分类计数加法原理及分步计数乘法原理.

▶解法 3：(1) 当 A 中含三个元素时，即 A 有 C_3^3 种选择，此时 B 有 $C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3$ 种选择，由分步计数乘法原理得到此时有

$$C_3^3\cdot(C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3)=8$$

个配对.

(2) 当 A 中含两个元素时，即 A 有 C_3^2 种选择，此时 B 有 $C_2^0+C_2^1+C_2^2$ 种选择，由分步计数乘法原理得到此时有

$$C_3^2\cdot(C_2^0+C_2^1+C_2^2)=12 \text{ 个配对.}$$

(3) 当 A 中含一个元素时，即 A 有 C_3^1 种选择，此时 B 有 $C_1^0+C_1^1$ 种选择，由分步计数乘法原理得到此时有

$$C_3^1\cdot(C_1^0+C_1^1)=6 \text{ 个配对.}$$

(4) 当 $A=\varnothing$时，此时 $B=\{a_1, a_2, a_3\}$，即当 $A=\varnothing$ 时，只有 1 个配对.

由分类计数加法原理，共有 $8+12+6+1=27$，故选择 D.

剖析 4：如图 1-1 所示，我们从文氏（Venn）图的角度来思考，集合 $A\cup B$ 中的每一个元素都有三个位置可供选择，即 $A\cap \complement_U^B$、$A\cap B$、$B\cap \complement_U^A$ 等三个位置中任选一个.

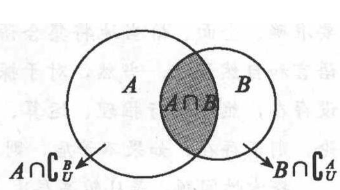

图 1-1

▶解法 4：由题意和上述的剖析可得，元素 a_1、a_2、a_3

均有 $C_3^1=3$ 种选择，由分步计数乘法原理，共有 $3^3=27$ 个配对，故选择 D.

多么巧妙的解法！

剖析 5：利用二项式定理.

▶解法 5：由于 $A\cup B=\{a_1, a_2, a_3\}$，我们按集合 A 分类，可分成 4 类，每一类分别有 C_3^0，C_3^1，C_3^2，C_3^3 种情况. 而此时的集合 B 的不同情况就是集合 A 的子集的个数，即集合 B 相应地分别有 2^0，2^1，2^2，2^3 种情况. 依据分步计数原理得到

$$C_3^0\cdot 2^0+C_3^1\cdot 2^1+C_3^2\cdot 2^2+C_3^3\cdot 2^3$$
$$=(1+2)^3=27.$$

故选择 D.

事实上，本题还可以推广为：

▶推广 1：集合 A、B 的并集 $A\cup B=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$，当且仅当 $A=B$ 时，(A, B)与(B, A)看作相同的一个配对，则这样的(A, B)配对的个数为 3^n.

▶推广 2：集合 A、B、C 的并集 $A\cup B\cup C=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$，当且仅当 $A=B=C$ 时，(A, B, C) 才能看作相同的一个配对，则这样的 (A, B, C) 配对的个数为 7^n.

利用上述的推广，又得到另解：

▶解法 6：在上述推广 1 中，令 $n=3$，则易得有 $3^3=27$ 个配对.

2. （1985 年全国高考试题）集合

$A=\{(x, y)\mid x=n, y=an+b, n\in\mathbf{Z}\}$，

$B=\{(x, y)\mid x=m, y=3m^2+15, m\in\mathbf{Z}\}$，

$C=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$，$a$、$b\in\mathbf{R}$.

是否存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且$(a, b)\in C$?

剖析 1：集合是现代数学的最基本概念，集合是一种语言形式，凡是与集合有关的问题，首先要弄清集合 A、B、C 所表示的问题的本质，在此题中表示满足一定条件的点. 要准确、全面、恰当地将集合语言转化为符号语言、图形语言和自然语言. 当然，对于探索性问题，一般都是先假设存在，然后进行推理、运算、证明，如果得出矛盾的结论，则不存在；如果不矛盾，则存在.

探索性问题，是从较高层次上来考查创造性思维能力的新型题，正确运用数学思想和数学方法是解决探索性问题的桥梁和向导. 随着新课程改革的逐步深入，在高考和各类竞赛中越来越重视探索性问题. 一般来说，要综合运用归纳与猜想、函数与方程、分类与讨论及等价与转化等数学思想方法加以解决. 本题可以转化为一元二次方程来处理.

假设存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且$(a, b)\in C$，即 $a^2+b^2\leqslant 144$，则一定存在 m、$n\in\mathbf{Z}$，并且使得

$$n=m，且\ an+b=3m^2+15,$$

于是得到

$$3n^2-an-b+15=0. \quad ①$$

又 $b=3n^2-an+15$，代入 $a^2+b^2\leqslant 144$，于是得到

$$(n^2+1)a^2-2n(3n^2+15)a+9n^4+90n^2+81\leqslant 0. \quad ②$$

▶解法 1：对于①式，由判别式得到

$$\Delta=a^2-12(-b+15)=a^2+12b-180\geqslant 0,$$

于是推出

$$a^2\geqslant -12b+180. \quad ③$$

又由 $a^2+b^2\leqslant 144$，易得

$$a^2\leqslant 144-b^2. \quad ④$$

由③及④得到

$$b^2-12b+36\leqslant 0，即\ b=6.$$

分别代入③和④得到

$$\begin{cases}a^2\geqslant 108,\\ a^2\leqslant 108,\end{cases}$$

故 $a^2=108$，此时推出 $n=\sqrt{3}$，或 $n=-\sqrt{3}$，这与 $n\in\mathbf{Z}$ 矛盾.

故不可能存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且$(a, b)\in C$.

剖析 2：上述解法 1，把 n 看作元，如果我们把 a 看作元，则又得到以下的另解.

▶解法 2：对于②式，

$$\Delta=4n^2(3n^2+15)^2-4(n^2+1)(9n^4+90n^2+81)$$
$$=-36(n^2-3)^2.$$

又 $n\in\mathbf{Z}$，推出 $\Delta<0$，注意到二次函数开口向上，于是由二次函数的图象得到

$$(n^2+1)a^2-2n(3n^2+15)a+9n^4+90n^2+81>0.$$

这与②矛盾，故不可能存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且$(a, b)\in C$.

剖析 3：上述解法 1 中，把 n 看作元，上述解法 2 中，把 a 看作元，如果我们把 b 看作元，则同样可以得到相同的思路.

▶解法 3：同解法 2 的过程（略）.

剖析 4：同一个条件，同一个式子，从不同的角度，从不同的侧重点出发，得到不同的思路.

▶解法 4：如果我们把 a、b 看作元，则①式变形为

$$na+b-3n^2-15=0.$$

注意到 $a^2+b^2\leqslant 144$，容易让人联想到有关直线和圆的知识，利用 $d\leqslant r$，可得

$$\frac{|3n^2+15|}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant 12.$$

整理得到

$$3\sqrt{n^2+1}+\frac{12}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant 12.$$

事实上，由重要不等式可以推出

$$3\sqrt{n^2+1}+\frac{12}{\sqrt{n^2+1}}\geqslant 12.$$

由此得到

$$3\sqrt{n^2+1}+\frac{12}{\sqrt{n^2+1}}=12.$$

解得 $n^2=3$，这与 $n\in\mathbf{Z}$ 矛盾，故不可能存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,\ b)\in C$.

剖析 5：有关集合的问题，一定要妥善地将符号语言和文字语言（即自然语言）进行恰当的转换，我们再来琢磨集合 A，B，C.

集合 A 表示直线 $ax-y+b=0$ 上横坐标为整数的点（如果存在 a 和 b，则也是格点），集合 B 表示抛物线 $y=3x^2+15$ 上的格点，而集合 C 则表示圆 $x^2+y^2=144$ 上及圆内的点，而 $A\cap B\neq\varnothing$ 则表示直线和抛物线有公共点，于是联立得到以下思路.

▶解法 5：联立 $\begin{cases}ax-y+b=0,\\ y=3x^2+15,\end{cases}$ 容易得到

$$xa+b-(3x^2+15)=0.$$

而 $(a,\ b)\in C$，说明直线和圆有交点，于是 $d\leqslant r$，得到

$$\frac{|3x^2+15|}{\sqrt{|x^2+1|}}\leqslant 12.$$

解得 $x=\pm\sqrt{3}$，这与 $x\in\mathbf{Z}$ 相矛盾．故不可能存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,\ b)\in C$.

剖析 6：由 $a^2+b^2\leqslant 144$ 及 $\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)^2+\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^2=1$，联想到三角换元.

▶解法 6：假设存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,\ b)\in C$，即 $a^2+b^2\leqslant 144$，则一定存在 m、$n\in\mathbf{Z}$，并且使得

$$n=m，且\ an+b=3n^2+15.$$

由 $a^2+b^2\leqslant 144$，令

$|a|=12\cos\alpha$，$|b|=12\sin\alpha(0\leqslant\alpha<\pi)$.

由 $\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)^2=1$，令

$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\cos\beta$，$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\sin\beta(0\leqslant\beta<\pi)$，

于是得到

$$\begin{aligned}\frac{|na|+|b|}{\sqrt{n^2+1}}&=12(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\sin\beta)\\&=12\sin(\alpha+\beta)\leqslant 12.\end{aligned}$$

而 $3n^2+15=|na+b|\leqslant|na|+|b|=|n||a|+1\cdot|b|$，由柯西不等式得到

$$3n^2+15\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{n^2+1^2},$$

于是

$$3n^2+15\leqslant 12\sqrt{n^2+1},$$

即 $n^2+5\leqslant 4\sqrt{n^2+1}$，

化简得到

$$(\sqrt{n^2+1}-2)^2\leqslant 0,$$

即 $n=\pm\sqrt{3}$，与题意矛盾．故不可能存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,\ b)\in C$.

剖析 7：构造二维向量，并利用向量数量积的性质.

▶解法 7：假设存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,\ b)\in C$，即 $a^2+b^2\leqslant 144$，则一定存在 m、$n\in\mathbf{Z}$，并且使得

$$n=m，且\ an+1\cdot b=3n^2+15.$$

依据其外形，构造二维向量 $\boldsymbol{p}=(a,\ b)$，$\boldsymbol{q}=(n,\ 1)$，由于 $|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{q}|\geqslant|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}|$，代入得到

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{n^2+1^2}\geqslant|n\cdot a+1\cdot b|$$

恒成立，即

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{n^2+1^2}\geqslant|3n^2+15|$$

恒成立，即

$$12\sqrt{n^2+1}\geqslant 3[(n^2+1)+4],$$

整理得到

$$(\sqrt{n^2+1}-2)^2\leqslant 0,$$

解得 $n=\pm\sqrt{3}$，与题意矛盾，故不可能存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,\ b)\in C$.

剖析 8：构造复数，并利用复数的性质：

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|.$$

▶解法 8：假设存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,\ b)\in C$，即 $a^2+b^2\leqslant 144$，则一定存在 m、$n\in\mathbf{Z}$，并且使得

$$n=m，且\ an+b=3n^2+15.$$

依据其外形，构造复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=n-\mathrm{i}$，利用 $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ 得到

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{n^2+1}=\sqrt{(an+b)^2+(bn-a)^2}.$$

于是推出

$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{n^2+1^2}\geqslant|na+b|$恒成立.（下同解法 7）

剖析 9：由 $y=na+b$ 与 $a^2+b^2\leqslant144$，联想到柯西不等式，于是得到

$$(na+b)^2=(n\cdot a+1\cdot b)^2\leqslant(n^2+1)\cdot(a^2+b^2).$$

再加以变形得到

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|n|}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant1.$$

这与托勒密定理的外形结构相似，于是得到以下一种意想不到的思路.

托勒密定理：若四边形 $ABCD$ 内接于圆，则 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

托勒密定理逆定理：若 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$，则四边形 $ABCD$ 内接于圆.

广义托勒密定理：若四边形 $ABCD$ 为平面凸四边形，则 $AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD$，当且仅当四边形 $ABCD$ 内接于圆时等号成立，亦称托勒密不等式.

使用托勒密定理关键在于妥善构造圆内接四边形，托勒密定理在高中数学及奥赛中有着广泛的应用.

▶解法 9：假设存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,b)\in C$，即 $a^2+b^2\leqslant144$，则一定存在 m、$n\in\mathbf{Z}$，并且使得

$$n=m，且\ an+b=3n^2+15.$$

如图 2-1 所示，构造平面图形，作一个直径 AC 为 1 的圆，在圆内接四边形 $ABCD$ 中，令

$$AB=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},\ AD=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

于是得到

$$BC=\frac{|n|}{\sqrt{n^2+1}},\ CD=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

在圆中，显然 $BD\leqslant1$.

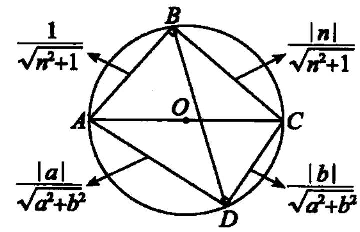

图 2-1

依据托勒密定理得到

$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD=BD\leqslant1$，即

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|n|}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant1,$$

于是得到

$$|n|\cdot|a|+|b|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{n^2+1}\leqslant12\sqrt{n^2+1}.$$

$3n^2+15=|na+b|\leqslant|na|+|b|\leqslant12\sqrt{n^2+1}$.（下同解法 7）

第二章　方程与函数

3. （第九届“希望杯”全国数学邀请赛高一试题）若二次函数 $f(x)=ax^2+bx$，恒有 $f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$，求 $f(x_1+x_2)$的值.

剖析 1：利用已知条件，直接代入，这是最基本、最常见的方法.

▶**解法 1**：由已知条件 $f(x_1)=f(x_2)$，代入得到

$$ax_1^2+bx_1=ax_2^2+bx_2,$$

移项、合并、提取公因式得到

$$(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+b]=0.$$

又 $x_1\neq x_2$，化简得到

$$a(x_1+x_2)+b=0.$$

故 $f(x_1+x_2)=a(x_1+x_2)^2+b(x_1+x_2)$

$$=(x_1+x_2)[a(x_1+x_2)+b]$$

$$=0.$$

剖析 2：在进行代数运算时，适当施以代数变形技巧，往往会收到让人惊喜的效果.

▶**解法 2**：(1) 当 $x_1+x_2=0$，显然 $f(x_1+x_2)=f(0)=0$.

(2) 当 $x_1+x_2\neq 0$，由已知条件 $f(x_1)=f(x_2)$，容易得到

$$0=f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+b]$$

$$=\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}[a(x_1+x_2)^2+b(x_1+x_2)]$$

$$=\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}f(x_1+x_2).$$

故 $f(x_1+x_2)=0$.

剖析 3：联想二次函数的对称轴，利用抛物线的性质.

▶**解法 3**：由于二次函数满足 $f(x_1)=f(x_2)$，则二次函数的对称轴为 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，而 0 与 x_1+x_2 正好关于直线 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 对称，则 $f(x_1+x_2)=f(0)=0$，故 $f(x_1+x_2)=0$.

剖析 4：构造方程的根，从具体到抽象，利用韦达定理.

▶**解法 4**：由已知条件 $f(x_1)=f(x_2)$，令

$$f(x_1)=f(x_2)=-c,$$

于是得到

$$ax_1^2+bx_1+c=0, \quad ①$$

$$ax_2^2+bx_2+c=0. \quad ②$$

由①及②得到 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个不等实根，利用韦达定理得到 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，于是

$$f(x_1+x_2)=a(x_1+x_2)^2+b(x_1+x_2)$$

$$=a\left(-\frac{b}{a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$=0.$$

故 $f(x_1+x_2)=0$.

剖析 5：我们知道：若函数 $y=f(x)$的图象关于 $x=m$ 对称，则对于定义域范围内的任何 x，恒有

$$f(m+x)=f(m-x)，或 f(2m-x)=f(x).$$

▶**解法 5**：由已知易得该函数 $y=f(x)$关于直线 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 对称，于是得到

$$f\left(2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-x\right)=f(x),$$

即 $f(x_1+x_2-x)=f(x)$恒成立，令 $x=0$，得到

$$f(x_1+x_2)=f(0),$$

故 $f(x_1+x_2)=0$.

剖析 6：构造直线，利用向量平行的性质.

▶解法 6：由已知条件得到$\frac{f(x)}{x}=ax+b$，不妨令

$$f(x_1)=f(x_2)=t，f(x_1+x_2)=c，$$

于是得到

$$A\left(x_1,\frac{t}{x_1}\right)，B\left(x_2,\frac{t}{x_2}\right)，C\left(x_1+x_2,\frac{c}{x_1+x_2}\right)$$

三点共线，又

$$\overrightarrow{AC}=\left(x_2,\frac{c}{x_1+x_2}-\frac{t}{x_1}\right)，\overrightarrow{BC}=\left(x_1,\frac{c}{x_1+x_2}-\frac{t}{x_2}\right)，$$

依据$\overrightarrow{AC}//\overrightarrow{BC}$得到

$$x_2\left(\frac{c}{x_1+x_2}-\frac{t}{x_2}\right)=x_1\left(\frac{c}{x_1+x_2}-\frac{t}{x_1}\right)，$$

整理得到

$$\frac{cx_2}{x_1+x_2}=\frac{cx_1}{x_1+x_2}.$$

又 $x_1\neq x_2$，推出 $c=0$，即 $f(x_1+x_2)=0$.

剖析 7：利用行列式的三角形面积公式：

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{matrix}\right\|.$$

▶解法 7：如同解法 6 得到

$$A\left(x_1,\frac{t}{x_1}\right)，B\left(x_2,\frac{t}{x_2}\right)，C\left(x_1+x_2,\frac{c}{x_1+x_2}\right)$$

三点共线，于是 $S=0$，即

$$\left\|\begin{matrix}x_1 & \frac{t}{x_1} & 1\\ x_2 & \frac{t}{x_2} & 1\\ x_1+x_2 & \frac{c}{x_1+x_2} & 1\end{matrix}\right\|=0.$$

展开行列式得到

$$\frac{cx_2}{x_1+x_2}=\frac{cx_1}{x_1+x_2}.$$

(下同解法 6)

剖析 8：由二次函数 $f(x)=ax^2+bx$ 的外形结构，联想到等差数列的性质：在等差数列$\{a_n\}$中，S_n 是其前 n 项的和，$m\neq n$，若 $S_m=S_n$，则 $S_{m+n}=0$.

▶解法 8：由二次函数 $f(x)=ax^2+bx$，又由已知条件 $f(x_1)=f(x_2)$，与等差数列的性质相类比，容易得到

$$f(x_1+x_2)=0.$$

从解法 1 到解法 8，一个比一个简单，一个比一个巧妙.

4. （2004 年云南省高考模拟试题）已知 $f(x+3)=2x^2+7x-1$，求 $f(x)$的解析表达式.

剖析 1：利用凑合的方法，用 $x+3$ 来表示 $y=f(x+3)$，这是代数变形中常见的方法.

▶解法 1：由已知条件得到

$$\begin{aligned}f(x+3)&=2x^2+7x-1\\&=2(x^2+6x+9)-5x-19\\&=2(x+3)^2-5x-19\\&=2(x+3)^2-5(x+3)-4.\end{aligned}$$

故 $f(x)=2x^2-5x-4$.

剖析 2：利用待定常数法.

有些数学问题，其结果的形式是已知的或可以预先确定的，即可以事先按照已经获得的知识及信息写出问题结果的标准表达式，而且表达式中含有一个或多个（有时甚至可以是无穷多个）参数等待确定，这些参数称为待定常数. 一旦把所有（或部分）待定常数确定好，该问题也就随之而解决，我们把这个过程称为待定常数法，这是中学阶段经常使用的方法.

▶解法 2：由题意可令

$f(x+3)=2x^2+7x-1=2(x+3)^2+m(x+3)+n$，

整理得到

$$2x^2+7x-1=2x^2+(m+12)x+(3m+n+18)，$$

于是得到

$$\begin{cases}m+12=7,\\3m+n+18=-1,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}m=-5,\\n=-4,\end{cases}$$

即 $f(x+3)=2(x+3)^2-5(x+3)-4$，

故 $f(x)=2x^2-5x-4$.

剖析 3：通过代数换元.

▶解法 3：令 $t=x+3$，则 $x=t-3$，

于是代入已知条件得到

$$f(t)=2(t-3)^2+7(t-3)-1=2t^2-5t-4，$$

故 $f(x)=2x^2-5x-4$.

剖析 4：设 $f(x)$的解析表达式，然后代入、联立.

▶解法 4：由题意可得 $f(x+3)$必为二次函数，而$f(x)$与 $f(x+3)$的关系仅仅是发生了平移，我们知道平移仅仅是位置变化，也就是说仅仅是点的坐标，即方程的表达式