

根据国家教育部 2001 年 — 2002 年新大纲编著的权威版本



全国成人高考专升本统考科目

考试教程及全真模拟试卷精选



中华工商联合出版社

根据国家教育部 2001 年—2002 年新大纲编著的权威版本

全国成人高考**专升本**统考科目
考试教程及全真模拟试卷精选

高等数学(一)

专升本考试试题研究组 编审
北京理工大学 田向军 编写

中华工商联合出版社

责任编辑:李智善

封面设计:李笃平

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)/田向军编著. —北京:中华工商联合出版社, 2000. 9

(全国成人高考专升本统考科目考试教程及全真模拟试卷精选)

ISBN 7-80100-709-3

I. 高... II. 田... III. 高等数学-成人教育-高等教育-入学考试-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 69555 号

中华工商联合出版社 出版、发行

北京东城区东直门外新中街 11 号

邮编:100027 电话:64153909

河北涿州蕴铂印刷有限责任公司

新华书店总经销

787×1092 毫米 1/16 印张 14.75 360 千字

2000 年 9 月第 1 版 2000 年 9 月第 1 次印刷

印数:1-6000 册

ISBN 7-80100-709-3/G·247

全套定价:198.40 元

本册定价:24.80 元

前 言

本丛书严格根据教育部 2000 年 6 月颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》精编而成。

本套丛书由具有多年教学经验,从事成人高考辅导的教师以及相关学科的学者、专家成立专门的研究组,以大纲为依据编审而成,是为帮助报考各类成人高等学校专科起点本科班(即专升本)考生准备的。根据 2000 年 6 月颁布的新大纲精神,专升本统考科目涉及以下 8 种科目:政治、英语、教育理论、大学语文、高等数学(一)、高等数学(二)、民法、艺术概论。(统考科目及所辖专业范围见附表)

本书分为“考试大纲应试教程”及“全真模拟试卷精选”两大部分。其中“考试大纲应试教程”严格遵循最新考试大纲要求,每门课均以章为单位进行编写,每章内容包括:【知识结构】、【命题精要】、【考点精练】、【参考答案】,利于考生在最短的时间里迅速掌握考试大纲所要求考查的内容。而“全真模拟试卷精选”部分则适宜于各“成人高考(专升本)辅导班”教师考核和检测学生复习效果之用或学生自测自练之用。每门课均有五套以上模拟试卷,切题率高,预测性强,另外本书还附有历年试题、最新考试大纲、考试样题等考生必备资料和国家教育部最新要求。

因此,本丛书具有“新、全、真、快”等四大显著特点。

1. **新**:严格按照最新专升本复习考试大纲的要求,结合全国各有关大学的成教学院举办的专升本考试辅导班授课经验和评阅试卷经验以及对历年考试试题的分析、研究,掌握专升本命题的思路、方法和原则,从而就能把握专升本命题的新动向。

2. **全**:在编写本丛书的过程中,即注重知识的系统性,又突出要点、难点、考点,并且节节把关,章章细审,逐项验收,力求做到不多、不重、不漏。考生通过做各章的练习题及书后的全真模拟试卷,能及时发现自己的薄弱环节,查缺补漏,直至验收合格。

3. **真**:每种均为专家编写,题型、题量及难易程度均与全国统考试题一致,少数练习题与模拟试题还略比统考试题难,这样,有利于考生考前熟悉考试题型,从容走进考场,答题有的放矢,思路畅通。

4. **快**:针对性强,切题率高,短期复习见效特别快。这一显著特点将被您的专升本考试成绩所证实。

由于具备以上四个显著特点,本丛书将成为北京、天津、上海、石家庄、济南、武汉、南京、杭州、西安、成都、长沙等众多城市中近百所大学的成人教育学院专升本辅导班的首选教材。

附表：

专科起点升本科统考科目所辖专业范围一览表

类别	适用招生专业范围(按学科门类划分)	统 考	科 目
		师范类考生	非师范类考生
A	哲学 文学 历史学 医学(仅限中医学类)	英语 教育理论 大学 语文(艺术概论) ^①	政治 英语 大学语文 (艺术概论) ^①
B	理学 ^② 工学 医学(除中医学类外)	英语 教育理论 高等 数学(一)	政治 英语 高等数学 (一)
C	经济学 教育学 ^③ 农学 管理学	英语 教育理论 高等 数学(二)	政治 英语 高等数学 (二)
D	法学		政治 英语 民法

备注①A 中,报考艺术类专业考生考艺术概论,不考大学语文。

②报考生物科学(专业代码 070401)、地理科学(专业代码 070701)、环境科学(专业代码 071401)及心理学(专业代码 071501)的师范类考生,适用 C 类科目;非师范类考生,适用 B 类。

③报考教育学门类中教育学专业(专业代码 040101)的师范类考生,适用 A 类科目。

考生可根据上表选择所需统考科目的书籍(一般为三册),新《大纲》从 2001 年起开始使用,使用期限两年。

目 录

上篇 考试大纲应试教程

第一章 函数、极限与连续	(1)
§ 1. 函数	(1)
§ 2. 极限	(15)
§ 3. 函数的连续性	(29)
第二章 一元函数微分学	(37)
§ 1. 导数与微分	(37)
§ 2. 中值定理及导数的应用	(53)
第三章 一元函数积分学	(72)
§ 1. 不定积分	(72)
§ 2. 定积分	(91)
第四章 向量代数与空间解析几何	(115)
§ 1. 向量代数	(115)
§ 2. 平面与直线及简单的二次曲面	(121)
第五章 多元函数微积分学	(133)
§ 1. 多元函数微分学	(133)
§ 2. 二重积分	(148)
第六章 无穷级数	(161)
§ 1. 数项级数	(161)
§ 2. 幂级数	(171)
第七章 常微分方程	(177)
§ 1. 一阶微分方程	(177)
§ 2. 可降阶方程与二阶线性微方程	(182)

下篇 全真模拟试卷精选及参考答案

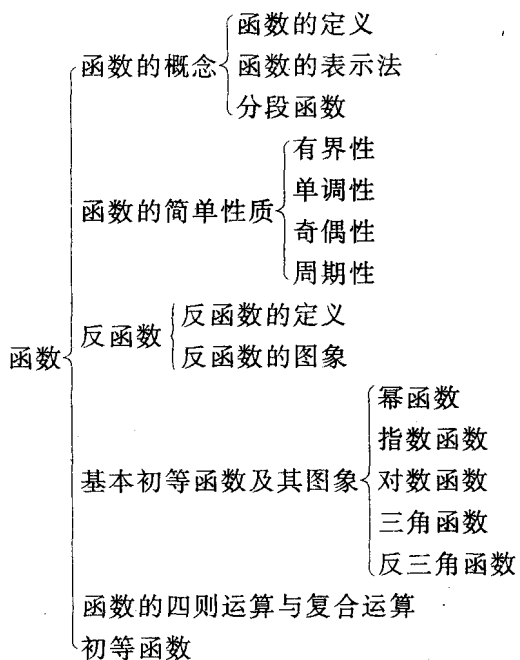
高数一模拟试卷(一)	(191)
模拟试卷(一)参考答案	(193)
高数一模拟试卷(二)	(195)
模拟试卷(二)参考答案	(197)
高数一模拟试卷(三)	(201)
模拟试卷(三)参考答案	(203)
高数一模拟试卷(四)	(206)
模拟试卷(四)参考答案	(208)
高数一模拟试卷(五)	(212)
模拟试卷(五)参考答案	(214)
附录一:2001 年全国成人高考专升本考试大纲(含标准样卷)	(217)
附录二:2000 年全国成人高考专升本考试试卷	(228)

上篇 考试大纲应试教程

第一章 函数、极限与连续

§ 1. 函 数

【知识结构】



【命题精要】

一、函数的概念

1. 函数的定义

设 D 是一个给定的数集, f 是一个确定的对应关系, 如果对于 D 中的每一个元素 x , 通过 f 都有 R 中唯一确定的一个元素 y 与之对应, 那么这个关系 f 就叫做从 D 到 R 的函数关系, 简称函数, 记作

$$f: D \rightarrow R \text{ 或 } f(x) = y$$

按照函数 f 与 $x \in D$ 所对应的 $y \in R$ 叫做 f 在 x 处的函数值, 记作 $y = f(x)$, 并称 D 为函数 f 的定义域, 而 f 的函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数 f 的值域.

函数关系通常用 $y = f(x), x \in D$ 来表示, 并称 y 是 x 的函数, 其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量.

注: (1) 函数定义中最本质的是: ① 对应法则: 对应法则用记号 f 表示, 它不只表示某一数学表达式, 也可以用几个数学式子, 甚至可以用一个图形或一张表格表示, 关键是它确定了两个数集之间的对应规则即可. ② 定义域: 定义域分两种情况: 在实际问题中, 函数的定义域由问题的实际意义确定; 在单纯由数学表达式定义的函数时, 其定义域是使函数的表达式有意义的一切实数所构成的数集.

(2) 两个函数相同(或恒等) 当且仅当它们的对应法则和定义域都相同.

2. 分段函数

在定义域内的不同点集内由不同的数学表达式表示的函数称为分段函数.

注意, 分段函数在其定义域上表示的是一个函数, 而不是几个函数.

二、函数的简单性质

1. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果存在正数 M , 使得对一切 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上无界.

2. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 任给 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 如果恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的; 如果恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的. 单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 对于定义域 D 中的任何 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 如果对于定义域 D 中的任何 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

注意, 讨论一个函数奇偶性的前提是其定义域内必须关于坐标原点对称. 奇函数的图形关于坐标原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在常数 $T (T \neq 0)$, 使得对于定义域 D 中的任何 x , $x \pm T$ 也在定义域 D 中, 且恒有 $f(x \pm T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 满足上式的最小正常数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

周期函数在每一个周期内的图形是相同的.

三、反函数

设 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的函数, 其值域为 Z , 如果对每个 $y \in Z$, 都有唯一的对应值 $x \in D$, 满足 $y = f(x)$, 则称 x 为定义在 Z 上以 y 为自变量的函数, 记为

$$x = f^{-1}(y), y \in Z$$

并称其为 $y = f(x)$ 的反函数.

通常以 x 为自变量, 则 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x), x \in Z$; 且 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

注意, 严格单调增加(或减少) 的函数有反函数, 有些函数在其定义域内不是单调函数, 但它在其子区间上是单调的, 这时可在其子区间上讨论它的反函数.

四、基本初等函数及其图形

1. 常数函数: $y = c$ (c 为常数)。

2. 幂函数: 形如 $y = x^\mu$ (μ 是常数) 称为幂函数。它的定义域需根据 μ 的值而定。但是不论 μ 取何值, 在区间 $(0, \infty)$ 上它总是有定义的。

对于常见的幂函数 $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}$ 应掌握它们的定义域、值域和单调性。

3. 指数函数: 形如 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 称为指数函数。它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$, 当 $a > 1$ 时, 函数是单调增加的; 当 $0 < a < 1$ 时, 函数是单调减少的。指数函数的图形总在 x 轴上方, 且过点 $(0, 1)$ 。

4. 对数函数: 指数函数 $y = a^x$ 的反函数, 记作 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 称为对数函数。它的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 当 $a > 1$ 时, 对数函数 $y = \log_a x$ 是单调增加的; 当 $0 < a < 1$ 时, 对数函数 $y = \log_a x$ 为单调减少的。对数函数的图形位于 y 轴右方。

注意, 对数函数 $y = \log_a x$ 与指数函数 $y = a^x$ 互为反函数, 其定义域和值域互相对应, 一个函数的定义域恰好是另一个函数的值域。

特别地, 取 $a = e$, 得自然对数函数: $y = \ln x$ 。

5. 三角函数与反三角函数

(1) 正弦函数 函数 $y = \sin x$ 称为正弦函数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 且为有界函数、奇函数和以 2π 为周期的周期函数。

(2) 余弦函数 函数 $y = \cos x$ 称为余弦函数。其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 且为有界函数、偶函数和以 2π 为周期的周期函数。

(3) 正切函数 函数 $y = \tan x$ 为正切函数。它的定义域为 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 它是奇函数, 且是以 π 为周期的周期函数。

(4) 余切函数 函数 $y = \cot x$ 称为余切函数。它的定义域是 $(k\pi - \pi, k\pi)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 值域为 $(-\infty, +\infty)$ 。它是奇函数, 且是以 π 为周期的周期函数。

(5) 正割函数 函数 $y = \sec x$ 称为正割函数。它是余弦函数的倒数, 即 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ 。它的定义域是 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。它是以 2π 为周期的周期函数, 且是偶函数。

(6) 余割函数 函数 $y = \csc x$ 称为余割函数。它是正弦函数的倒数, 即 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ 。它的定义域为 $(k\pi - \pi, k\pi)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。它是以 2π 为周期的周期函数, 且是奇函数。

(7) 反三角函数 由于三角函数在它们的定义域内不是单调的, 在通常意义下无法讨论其反函数。通过限制它的定义域范围, 使其成为单值的, 这样得到的三角函数的反函数称为反三角函数。

正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$ 的反函数依次为

反正弦函数 $y = \arcsin x$, 定义域 $[-1, 1]$, 值域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

反余弦函数 $y = \arccos x$, 定义域 $[-1, 1]$ 值域 $[0, \pi]$ 。反正弦函数是单调增函数、奇函数; 反余弦函数是单调减函数。

正切函数 $y = \tan x$ 和余切函数 $y = \cot x$ 的反函数依次为

反正切函数 $y = \arctan x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$. 反正切函数是单调增函数, 且是奇函数; 反余切函数是单调减函数.

上述五种函数统称为基本初等函数, 是最常用、最基本的函数, 它们的定义域、性质和图形(图形请参考相关教科书) 应当牢记.

注: 1° 指数函数运算性质有

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, (ab)^x = a^x b^x, (a^x)^y = a^{xy}$$

2° 对数函数运算性质有

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \log_a(x_1/x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2,$$

$$\log_a a^b = b \log_a a, \log_a a^x = \frac{\log_b a^x}{\log_b a}, a^{\log_a x} = x,$$

3° 常用的三角公式

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x,$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\sin x \cdot \csc x = 1, \cos x \cdot \sec x = 1, \tan x \cdot \cot x = 1,$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

五、函数的四则运算与复合运算

1. 四则运算: 对于同一定义域 D 上的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$. 定义函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的以下四则运算

$$1) (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$2) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$3) (f/g)(x) = f(x)/g(x) (g(x) \neq 0)$$

以上运算可推广至任意有限个函数

2. 设 y 是 u 的函数: $y = f(u)$, 而复合运算又是 x 的函数: $u = \varphi(x)$, 且函数 $u = \varphi(x)$ 的值域的全部或一部分包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内, 则对 $u = \varphi(x)$ 的定义域内的某些 x , 通过变量 u , 变量 y 有确定的值与之对应, 从而得到一个以 x 为自变量, 以 y 为因变量的函数, 称此函数是由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 u 称为中间变量.

注意, 不是任何两个函数都能复合成复合函数, 关键是 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域必须相交.

关于复合函数要熟练掌握的内容有三: 求定义域; 将若干个简单函数复合; 将复合函数拆分成若干个简单函数, 这里说的简单函数是指基本初等函数与基本初等函数经过四则运算后得出的函数, 熟练掌握复合函数的拆分是今后正确运用求导公式的基础.

六、初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算且能用一个解析式子表示的函数称为初等函数.

一般来说,分段函数不是初等函数.

【典型例题】

涉及本节内容的典型考题类型有:

1. 判断两个函数是否相等
2. 求函数的定义域
3. 正确运用函数记号,求函数值与函数的表达式
4. 判定给定函数的奇偶性
5. 求已知函数的反函数

其中关键是求函数的定义域

1. 判定两个函数是否相同(或恒相等)

分析 判定给定的两个函数是否表示同一函数,一般从两方面着手:(1) 验证定义域是否相同;(2) 对应法则是否一致,当且仅当两者完全相同时它们才恒等。

例 1.1 下列几组函数是否相等

1) $y = \cos x$ 与 $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

2) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 与 $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

3) $y = 2\ln|x|$ 与 $y = \ln x^2$

4) $y = 1$ 与 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

5) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ 与 $y = x^2 + x + 1$

解 1) $y = \cos x$ 与 $y = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$ 定义域相同,但对应法则不同,故它们不恒等

2) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 要求 $\frac{1+x}{1-x} > 0$, 则 $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+x < 0 \\ 1-x < 0 \end{cases}$, 即其定义域为

$\{x | -1 < x < 1\}$, 显然 $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ 定义域也是

$\{x | -1 < x < 1\}$, 而在此范围内 $y = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, 即它

们的对应法则亦相同,所以两者恒相等。

3) $y = \ln x^2 = 2\ln|x|$, $\forall x \in R$ 且 $x \neq 0$, 两者恒相等

4) $y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. $\forall x \in R$ 与 $y = 1$ 恒等)

5) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ 与 $y = x^2 + x + 1$. 不恒相等, 原因是 $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ 必须有 $x - 1 \neq 0$, 即 $x \neq 1$ 限制, 而 $y = x^2 + x + 1$, 对 $\forall x \in R$ 都可以, 定义域不同。

2. 求函数的定义域

分析 要求一个函数的定义域, 就是要求所有使函数表达式有意义的自变量的取值范围。这里特别应提醒大家的是诸如分母不为零, 偶次根号下不为负等这一批较为基本的方面, 往往也是大家容易忽略的部分。

例 1.2 求下列函数的定义域

1) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3} + \ln(5-x)$

2) $y = \frac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x(x-3)}$

$$3) y = \sqrt{16 - x^2} + \arcsin \frac{2x-1}{7}.$$

解 (1) 要使 y 有意义, x 应满足

$$x-2 \geq 0, x-3 \neq 0, 5-x > 0$$

即 $x \geq 2, x \neq 3$ 且 $x < 5$, 其公共部分为 $[2, 3) \cup (3, 5)$, 故所求定义域为 $D = [2, 3) \cup (3, 5)$

(2) 要使 y 有意义, x 必须满足

$$\begin{cases} \ln(x-1) \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ x(x-3) \neq 0 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x-1 \geq 1 \\ x > 1 \\ x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3 \end{cases}$$

其交集为 $[2, 3) \cup (3, +\infty)$, 故函数的定义域为 $D = [2, 3) \cup (3, +\infty)$.

(3) 要使 y 有意义, 必须

$$\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 & \text{①} \\ \left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1 & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x^2 \leq 16 & \text{③} \\ |2x-1| \leq 7 & \text{④} \end{cases} \quad \text{可得} \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ -3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

其交集为 $[-3, 4]$, 故函数定义域: 为 $D = [-3, 4]$

例 1.3 设

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \geq 0 \\ -e^x & x > 0 \end{cases} \quad \varphi(x) = \ln(x)$$

1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域

2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数吗?

分析 复合函数中内层函数的值域与外层函数的定义域之交集必须是非空集.

解 1) 因为 $\varphi(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 而 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 所以 $y(x)$ 的值域在 $f(x)$ 的定义域内, 故 $f[y(x)]$ 有意义, 因而

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} -\varphi^2(x) \\ -e^{\varphi(x)} \end{cases} \quad \varphi(x) < 0$$

即

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} -\ln^2 x & x \geq 1 \\ -x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\therefore f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $(0, 1) \cup [1, +\infty)$, 即为 $(0, +\infty)$

2) 由于 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 0)$, $\varphi(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 它们无公共部分, 所以不能复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

例 1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ 求 $f(2x-5)$ 与 $f(\sin 2x)$ 的定义域

解 $\therefore f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, $\therefore f(2x-5)$ 的定义域为 $0 \leq 2x-5 \leq 1$

$$\text{即 } 5 \leq 2x \leq 6, \text{ 也即 } \frac{5}{2} \leq x \leq 3$$

同理 $f(\sin 2x)$ 的定义域为 $0 \leq \sin 2x \leq 1$, 即

$$2n\pi \leq 2x \leq 2n\pi + \pi$$

故定义域为 $n\pi \leq x \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$

3. 求函数值与函数表达式

分析 按函数定义,对定义域 D 中的任一 x_0 ,根据法则 f 所对应的因变量 y 记为 $f(x_0)$,称为函数 f 在 x_0 的函数值,当函数 $f(x)$ 用一个解析表达式表示时,将表达式中的 x 代以 x_0 ,便得到 $f(x_0)$,特别应注意对于分段函数而言,应根据 x_0 所在的区间,确定相应的表达式.

例 1.5 设

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{u \rightarrow 0} (1+xu)^{\frac{1}{u}} & x \geq 1 \\ \ln(1+x) & |x| < 1 \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin ux}{u} & x \leq -1 \end{cases}$$

求 $f(-1), f(0), f(1)$

解 这是分段函数,求函数值时必须从自变量所在区间的解析表达式中去计算.

$$f(-1) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(-u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(-u)}{u} = -1,$$

$$f(0) = \ln(1+x)|_{x=0} = \ln 1 = 0,$$

$$f(1) = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

例 1.6 设 $\int_0^x f(u) du = \sin x + \cos x$, 求 $f(\pi)$

解 这里函数 $f(x)$ 是变上限积分的积分的被积函数,利用变上限积分的性质,等式两边同时求导,即可得 $f(x)$,从而易由 $f(x)$ 直接得到 $f(\pi)$.

由 $\int_0^x f(u) du = \sin x + \cos x$ 两边同时求导得

$$f(x) = \cos x - \sin x$$

故 $f(\pi) = (\cos x - \sin x)|_{x=\pi} = -1$

[解题提示] 若已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式,求函数 $f[g(x)]$ 的表达式. 相当于已知 $y = f(u)$ 及 $u = g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$,只需用 $g(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x 即可.

例 1.7 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f(x-1), f[f(x)]$.

解 把 $g(x) = x-1$ 代替 $f(x)$ 中的 x ,得

$$f(x-1) = \frac{x-1}{\sqrt{1+(x-1)^2}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

再把 $g(x) = f(x)$ 代替 $f(x)$ 中的 x 可得

$$f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

例 1.8 设 $f(x) = \frac{ax}{2x+3}$, 且 $f(f(x)) = x$, 求 a

解 本题是已知 $f(f(x))$ 的表达式,反求参数 a . 由

$$f(f(x)) = \frac{af(x)}{2f(x)+3} = x \quad \text{得}$$

$$\frac{a \frac{ax}{2x+3}}{2 \frac{ax}{2x+3} + 3} = \frac{a^2 x}{2ax + 6x + 9} = x$$

即

$$a^2 x = (2a + 6)x^2 + 9x$$

比较同次幂的系数得

$$a^2 = 9, 2a + 6 = 0$$

解

$$a = -3$$

例 1.9 已知 $f(\frac{1}{x}) = \frac{x}{1+x}$ 求 $f(x)$

分析 若已知 $f[g(x)]$ 的表达式, 反求 $f(x)$ 的表达式, 一般步骤是:

令 $g(x) = u$, 解得 $x = \varphi(u)$, 求出 $f(u)$ 的表达式, 再将 u 换成 x , 即得 $f(x)$ 的表达式

解 令 $\frac{1}{x} = u$, 得 $x = \frac{1}{u}$, 于是

$$f(u) = \frac{\frac{1}{u}}{1 + \frac{1}{u}}$$

再将 u 换成 x , 得

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

例 1.10 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 试以 $f(x)$ 表示 $f(3x)$

分析 先将 $3x$ 代入 $f(x)$ 的表达式中, 得 $f(3x)$, 再由 $f(x) = \frac{x}{x-1}$

得 $x = \frac{f(x)}{f(x)-1}$ 代入 $f(3x)$ 即可

解 $f(3x) = \frac{3x}{3x-1}$

$\because f(x) = \frac{x}{x-1}$, 得 $x = \frac{f(x)}{f(x)-1}$, 代入 $f(3x)$, 有

$$f(3x) = \frac{3x}{3x-1} = \frac{\frac{3f(x)}{f(x)-1}}{3 \frac{f(x)}{f(x)-1} - 1} = \frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

例 1.11 设 $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3$, 求 $f(x)$

解 令 $x + \frac{1}{x} = u$ 解 x 很繁, 但

$$f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 3 = (x + \frac{1}{x})^2 + 1$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

4. 判定给定函数的奇偶性

分析 判断函数奇偶性的方法主要是根据定义及奇偶函数的运算性质:

(1) 两个奇函数的代数和是奇函数; 两个偶函数之和是偶函数; 奇函数与偶函数的和既非奇函数, 也非偶函数.

(2) 两个奇函数乘积是偶函数;两个偶函数的乘积是偶函数;奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

另外,应掌握一些常见函数的奇偶性: x^{2n+1} (n 为正整数) $\sin x$ 、 $\arctan x$ 等是奇函数, x^{2n} (n 为正整数)、 $\cos x$ 等是偶函数.

注:判断 $f(x)$ 是否为奇函数,往往直接计处 $f(x) + f(-x) = 0$ 是否成立更简便.

例 1.12 判断下列函数的奇偶性

$$1) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$2) f(x) = F(x) \left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} \right), \text{ 其中 } a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, F(x) \text{ 是奇函数}$$

$$3) f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$$

$$4) f(x) = x \left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$$

解 1) 因为 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= -f(x)$$

所以, $f(x)$ 是奇函数.

注:1° 当运算式中出现 $a \pm \sqrt{b}$ 时,常在运算前先对分子分母同乘以其共轭形式 $a \mp \sqrt{b}$,进行所谓的有理化简化计算.

$$2^\circ f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \ln 1 = 0, \text{ 有}$$

$$f(x) = -f(-x)$$

从而也可得证 $f(x)$ 为奇函数.

$$2) \text{ 令 } g(x) = \frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2}, \text{ 因为}$$

$$g(-x) = \frac{a^x}{1 + a^x} - \frac{1}{2} = \frac{1 + a^x - 1}{1 + a^x} - \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2}\right) = -g(x)$$

所以 $g(x)$ 为奇函数,又 $F(x)$ 是奇函数,故 $f(x) = F(x) \cdot g(x)$ 是偶函数.

$$3) \because f(-x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\text{而 } f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^x}{e^x + 1} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(-x)$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数

$$4) \because f(-x) = -x \left(\frac{1}{2^{-x} - 1} + \frac{1}{2} \right) = -x \left(1 - \frac{2^x}{2^x - 1} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -x \left(\frac{-1}{2^x - 1} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= x\left(\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是偶函数

5. 求已知函数的反函数

分析 由分析关系式 $y = f(x)$ 反解 x 得关系式 $x = f^{-1}(y)$, 其次将字母 x 与 y 互换, 便得出所求的反函数 $y = f^{-1}(x)$

例 1.13 求下列函数的反函数

1) $y = 7x - 8$

2) $y = \ln(2x - 1) + 1$

解 1) 由 $y = 7x - 8$, 得 $x = \frac{1}{7}(y + 8)$, 将 x 与 y 互换

得 $y = \frac{1}{7}(x + 8)$

2) 由 $y = \ln(2x - 1) + 1$

得 $2x - 1 = e^{y-1}$

即 $x = \frac{1}{2}e^{y-1} + \frac{1}{2}$, 将 x 与 y 互换

得反函数 $y = \frac{1}{2}e^{x-1} + \frac{1}{2}$

【考点精练】

一、填空题

1) 函数 $y = \frac{1}{\ln(3x-2)}$ 的定义域是 _____.

2) 设 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则 $f(x^2)$ 的定义域是 _____.

3) 已知 $f(\sin \frac{x}{2}) = \cos x + 1$, 则 $f(\cos \frac{x}{2}) =$ _____.

4) 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 则 $f[f(x)] =$ _____.

5) 函数 $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ 的定义域是 _____.

6) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ 则 $f(-x) =$ _____.

7) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -2 < x < 0 \\ 1+x^2, & 0 \leq x < 2, \end{cases}$ 则 $f(\frac{\pi}{2}) =$ _____.

8) 设 $f(x+1) = x^2 + 2x + 3$, 则 $f(x) =$ _____.

9) 已知 $f(\sin x) = \cos 2x$, 则 $f(x) =$ _____.

10) 设 $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$, 则 $f(x) = ax^2 + bx + 6$ 中的 $a =$ _____, $b =$ _____.

二、单项选择题

1) 已知 $f(\frac{1}{x}) = (\frac{x+1}{x})^2$, 则 $f(x) =$ ()