◎新课程学习能力评价课题研究资源用书

◎主编 刘德 林旭 编写 新课程学习能力评价课题组

中国教育学会《中国教育学刊》推荐学生用书

学习高手

状元塑造车间

学习技术化

TECHNOLOGIZING STUDY

配沪科版

数学 八年级下册

推开这扇窗

- 全解全析
- 高手支招
- 习题解答
- 状元笔记

光明日报出版社

新课程学习能力评价课题研究资源用书

学习高手

状元塑造车间

主　编　刘　德　林　旭
本册主编　耿迎房　张涛武
本册副主编　张新枝　毛先锋

数学 八年级下册

配沪科版

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

学习高手.数学.八年级.下册/刘德,林旭主编.—北京:光明日报出版社,2009.11
配沪科版
ISBN 978-7-5112-0246-8

Ⅰ.学… Ⅱ.①刘… ②林… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第159728号

学习高手
数学/八年级下册(沪科版)

主　　编:刘　德　林　旭

责任编辑:温　梦
策　　划:聂电春　　责任校对:徐为正
版式设计:邢　丽　　责任印制:胡　骑

出版发行:光明日报出版社
地　　址:北京市崇文区珠市口东大街5号,100062
电　　话:010—67078249(咨询)
传　　真:010—67078255
网　　址:http://book.gmw.cn
E — mail:gmcbs@gmw.cn
法律顾问:北京市华沛德律师事务所张永福律师

印　　刷:淄博鲁中晨报印务有限公司
装　　订:淄博鲁中晨报印务有限公司
本书如有破损、缺页、装订错误,请与本社发行部联系调换。

开　　本:890×1240　1/32
字　　数:260千字　　印　　张:9
版　　次:2009年11月第1版　　印　　次:2009年11月第1次
书　　号:ISBN 978-7-5112-0246-8

定价:15.90元

目录

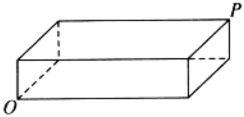
第 17 章　二次根式

本章要点导读

BENZHANG YAODIANDAODU

知识要点	课标要求	学习策略
二次根式的概念	了解二次根式的概念，并会利用$\sqrt{a}(a\geqslant0)$解决一些简单问题.	在运用概念解题时，一定要抓住$a\geqslant0$这一必然条件.
$(\sqrt{a})^2=a$ $(a\geqslant0)$	理解$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$，并能利用它进行计算和化简.	注意$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$可以写成：$a=(\sqrt{a})^2(a\geqslant0)$的形式.
$\sqrt{a^2}=\|a\|$	理解$\sqrt{a^2}=\|a\|$，并能利用它进行计算和化简.	1. 公式中的a可以是任意数； 2. 和公式$(\sqrt{a})^2=a$有区别也有联系.
最简二次根式	理解最简二次根式的定义并会灵活运用.	注意：判断最简二次根式的条件 1. 被开方数中不含有分母； 2. 被开方数中不含有开的尽方的因式； 两个条件缺一不可.
二次根式的乘除	理解$\begin{cases}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant0,b>0)\\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)\end{cases}$及其逆用.	注意逆用，即：$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0,b\geqslant0)$ $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$
同类二次根式	理解同类二次根式，并能在化成最简二次根式后，找出同类二次根式.	1. 化成最简二次根式后，再确定同类二次根式； 2. 只要被开方数相同即可.
二次根式的加减及混合运算	1. 理解二次根式的加减就是合并同类二次根式； 2. 掌握二次根式的混合运算.	1. 进行运算时，要先化成最简二次根式； 2. 运算顺序和整式的运算顺序完全相同.

17.1 二次根式



众所周知，托尔斯泰是享誉世界的大文豪．有一次托尔斯泰打扫房间，发现一只壁虎在房间地面上的一角的 O 点，紧盯着天花板上另一角的 P 点的一只苍蝇垂涎欲滴，如图所示，那么它如何行动才能尽快捕到猎物呢？快来认真学习本节内容吧，学完后你就会知道准确答案了．

高手支招① 细品教材

一、二次根式的概念 ★

当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}$是有意义的，它表示 a 的算术平方根，我们把形如$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的式子叫做二次根式．像$\sqrt{2}$、$\sqrt{a^2+1}$等都是二次根式．其中“$\sqrt{\ }$”叫做二次根号，二次根号下的“a”叫做被开方数．

【示例】下列各式哪些是二次根式，哪些不是，并说明理由．

(1)$\sqrt{5}$；(2) $\sqrt{-2}$；(3) $\sqrt{-2a}(a<0)$．

思路分析：二次根式必须满足两个条件：①含有“$\sqrt{\ }$”；②被开方数是非负数．显然(1)、(3)都符合条件，只有(2)被开方数小于零，不符合条件．

解：(1)、(3)是二次根式．

状元笔记

1．二次根式必须含有“$\sqrt{\ }$”，但是含有“$\sqrt{\ }$”的式子不一定是二次根式，必须满足被开方数大于或等于零才是二次根式．

2．二次根式的被开方数可以是数，也可以是代数式，如果是数，必须是非负数，如果是代数式，则这个代数式的值必须是非负数．

二、二次根式的性质 ★★★

1. $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$．

根据平方根的定义，若 $x^2=a$，则 x 是 a 的平方根．反之，如果 x 是 a 的平方根，则有 $x^2=a$．因为$\sqrt{a}$是 a 的一个平方根，所以$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$．

2. $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$

【示例 1】计算：$\sqrt{(-3)^2}$．

状元笔记

1．$\sqrt{a}$表示 a 的算术平方根，所以总有$\sqrt{a}\geqslant 0$．

2．化简 $\sqrt{a^2}$ 时，一定要先化为$|a|$，再根据 a 的范围确定结果，这样可以减少错误的发生．

思路分析：根据$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0)\end{cases}$进行化简.

解：$\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$.

【示例 2】化简：$\frac{2}{x-1}\cdot\sqrt{x^2-2x+1}(x<1)$.

思路分析：$\sqrt{x^2-2x+1}$变形为$\sqrt{(x-1)^2}$，再由$\sqrt{a^2}=|a|$，得$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.

又因为$x<1$，所以$\sqrt{x^2-2x+1}=1-x$，

故原式$=\frac{2}{x-1}\cdot(1-x)=-2$.

解：原式$=\frac{2}{x-1}\cdot\sqrt{(x-1)^2}=\frac{2}{x-1}\cdot|x-1|$.

因为$x<1$，所以$|x-1|=1-x$.

所以原式$=\frac{2}{x-1}\cdot(1-x)=-2$.

高手支招② 归纳整理

本节主要内容包括二次根式的概念和基本性质.二次根式的概念是在解决实际问题的过程中复习算术平方根的定义时引出的，对于概念只要了解形如$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的式子叫做二次根式就行了，重点是理解二次根式的基本性质：$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$是一个非负数，它的平方等于a及$\sqrt{a^2}$的化简.

二次根式
- 定义：当____①____时，$\sqrt{a}$是有意义的.它表示a的____②____.
  我们把形如____③____的式子叫做二次根式
- 性质
  - $(\sqrt{a})^2=$____④____
  - $\sqrt{a^2}=$____⑤____

答案

①$a\geqslant 0$　②算术平方根　③$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$　④$a(a\geqslant 0)$　⑤$|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0)\end{cases}$

高手支招③ 典例精析

一、基础知识题型

【例 1】当 x 取何值时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{4-3x}$；(2) $\sqrt{(3-x)^2}$；(3) $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.

思路分析：二次根式的被开方数必须是非负数，如果分母中含有字母，则字母的取值不能使分母为零.

解：(1)由 $4-3x\geqslant 0$ 得 $x\leqslant\frac{4}{3}$，故当 $x\leqslant\frac{4}{3}$ 时，$\sqrt{4-3x}$ 在实数范围内有意义.

(2)因为无论 x 取何值，总有 $(3-x)^2\geqslant 0$，所以 x 取任意实数，$\sqrt{(3-x)^2}$ 都有意义.

(3)由 $x-1\geqslant 0$ 且 $x-1\neq 0$ 得 $x>1$，所以当 $x>1$ 时，$\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ 在实数范围内有意义.

技术化提示 二次根式的被开方数必须是非负数，因为负数没有平方根.

【例 2】当 $m<3$ 时，$\sqrt{(m-3)^2}=$ ________.

思路分析：根据 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$

解：$\because m<3$，$\therefore m-3<0$. $\therefore\sqrt{(m-3)^2}=|m-3|=3-m$.

技术化提示 若 $\sqrt{a^2}=a$，则 $a\geqslant 0$；若 $\sqrt{a^2}=-a$，则 $a\leqslant 0$，一定不要漏掉 a 可以等于零这个条件. 化简形如 $\sqrt{a^2}$ 的二次根式，一定要先化为 $|a|$，再根据字母 a 的取值范围来求值.

【例 3】计算：$\sqrt{x^2y^2}(x>0,y<0)$.

错解：$\sqrt{x^2y^2}=\sqrt{(xy)^2}=xy$.

错解分析：上述解法的错误之处在于忽略了根式中字母的限制条件，应根据 $\sqrt{a^2}=|a|$ 去分析，确定 a 的取值范围后，再得出计算结果.

正解：$\because x>0,y<0$，$\therefore xy<0$. $\therefore\sqrt{x^2y^2}=\sqrt{(xy)^2}=|xy|=-xy$.

二、综合拓展题型

【例 4】在实数范围内分解因式：(1) x^4-4；(2) x^3-3x.

思路分析：分解因式一般先考虑用提公因式法，再用公式法分解，要分解到

每个因式都不能再分解为止.

解：(1)$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$；

(2)$x^3-3x=x[x^2-(\sqrt{3})^2]=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

技术化提示 有理数扩大到实数后，任何一个正有理数都可以写成一个根式的平方的形式，原来有些不能分解的因式可以分解了，注意必须把每个因式分解到不能再分解为止.

【例5】已知$1\leqslant x\leqslant 3$，化简$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

思路分析：要将二次根式$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$化简，应先将被开方数分解因式，再根据$x$的取值范围，判断出被开方数的底数是非负数、非正数、正数还是负数，然后运用公式$\sqrt{a^2}=|a|$进行化简.

解：$\because 1\leqslant x\leqslant 3$，$\therefore x-1\geqslant 0$，$x-3\leqslant 0$. $\therefore \sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x-1|+|x-3|=x-1+3-x=2$.

技术化提示 利用性质$\sqrt{a^2}=|a|$进行化简时，一定要先判断a的取值范围，再去掉绝对值符号.

三、探究创新题型

【例6】若$a^2+\sqrt{b-2}=4a-4$，试求$\sqrt{ab}$的值.

思路分析：认真观察可以发现，移项后a^2-4a+4可以化为完全平方式，这样通过巧妙变形把原式化为了两个非负数的和等于零的形式，使问题转化为解简单的方程组的问题.

解：$\because a^2+\sqrt{b-2}=4a-4$，$\therefore a^2-4a+4+\sqrt{b-2}=0$.

$\therefore (a-2)^2+\sqrt{b-2}=0$.

又$(a-2)^2\geqslant 0$，$\sqrt{b-2}\geqslant 0$，$\therefore \begin{cases} a-2=0, \\ b-2=0. \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=2, \\ b=2. \end{cases}$

$\therefore \sqrt{ab}=\sqrt{2\times 2}=\sqrt{2^2}=2$.

技术化提示 几个非负数的和等于零，则每个数必为零.

高手支招④ 链接中考

二次根式的定义与性质是中考的常考内容，主要考查二次根式的被开方数的非负性及利用二次根式的性质进行化简或计算，考查形式以填空题、选

择题为主. 分值一般 3 分左右. 学习这部分内容时，注意根据平方根的意义理解根式的定义，理解记住根式的性质公式及其应用条件. 明确任何一个正有理数都可以写成一个数的平方的形式，特别注意算术平方根等于本身的数和等于其相反数的数都包含零.

【例 1】(河北)在实数范围内$\sqrt{x}$有意义，则 x 的取值范围是 …………（　　）

A. $x\geqslant 0$　　B. $x\leqslant 0$　　C. $x>0$　　D. $x<0$

答案：A

点拨 二次根式的被开方数必须是非负数，即 $x\geqslant 0$.

【例 2】(福建莆田)若 $\sqrt{(a-3)^2}=3-a$，则 a 与 3 的大小关系是 ……（　　）

A. $a<3$　　B. $a\leqslant 3$　　C. $a>3$　　D. $a\geqslant 3$

答案：B

点拨 因为 $\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|$，当 $a-3\leqslant 0$ 时，$|a-3|=3-a$. 所以，解得 $a\leqslant 3$.

高手支招⑤ 思考发现

1. 判断一个式子是不是二次根式，必须同时满足两个条件：(1)必须含有“$\sqrt{\ }$”；(2)被开方数是非负数，两个条件缺一不可.

2. 利用性质 $\sqrt{a^2}=|a|$化简时，一定要先判断 a 的取值范围，再根据 a 的正负性去掉绝对值符号.

3. 求代数式中字母的取值范围应考虑：①二次根式的被开方数大于或等于零；②分母的值不能为零；③零指数幂、负整数指数幂的底数不等于零.

4. 在逆用 $\sqrt{a^2}=|a|$时，若 $\sqrt{a^2}=a$，则 $a\geqslant 0$，若 $\sqrt{a^2}=-a$，则 $a\leqslant 0$，解题时注意不要漏掉 $a=0$ 的情况.

5. 因为无论 a 取何值，总有 $a^2+1>0$，所以 $\sqrt{a^2+1}$总有意义.

6. 已知中被开方数含有字母的二次根式，隐含着被开方数大于或等于零的条件，从而可以确定其中字母的取值范围.

高手支招⑥ 体验成功

基础巩固

1. 下列各式是二次根式的有 ……………………………………………………（　　）

(1)$\sqrt{\frac{1}{3}}$;(2) $\sqrt{-3}$;(3)$-\sqrt{x^2+1}$;(4)$\sqrt{8}$;(5)$\sqrt{(-\frac{1}{3})^2}$;(6) $\sqrt{1-x}(x>1)$;(7) $\sqrt{x^2+2x+3}$.

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

2. 若$\sqrt{\frac{3}{x-1}}$是二次根式,那么 x 的取值范围是 ……………………… (　　)

A. $x\geqslant1$　　B. $x\leqslant1$　　C. $x>1$　　D. $x<1$

3. 当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,在实数范围内有意义的式子是 ……………………… (　　)

A. $\sqrt{3x-1}$　　B. $\sqrt{1-3x}$

C. $\sqrt{x(1-x)}$　　D. $\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

4. 若式子 $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$有意义,则 x 的取值范围是 ……………………… (　　)

A. $x\leqslant2$ 或 $x\geqslant1$　　B. $x\leqslant2$　　C. $1\leqslant x\leqslant2$　　D. $x\geqslant1$

5. 若 a、b 是实数,则下列各式中一定能成立的等式是 ……………………… (　　)

A. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b$　　B. $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=a+b$

C. $\sqrt{(a^2+b^2)^2}=a^2+b^2$　　D. $\sqrt{(a+b)^2}=a+b$

6. (湖南湘西)对于任意不相等的两数 a、b,定义一种运算※如下:$a※b=\frac{\sqrt{a+b}}{a-b}$,如 $3※2=\frac{\sqrt{3+2}}{3-2}=\sqrt{5}$,那么 $12※4=$________.

7. 化简:$\frac{\sqrt{-xy^3}}{y}$.

8. 已知 $x=\frac{\sqrt{7}+2}{2}$, $y=\sqrt{7}-2$, 求代数式 $(y-2x)\sqrt{\frac{1}{2x-y}}-(2x+y)\sqrt{x^2-xy+\frac{1}{4}y^2}$.

综合应用

9. 比较 $\sqrt{14}-\sqrt{13}$与 $\sqrt{13}-\sqrt{12}$的大小.

10. 已知$|a+b+10|+\sqrt{ab-12}=0$,求 a^2+b^2 的值.

11. 已知 $5\sqrt{a+1}+\sqrt{b-1}=0$,求 $a^{2008}+(a+b)^{2009}$.

探究创新

12. 有一列数:$\sqrt{2},\sqrt{6},2\sqrt{3},2\sqrt{5},\sqrt{30},\sqrt{42},2\sqrt{14},\cdots$,则第 24 个数是多少?第 n 个数是多少?

答案与点拨

1. D

2. C 点拨：$\sqrt{\dfrac{3}{x-1}}$是二次根式，则$\dfrac{3}{x-1}\geqslant 0$，且分母$x-1\neq 0$，故$x-1>0$，即$x>1$.

3. C 4. C

5. C 点拨：∵a,b为任意实数，而选项A中，$a\geqslant 0,b\geqslant 0$，故A错. 选项B中，若$a,b$是负数，则式子左边是非负数，右边是负数，故B错. 选项D同B，若a,b为负数，则不成立.

6. $\dfrac{1}{2}$ 点拨：由已知可得：$12※4=\dfrac{\sqrt{12+4}}{12-4}=\dfrac{\sqrt{16}}{8}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

7. 解：∵ $\sqrt{-xy^3}\geqslant 0$，∴ $-xy^3\geqslant 0$. ∴ $xy^3\leqslant 0$. ∴ x、y符号为异号，原式$=\dfrac{|y|\sqrt{-xy}}{y}$. 当$y>0$时，原式$=\sqrt{-xy}$. 当$y<0$时，原式$=-\sqrt{-xy}$.

点拨：注意二次根式$\sqrt{a}$中，$a\geqslant 0$这一条件. 所以$-xy^3=(-xy)\cdot y^2\geqslant 0$.

8. 解：$y-2x=\sqrt{7}-2-2\times\dfrac{\sqrt{7}+2}{2}=\sqrt{7}-2-\sqrt{7}-2=-4$，∴$2x-y=4$，$x-\dfrac{1}{2}y=2$，$2x+y=2\sqrt{7}$. 原式$=(y-2x)\sqrt{\dfrac{1}{2x-y}}-(2x+y)\sqrt{(x-\dfrac{1}{2}y)^2}=-4\times\sqrt{\dfrac{1}{4}}-2\sqrt{7}\times\sqrt{2^2}=-2-4\sqrt{7}$.

9. 解：∵$\dfrac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{13}}=\sqrt{14}+\sqrt{13}$，$\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{12}}=\sqrt{13}+\sqrt{12}$，而$\sqrt{14}+\sqrt{13}>\sqrt{13}+\sqrt{12}$，∴$\dfrac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{13}}>\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{12}}$. ∴ $\sqrt{14}-\sqrt{13}<\sqrt{13}-\sqrt{12}$.

点拨：比较两个无理数的大小时，可用比值法、平方法、取倒数法来比较.

10. 解：∵ $|a+b+10|\geqslant 0$，$\sqrt{ab-12}\geqslant 0$，由已知$|a+b+10|+\sqrt{ab-12}=0$可得：$\begin{cases}a+b+10=0,\\ ab=12,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a+b=-10,\\ ab=12.\end{cases}$ ∵$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$，∴$a^2+b^2=100-24=76$.

点拨：注意$|a|$，$\sqrt{a}$，a^2表示的都是非负数，在解题过程中，要注意解题技巧，例如本题中，就不必求出a和b的值，那种作法更麻烦.

11. 解：∵ $\sqrt{a+1}\geqslant 0$，$\sqrt{b-1}\geqslant 0$，∴$a+1=0$，$b-1=0$，解得：$a=-1$，$b=1$.

∴$a^{2\,008}+(a+b)^{2\,009}=(-1)^{2\,008}+0^{2\,009}=1$.

点拨：由 $\sqrt{a+1}\geqslant 0$，$\sqrt{b-1}\geqslant 0$ 和已知，可直接求出 a 与 b 的值.

12. 解：该数列可化成以下形式：$\sqrt{2}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{12}$，$\sqrt{20}$，$\sqrt{30}$，$\sqrt{42}$，$\sqrt{56}$，… 仔细观察会发现：$\sqrt{2}=\sqrt{1\times 2}$，$\sqrt{6}=\sqrt{2\times 3}$，$\sqrt{12}=\sqrt{3\times 4}$，$\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}$，$\sqrt{30}=\sqrt{5\times 6}$，$\sqrt{42}=\sqrt{6\times 7}$，$\sqrt{56}=\sqrt{7\times 8}$，… 于是第 n 项应为 $\sqrt{n(n+1)}$，∴ 第 24 项是 $\sqrt{24\times 25}=\sqrt{4\times 25\times 6}=10\sqrt{6}$. 第 n 项为 $\sqrt{n(n+1)}$.

点拨：像这样的规律猜想题，关键是化成统一形式，然后从和、差、积、商等方面寻找规律.

STS

数学符号的起源

数学除了记数以外，还需要一套数学符号来表示数和数、数和形的相互关系.

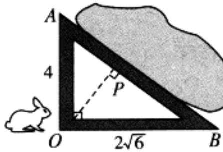
数学符号的发明和使用比数字晚，但是数量多得多. 现在常用的有 200 多个，初中数学书里就不下 20 种. 它们都有一段有趣的经历.

例如加号曾经有好几种，现在通用的是“+”. “+”是由拉丁文“et”（“和”的意思）演变而来的. 十六世纪，意大利科学家塔塔里亚用意大利文“più”（加的意思）的第一个字母表示加，草书写为“μ”，最后都变成了“+”.

“−”号是从拉丁文“minus”（“减”的意思）演变来的，简写 m，再省略掉字母，就成了“−”了. 也有人说，卖酒的商人用“−”表示酒桶里的酒卖了多少. 之后，当把新酒灌入大桶的时候，就在“−”上加一竖，意思是把原线条勾销，这样就成了个“+”号.

平方根号曾经用拉丁文“Radix”（根）的首尾两个字母合并起来表示. 十七世纪初，法国数学家笛卡儿在他的《几何学》中，第一次用“$\sqrt{\ }$”表示根号.

17.2　二次根式的运算



如图，一只兔子在两条交叉垂直路口处 O 点被一位猎人发现. 兔子为了尽快逃避猎人的追捕，抄近路走空地穿过，逃往草地. 由点到直线的最短距离公理，可知兔子逃跑的最短距离是线段 OP 的长度.

那么如何求这个最短距离呢？学完本节内容后，你就会求了.

高手支招① 细品教材

一、二次根式的乘法 ★★

性质 3：如果 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$，则有 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$. 被开方数相乘所得的积作为积的被开方数，相乘的结果仍然是一个二次根式或一个有理式.

这个性质可推广到多个二次根式相乘，如 $\sqrt{a}\sqrt{b}\cdots\sqrt{p}=\sqrt{ab\cdots p}(a\geqslant0,b\geqslant0,\cdots,p\geqslant0)$. 利用这个性质可进行简单的二次根式计算.

性质 3 也可以写成 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$，也就是说积的算术平方根等于积中各因式的算术平方根的积.

在这个性质中，a、b 可以是数，也可以是代数式. 无论是数，还是代数式，都必须满足 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$. 只有满足这个条件，才能运用这个性质进行计算或化简；如果不满足这个条件，等式右边就没有意义了，等式也就不成立了.

状元笔记

1. 性质 3 中的被开方数 a，b 一定是非负数. 当多个二次根式相乘时，可将所有二次根式的被开方数相乘，用它们的积作为积的被开方数. 若被开方数积的结果能写成完全平方数的要化简.

2. 如果一个二次根式的被开方数（式）中有开得尽方的因数或因式，可用 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$ 和公式 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$，将这些因数或因式移到根号外，达到化简的目的.

【示例 1】计算：(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{15}$；(2) $\sqrt{\frac{1}{4}}\times\sqrt{144}$.

思路分析：利用性质 3，便可得计算结果.

解：(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{15}=\sqrt{3\times15}=\sqrt{45}=\sqrt{3^2\times5}=3\sqrt{5}$.

(2) $\sqrt{\frac{1}{4}}\times\sqrt{144}=\sqrt{\frac{1}{4}\times144}=\sqrt{36}=6$.

【示例 2】化简：$\sqrt{-xy^3}$.

思路分析：由于题目中没有给出字母的取值范围，因此，我们必须按不同的取值范围来分别讨论.(1)当 $x\geqslant0,y\leqslant0$ 时；(2)当 $x<0,y>0$ 时.

解：(1)当 $x\geqslant0,y\leqslant0$ 时，$\sqrt{-xy^3}=\sqrt{y^2(-xy)}=|y|\sqrt{-xy}=-y\sqrt{-xy}$；

(2)当 $x<0,y>0$ 时，$\sqrt{-xy^3}=\sqrt{y^2(-xy)}=|y|\sqrt{-xy}=y\sqrt{-xy}$.

二、二次根式的除法 ★★

性质 4：如果 $a\geqslant0,b>0$，则有 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$. 这说明：两个二次根式相除，把被开方数相除所得的商作为商的被开方数，并将所得结果化简. 利用这个性质和分式的基本性质可把分母中的根号去掉.

性质 4 也可以写成 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0,b>0)$. 也就是说商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根.

在运用商的算术平方根的性质解决相关计算问题时，要注意成立的条件：即被开方数的分子为非负数，分母为正数.

状元笔记

1. 两个二次根式相除，被开方数必须为非负数；又因为分母不能为零，所以分子的被开方数与分母的被开方数取值范围是不同的，分子可为非负数，分母只能为大于零的正数.

2. 在进行二次根式的乘除运算时，要按照运算顺序从左到右依次计算，若有括号应先算括号里面的.

【示例】计算：(1) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$；(2) $\sqrt{\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{24}}$.

思路分析：根据二次根式的除法，如果被开方数是完全平方数，就需要化简.

解：(1) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{21}{7}}=\sqrt{3}$；(2) $\sqrt{\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{24}}=\sqrt{\frac{2}{3}\div\frac{1}{24}}=\sqrt{\frac{2}{3}\times24}=\sqrt{16}=4$.

三、最简二次根式 ★★

1. 二次根式运算的结果，一定要化简，满足下列两个条件的二次根式叫做最简二次根式.

(1)被开方数的因数是整数，因式是整式；

(2)被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

化简二次根式，就是要把二次根式化成最简二次根式.

2. 化简二次根式的一般步骤

(1)被开方数是带分数的要化成假分数；

状元笔记

化简二次根式的目的是为了简化计算过程，提高二次根式计算的准确率. 因此在进行二次根式的计算时，首先必须判别一个二次根式是不是最简二次根式，如果不是，应将它化简，然后才能计算.

(2)被开方数是小数的要化成分数；

(3)被开方数是多项式的要进行分解因式；

(4)被开方数是能开得尽方的因数或因式时，一定要将能开得尽方的因数或因式的算术平方根开到根号外.

【示例1】化简：(1)$\sqrt{6\frac{1}{4}}$；(2)$\sqrt{\frac{25a^4}{b^2}}(b>0)$.

思路分析：先看二次根式有什么特征，再根据它的特征进行化简.对于(1)，它的被开方数是一个带分数，应先将其化成假分数，再利用二次根式的除法化简；对于(2)可直接利用$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0,b>0)$化简.

解：(1)$\sqrt{6\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}$；(2)$\sqrt{\frac{25a^4}{b^2}}=\frac{\sqrt{25a^4}}{\sqrt{b^2}}=\frac{5a^2}{b}$.

【示例2】化简：$a\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

思路分析：由题意可知$a<0$，$a\sqrt{-\frac{1}{a}}=a\cdot\frac{1}{\sqrt{-a}}=a\cdot\frac{\sqrt{-a}}{(\sqrt{-a})^2}=a\cdot\frac{\sqrt{-a}}{-a}=-\sqrt{-a}$.

解：由已知可知$a<0$，所以$-a>0$. $a\sqrt{-\frac{1}{a}}=a\cdot\frac{1}{\sqrt{-a}}=a\cdot\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}}=a\cdot\frac{\sqrt{-a}}{-a}=-\sqrt{-a}$.(本题还有其他解法，请同学们自己考虑.)

四、同类二次根式 ★★

几个二次根式化成最简二次根式以后，如果被开方数相同，这几个二次根式叫做同类二次根式.如$2\sqrt{3}$和$5\sqrt{3}$，$\frac{1}{2}\sqrt{5}$和$\sqrt{5}$都是同类二次根式.

同类二次根式是指两个或两个以上的二次根式，在没有化成最简二次根式之前，无法判断两个二次根式是不是同类二次根式，因此，化成最简二次根式是判断同类二次根式的前提条件.

同类二次根式要同时满足两个条件：①是二次根式；②化成最简二次根式后，被开方数相同.

对于那些不是最简二次根式的二次根式，不能轻易断定它们是不是同类二次根式，如$\sqrt{75}$和$\sqrt{\frac{1}{27}}$，必须先将它们化成最简二次根式，再看每个二次根式的被开方数是否相同，若被开方数相同，则它们就是同类二次根式.