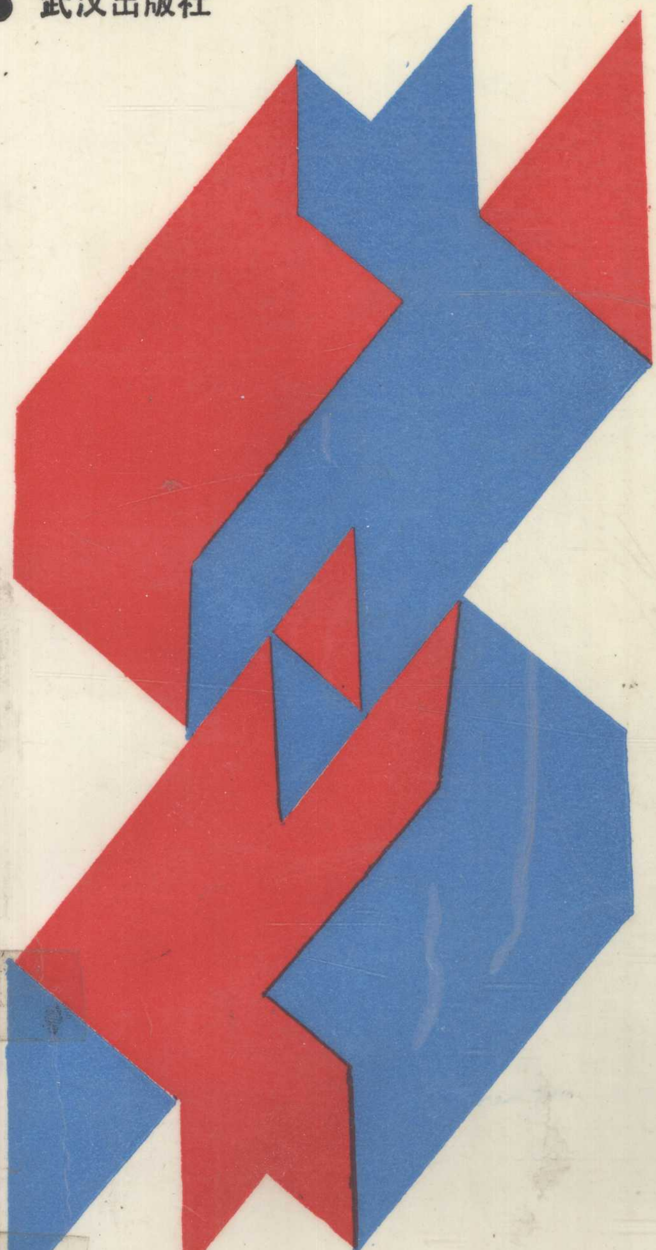
武汉出版社

算子代数及其上同调



邓宏钧 张政修
高仁 董伦群

算子代数及其上同调

邓宏钧 张政修
高 仁 董伦群 著

武 汉 出 版 社

算子代数及其上同调

内 容 简 介

本书叙述算子代数及上同调的基本理论．作为基础，介绍了Banach 空间理论、Hilbert空间理论，C^*-代数理论及表示理论、von Neumann代数及其分类。关于Banach代数上同调，介绍了基本概念、低维上同调理论，导子的提升和Banach代数的扩张等；关于算子代数上同调，介绍了基本概念，连续上同调理论，正规上同调理论，高维上同调理论等；最后给出了近期的一些主要成果和进一步可探讨的问题。

本书可供大学数学专业高年级学生、研究生、大学教师及研究工作者阅读和参考。

算子代数及其上同调
SHUANZHI DAISHU JIQISHANG TONGDIAO
邓宏钧 张政修
高 仁 董伦群

武汉出版社出版发行
（武汉市江岸区三眼桥一村附160号）
武汉大学出版社印刷总厂印刷

开本:787×1092 毫米1/32 印张:8.125 字数:175 千字
1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷
印数1—1200册
ISBN 7—5430—0108—1/0.3
定价：5.80元

前　言

算子代数和算子代数的上同调论是近几十年发展起来的新兴数学分支。其起源既有数学本身的几何因素，也是物理学的需要——量子场论的研究刺激了算子代数的发展。

算子代数是在泛函分析、抽象代数和拓扑学的基础上发展起来的一个分支。目前，人们常常把它归结为泛函分析的一个分支；也有人把它归为代数学的内容。但是，随着算子代数的蓬勃发展，这个分支是大有前途的。

为了使我国有志致力于算子理论的数学工作者，能较快地掌握这一理论并直接进入研究工作的前沿，我们写了这本书。第一、二章介绍了这一理论必备的基础知识；第三、四、五章讲述算子代数的基础理论；第六、七章介绍了算子代数的同调理论，并介绍了近期的成果及提出了一些研究课题，我们希望对从事这方面研究工作的同志有所帮助。

在我们长期研讨算子理论的过程中，武汉大学数学系教授余家荣先生，中国科学院数学所李炳仁先生给于了不少帮助，谨在此表示感谢。

由于我们水平有限、时间仓促，书中如有不妥和错误之处，敬请读者批评指正。

作者于武汉·1988年

序

近几十年来，全世界数学界出现一种新景象：数学工作者人数不断增长；数学论文数量急剧增加；新的研究领域及新的研究课题陆续出现。我国在文化大革命结束以前，由于与国外交流中断多年，因而对于这些新的数学研究领域及课题，数学工作者或者很少、或者根本没有进行研究。近几年来这种情况逐步有所改变。为了使我国数学研究走向世界前列，要求在各个数学领域中的研究工作达到世界先进水平，为此需要我国数学工作者、特别是青年数学工作者积极努力；还需要国家大力支持，为研究工作提供必要的条件。

近几年来，邓宏钧、张政修、高仁和董伦群同志协力研究算子理论这一较新课题，取得了不少研究成果，《算子代数及其上同调》一书的撰写，是十分可喜的成果之一。本书不但讲述了算子代数的预备知识和基础理论，还介绍了算子代数的同调理论。读者通过本书的学习，将可进入研究工作的前沿。我们相信本书的出版会促进有关问题的研究。对于数学中其他新的研究领域，我们希望其他数学工作者也像本书作者一样，协力进行研究工作，为使我国数学走向国际上最前列而共同努力。

余家荣

1988年12月14日于武汉

目　录

第一章　Banach空间

Banach空间的理论是讨论算子代数和它的上同调群的最基础的理论。这一章我们叙述本书所需要的与Banach空间有关的一些基础内容。由于本书的内容应以"泛函分析"和"抽象代数"为基础，因此在这一章中也常常只引述一些在上述课程中已有的基本性质而不予证明。

§1　线性拓扑空间

定义1·1： 域K(=R或C)上的线性空间V同时是一个Hausdorff拓扑空间。若线性运算对这个拓扑结构是连续的，就说线性空间V与拓扑结构相容，称V为线性拓扑空间。记为**TVS**。

如果V_1是**TVS** V的线性子空间，则V_1的闭包V_0也是线性子空间。事实上设$x_0, y_0 \in V_0$，有网$\{x_i\}$，$\{y_i\} \subset V_1$，使$x_i \to x_0$，$y_i \to y_0$，且因线性运算的连续性，有$ax_i + by_i \in V_1$且$ax_i + by_i \to ax_0 + by_0$，因此$ax_0 + by_0 \in V_0$($a, b \in K$)。类似地可以证明V的平衡子集或凸子集的闭包仍是平衡或凸子集。又，如果G是V的开集，则G完全由内点组成。

为说明这一点，令$x\in G$，$y\in V$，因为映射$R\to V$：$a\to x+ay(a\in R)$是连续映射且把0映射到G内，必有实数c，使区间$(-c,c)$的象在G内，特别是，每当$0\leqslant a<c$时就有$x+ay\in G$。

对于$x_0\in V$，因连续映射$V\to V$：$x\to x+x_0$有连续逆映射$x\to x-x_0$，故知V_0是0的邻域的充要条件,是x_0+V_0是x_0的邻域。据此，只要确定了0的邻域基就确定了V的拓扑。如果V_0是0的邻域，$0\neq a\in R$，因映射$V\to V$：$x\to ax$是双向连续的，故aV_0也是0的邻域，特别$-V_0$也是0的邻域；而且存在0的邻域V_1和正实数ε，使每当$x\in V_1$和$|a|\leqslant\varepsilon$时$ax\in V_0$。由此，$\bigcup\{aV_1: 0<|a|\leqslant\varepsilon\}$是$V_0$的平衡开子集，故0的每一邻域都包含0的一个平衡邻域。

N表示V内0的所有邻域的集合。$\forall V_0\in N$，有$V\times V$的子集$\varepsilon(V_0)=\{(x,y):y-x\in V_0\}$；如果$V_1+V_1\subseteq V_0$，由$(x,z)\in\varepsilon(V_1)$及$(z,y)\in\varepsilon(V_1)$可得$(x,y)\in\varepsilon(V_0)$。而由运算$x+y$在$(0,0)$的连续性可知适合条件的$V_1$必存在。由于$\varepsilon(V_1)\cap\varepsilon(V_2)=\varepsilon(V_1\cap V_2)$且$(x,y)\in\varepsilon(V_0)$的充要条件是$(y,x)\in\varepsilon(-V_0)$，明显地集合$\varepsilon(V_0)(V_0\in N)$形成V上一致结构的基（均匀性）［参看文献1：P176］。这样，使V成为Hausdorff一致空间，且从这个一致结构得到的拓扑和初始拓扑一致，因为在两种情况下集合$\{y\in V:(x,y)\in\varepsilon(V_0)\}=\{y-x\in V_0\}=x+V_0$形成x的邻域基，这里$V_0$跑遍0的邻域基$N_0$；以后常用$N_0$代替N，集合$\varepsilon(V_0)(V_0\in N_0)$形成同样的一致结构的基。

我们常常使用拓扑学中的连续扩张定理：从一致空间V的子集X到完备的Hausdorff一致空间W的一致连续映射，

可以唯一地开拓成从X的闭包到W的一致连续映射。〔参看文献1：P195〕

定理1.1：V和W是同一数域K上的线性拓扑空间，T：$V\to W$是线性算子。则：

（1） 如果T在$x_0\in V$连续，则T在V上一致连续。

（2） 如果C是V的平衡凸集且限制映射$T|_c$在0点连续，则$T|_c$在C上一致连续。

证明：（1）由T在x_0连续，给定W中0的任意邻域W_0，存在V中0的邻域V_0，使当$x\in x_0+V_0$时就有$Tx\in Tx_0+W_0$；若$(x,y)\in\varepsilon(V_0)$，$y-x\in V_0$，有$x_0+y-x\in x_0+V_0$，故$Tx_0+Ty-Tx\in Tx_0+W_0$；所以$Ty-Tx\in W_0$，即$(Tx,Ty)\in\varepsilon(W_0)$，T在V上一致连续。

（2） 因为$T|_c$在0点连续，对W内0的任意邻域W_0，存在V内0的平衡邻域V_0，使得每当$x\in V_0\cap C$时$Tx\in\frac{1}{2}W_0$。

假设x，$y\in C$且$y-x\in V_0$。因C为凸集且C和V_0都是平衡的，我们有$\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x\in V_0\cap C$；因此，$\frac{1}{2}Ty-\frac{1}{2}Tx\in\frac{1}{2}W_0$，$Ty-Tx\in W$。从而每当$x,y\in C$且$(x,y)\in\varepsilon(V_0)$时，$(Tx,Ty)\in\varepsilon(W_0)$。命题得证。

推论1：V_0是V的处处稠密子空间，T_0是从V_0到完备线性拓扑空间W的连续线性算子，则T_0可唯一扩张成连续线性算子T：$V\to W$。

证明：由定理1.1知T_0在V_0上一致连续，所以能唯一扩

张成一致连续映射$T: V\to W$。给定任意数a, b，等式 $g(x, y)=T(ax+by)-aTx-bTy$ 定义了一连续映射$g: V\times V\to W$；且因g在其处处稠密子集$V_0\times V_0$上为零，故g在$V\times V$上为零。这就说明T是线性的。

推论2： 在线性拓扑空间V上的线性泛函ρ是连续的充要条件是零空间$\rho^{-1}(0)$在V中闭。

证明： 必要性是显然的。我们证明充分性。设$\rho\neq 0$，$\rho^{-1}(0)$是闭集。我们可以在V中选择x_0使$\rho(x_0)=1$。因$x_0\notin\rho^{-1}(0)$，存在V中0的平衡邻域V_0，使x_0+V_0不与$\rho^{-1}(0)$相交。

如果$x\in V_0$且$|\rho(x)|\geqslant 1$，我们可选择数a使得$|a|\leqslant 1$且$\rho(ax)=-1$。则$ax\in V_0$，$x_0+ax\in x_0+V_0$且$\rho(x_0+ax)=0$，与上一段矛盾。故必有$|\rho(x)|<1$。因此，根据下面所引述的引理知ρ是连续的。〔参看文献2，P15，引理1、2、4。该引理的内容是：ρ是**TVS** V上的线性泛函，P是V上半范数。(i)若有非空开集$G\subset V$和实数C，使$\mathrm{Re}\,\rho(x)<C\ (x\in G)$，则$\rho$在$V$上（一致）连续。(ii)$P$在0的某一邻域上有界，则$P$在$V$上(一致)连续。〕

当一个TVS的拓扑有由凸集组成的基，称为局部凸空间。可以证明向量空间R^n和C^n都是局部凸空间，例如开球可以组成其拓扑的基。

定理1.2： Γ是分离向量空间V的半范数族：若$x\neq 0\in V$，就有$P\in\Gamma$使$P(x)\neq 0$。则存在V上局部凸拓扑，使得对每个$x_0\in V$，所有集合

$V(x_0: P_1, \cdots, P_m; \varepsilon)=\{x\in V: P_j(x-x_0)<\varepsilon\ (j=1, \cdots, m)\}$的族是$x_0$的邻域基，其中$\varepsilon>0$，$P_1$，…，$P_m$

$\in\Gamma$。Γ中每一半范数对这个拓扑是连续的。而且V上每一局部凸拓扑都可以用这种方法从一适当半范数族得出。

证明： 若$x_0\in V(y_0:p_1,\cdots,p_m;\delta)\cap V(z_0:q_1,\cdots q_n;\eta)$，可选择$\varepsilon>0$使得$p_j(x_0-y_0)+\varepsilon<\delta$，$q_k(x_0-z_0)+\varepsilon<\eta(j=1,\cdots,m;k=1,\cdots,n)$。由三角不等式有$V(x_0:p_1,\cdots,p_m;q_1,\cdots,q_n;\varepsilon)\subseteq V(y_0:p_1,\cdots,p_m;\delta)\cap V(z_0:q_1,\cdots,q_n;\eta)$。特别，若$V(y_0:p_1,\cdots,p_m;\delta)$包含$x_0$，它也包含形如$V(x_0:p_1,\cdots,p_m;\varepsilon)$的集合。因此，族$\{V(x_0:p_1,\cdots p_m;\varepsilon):x_0\in V,p_1,\cdots,p_m\in\Gamma,\varepsilon>0\}$是V上拓扑的基，这里$\{V(x_0:p_1,\cdots,p_m;\varepsilon):p_1,\cdots p_m\in\Gamma。\varepsilon>0\}$是$x_0$的邻域基。如果$x_0,y_0\in V$且$x_0\neq y_0$，我们选择$p\in\Gamma$使$p(x_0-y_0)>0$，当$0<\varepsilon<\frac{1}{2}p(x_0-y_0)$时，集合$V(x_0:p;\varepsilon)$和$V(y_0:p;\varepsilon)$是$x_0$和$y_0$的离散邻域，所以这个拓扑是Hausdorff拓扑，又因为$p(x+y-x_0-y_0)\leqslant p(x-x_0)+p(y-y_0)$，

$$\begin{aligned}p(ax-a_0x_0)&=p(a_0(x-x_0)+(a-a_0)x_0+(a-a_0)(x-x_0))\\&\leqslant|a_0|p(x-x_0)+|a-a_0|p(x_0)+|a-a_0|p(x-x_0)\end{aligned}$$

对每个半范数p成立，得到当$x\in V(x_0:p_1,\cdots,p_m;\delta)$，$y\in V(y_0:p_1,\cdots,p_m;\delta)$时，

$x+y\in V(x_0+y_0:p_1,\cdots,p_m,\varepsilon)$，$ax\in V(a_0x_0:p_1,\cdots,p_m;\varepsilon)$在$|a-a_0|<\delta$，$2\delta<\varepsilon$，$|a_0|\delta+\delta p_j(x_0)+\delta^2<\varepsilon$的条件下成立$(j=1,\cdots,m)$。这说明线性运算对此拓扑结构是连续的。而每一基邻域$V(x_0:p_1,\cdots,p_m;$

ε)是凸集，因此该空间是局部凸空间。当$p\in\Gamma$时，p在邻域$V(0:p;1)$上有界，所以P在V上（一致）连续。

反之，设τ是V上局部凸拓扑。V_0为0的τ-邻域；则V_0包含0的凸τ-邻域V_1；且V_1包含0的平衡τ-邻域V_2，于是包含V_2的凸壳V_3，所以$V_3\subseteq V_0$。因为V_3由所有的V_2的元素的有限凸组合$a_1x_1+\cdots+a_nx_n(a>0)$组成，它也是平衡的。$V_3$可以表达为形如$a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_{n-1}+a_nV_1$的集合的并，因此它是$\tau$_开集，从而完全由内点组成。现在我们建立$V$上的半范数$P$：不难证明当定义

$$p(x)=\inf\{c:c\in R,\ c>0,\ x\in cV_3\} \qquad (x\in V)$$

P是半范数，〔参看文献1：P9.1.1.5〕。且对于$y\in V_3$，当ε足够小时$y+\varepsilon y\in V_3$，所以$y\in(1+\varepsilon)^{-1}V_3$，故$p(y)\leqslant(1+\varepsilon)^{-1}<1$。反过来若有$z\in V$，$p(z)<1$，则有实数$c$使$0<c<1$且$z\in cV_3$；而$V_3$为凸集，$c^{-1}>1$且0，$c^{-1}z\in V_3$，故$z\in V_3$，因而$V_3=\{x\in V:P(x)<1\}$。故$p$是$\tau$-连续的。

让Γ_0是V上所有τ-连续半范数集。既然0的每一τ-邻域都包含一形如$\{x\in V:p(x)<1\}$的集合，$P\in\Gamma_0$，则对$x\in V$，当任一$P\in\Gamma_0$都有$p(x)=0$时，x就处在0的每一个τ_邻域中，因此$x=0$；这说明Γ_0分离V的点。而且，对$x_0\in V$，τ-邻域x_0+V_0包含集合$\{x_0+x:x\in V,p(x)<1\}=\{x\in V:p(x-x_0)<1\}=V_0(x_0:p,1)$。又$V_0(x_0:p_1,\cdots,p_m;\varepsilon)$在$p_1,\cdots,p\in\Gamma_0$及$\varepsilon>0$时是$x_0$的$\tau$-邻域，因为$p_1,\cdots,p$是$\tau$-连续的。由此得知集合$V(x_0:p_1,\cdots,p_n;\varepsilon)$形成$x_0$的$\tau$邻域基，从而命题得证。

推论：一个局部凸空间内存在由平衡凸集组成的0的邻

域基。

定理1.3： V_1与V_2是同一数域$K(=R$或$C)$上的局部凸空间，$\Gamma_i(i=1,2)$是定理1.2中的半范数族。(1) V_1上一个半范数p是连续的充要条件是存在一个正实数C和Γ_1中的有限个元素$p_1,\cdots,p_m$，使 $p(x)\leqslant C\max\{p_1(x),\cdots,P_m(x)\}\quad(x\in V_1)$

(2) 线性算子$T:V_1\to V_2$连续的充要条件是：$\forall q\in\Gamma_2$，存在有限个元素$p_1,\cdots,p\ \in\Gamma_1$和正实数$C$，使得 $q(Tx)\leqslant C\max\{p_1(x),\cdots,p\ (x)\}\quad(x\in V_1)$

(3) V_1上一个线性泛函ρ是连续的充要条件是存在一个正实数C和Γ_1中的有限个元$p_1,\cdots,p\ $，使 $|p(x)|\leqslant C\max\{p_1(x),\cdots,p_m(x)\}\quad(x\in V_1)$。

证明： (1) 如果p连续，集合$\{x\in V_1:p(x)<1\}$是V_1内0的邻域；则它包含一个基邻域$V(0:p_1,\cdots,p\ ;\ \varepsilon)$，这里$\varepsilon>0$，$p_1,\cdots,p_m\in\Gamma_1$。如果$x\in V_1$且$p(x)>\varepsilon^{-1}\max\{p_1(x),\cdots,p\ (x)\}$。可以假定$p(x)=1$且$p_j(x)<\varepsilon$（必要时可用$cx$取代$x$，$C$为适当正数）。则$P(x)=1$且$x\in V(0:p_1,\cdots,p\ ;\ \varepsilon)$，与前述假定矛盾，当取$C=\varepsilon^{-1}$时即得

$$p(x)\leqslant C\max\{p_1(x),\cdots,p\ (x)\}\quad(x\in V_1)。$$

反之，当上述条件满足时，p在$V(0:P_1,\cdots,P\ ;1)$上有界，故p在V_1上连续〔参看定理1.2推论2后〕。

(2) q是V_2上半范数，合成映射$q\cdot T$是V_1上半范数。当T连续时，$q\cdot T$连续。由(1)知满足

$q(Tx)\leqslant C\max\{p_1(x),\cdots,p_m(x)\}(x\in V_1)$的$C$及$p$存在。

反之，当上述条件满足时，由（1）知$q \cdot T$连续，V_2中0的每一个邻域V_{20}都包含一个基邻域$V(0: q_1, \cdots, q_m; \varepsilon)$，这里$\varepsilon > 0$，$q_1, \cdots, q_m \in \Gamma_2$。因$q \cdot T$连续$(i = 1, \cdots, m)$，集合$w = \{x \in V_1 : q(Tx) < \varepsilon (i = 1, \cdots, m)\}$是$V_1$内0的邻域且$T(w) \subseteq V(0: q_1, \cdots, q_m; \varepsilon) \subseteq V_{20}$。则T连续。（在0连续，从而在整个$V_1$上连续）。

（3） 只要将域K看成局部凸空间，（3）就是（2）的特例。

这一节的最后，我们讨论Hahn-Banach定理。

首先我们引入超平面的概念。R上向量空间V内的一个超平面是指形如$x_0 + V_0$的集合，这里$x_0 \in V$且V_0是V内余维数为1的线性子空间。可以证明V的一个子集H是超平面的充要条件，是它可以表达为$H = \{x \in V : \rho(x) = K\}$，这里$\rho$是V上非零线性泛函而$K \in R$〔参考文献2：P2-3，1.1.1〕

我们是要得出Hahn-Banach定理的一组结果中的主要结论，这组结果中有些开始的结论将列为以下两个引理，其证明可参看文献2：P4、P7：1.1.2及1.1.4。

引理1：Y与Z是实向量空间V的两个非空不交凸子集，它们当中至少有一个有内点，它们可以被V中一超平面H分离。如果Y与Z中有一个完全由内点组成，它就包含在由H确定的一个开半空间内。如果Y与Z两个都由内点组成，它们严格地被H分离。

由超平面$H = \{x \in V \rho(x) = k\}$确定了两个闭半空间$\{x \in V \rho(x) \geqslant k\}$及$\{x \in V \rho(x) \leqslant k\}$。当Y与Z分别属于这两个空间时称为被H分离。若分别属于开半空间$\{x \in V : \rho(x)$

$>k\}$及$\{x\in V: \rho(x)<k\}$，就说是被严格分离的。

引理2： 上引理中当V是复空间时，就有V上非零线性泛函ρ及实数k，使得

$$R_e\rho(y)\geqslant k\geqslant R_e\rho(z)\quad (y\in Y,\ z\in Z)。$$

当Y或Z由内点组成时，相应的不等式中没有等号。

现在我们先给出Hahn-Banach分离定理。

定理1.4： 如果Y与Z是线性拓扑空间V的非空不交凸子集，则有V上连续线性泛函ρ及实数k使 $\mathrm{Re}\rho(y)\geqslant k\geqslant \mathrm{Re}\rho(z)\quad (y\in Y,\ z\in Z)$。

当Y或Z为开集时不等式中没有等号。

证明： 首先从引理2得知存在满足上述不等式的ρ。再根据定理1.1推论2后的说明，知ρ是连续的。

定理1.5： 如果Y和Z是一个局部凸空间V的不交非空闭凸子集，它们当中至少有一个是紧集，则有实数a、b和V上的连续线性泛函ρ，使得 $\mathrm{Re}\rho(y)\geqslant a>b\geqslant \mathrm{Re}\rho(z)\quad (y\in Y,\ z\in Z)$。

证明： 设Y为紧集。对每一个$y\in Y$，都存在一个0的平衡凸邻域V_y，使得$(y+V_y)\cap Z=\phi$。Y的开复盖$\{y+\frac{1}{3}V_y: y\in Y\}$有有限子复盖$\{y_{(j)}+\frac{1}{3}V_{y(j)}: j=1,\cdots,m\}$，集合$V=\bigcap_{j=1}^{m}\frac{1}{3}V_{y(j)}$是0的平衡凸邻域。

凸集$Y+V$和$Z+V$是开集，如$Y+V=\bigcup\{y+V: y\in Y\}$。它们也是不交的，事实上，如果不这样，可以选择$y\in Y$，$z\in Z$且$v_1$，$v_2\in V$，使$y+v_1=z+v_2$。对某个j，$y\in y_{(j)}+\frac{1}{3}V_{y(j)}$且$v_1-v_2\in V\subseteq\frac{1}{3}V_{y(j)}$，于是

$$z=y+v_1-v_2\in y(j)+\frac{1}{3}V_{y(j)}+\frac{1}{3}V_{y(j)}\subseteq y(j)+V_{y(j)},$$ 与前面的断言$Z\cap(y(j)+V_{y(j)})=\phi$矛盾。

由定理1.4有V上连续线性泛函ρ和实数k，使 $\mathrm{Re}\rho(y)>k>\mathrm{Re}\rho(z)$ $(y\in Y+V_0,\ z\in Z+V_0)$，特别是此不等式在$y\in Y$和$z\in Z$时也成立。因为Y是紧集，由$g(y)=\mathrm{Re}\rho(y)$定义的连续函数在点$y_0\in Y$达到其下界。因为

$\mathrm{Re}\rho(y)\geqslant\mathrm{Re}\rho(y_0)>k>\mathrm{Re}\rho(z)$ $(y\in Y,\ z\in Z)$取$a=\mathrm{Re}\rho(y_0)$，$b=k$即可。

推论1： x是局部凸空间V的非零向量，则有V上连续线性泛函ρ使得$\rho(x)\neq 0$。

证明： 于定理中取$Y=\{x\}$及$Z=\{0\}$即得。

推论2： Z是局部凸空间V的闭凸子集，$y\in V\setminus Z$，则有V上连续线性泛函ρ及实数b，使得$\mathrm{Re}\rho(y)>b$，$\mathrm{Re}\rho(z)\leqslant b$ $(z\in Z)$。

证明： 于定理中取$Y=\{y\}$即可。

推论3： Z是局部凸空间V的闭子空间，$y\in V\setminus Z$，则有V上连续线性泛函ρ，使得

$\rho(y)\neq 0$，$\rho(z)=0$ $(z\in Z)$。

证明： 于推论2中，$\mathrm{Re}\rho(z)\leqslant b$意味着在Z上的线性泛函$\rho|z$的值域不是整个数域，因此

$\rho|z=0$，$b\geqslant 0$，从而$\mathrm{Re}\rho(y)>b\geqslant 0$，即$\rho(y)\neq 0$。

下面我们给出Hahn-Banach扩张定理。

定理1.6： 如果ρ_0是局部凸空间V的子空间V_0上的连续线性泛函，存在V上的连续线性泛函ρ，使得$\rho|v_0=\rho_0$

证明： 让Γ是定理1.2中的半范数族。把Γ的每一个元