

修正課程標準適用

高中乙組代數學

下 冊



民國二十六年二月初版

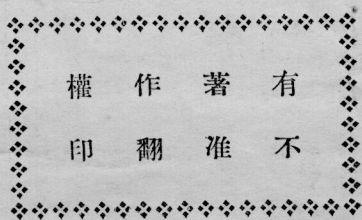
高中

標準適用

組代數學(全二冊)

◎下冊實價國幣三角五分

(郵運匯費另加)



有 不 著 准 作 翻 權 印

編 者

陳 王

蓋 疏

民 九

發 行 者

中華書局有限公司
代表人 路錫三

印 刷 者

上海中華書局印刷所
澳門中華書局印刷所

總發行處

上海中華書局印刷所
福州中華書局印刷所

分發行處

各埠中華書局

修正課程標準適用

高中乙組代數學

下 冊

目 次

第十三章 恆等式和其應用

1. 恆等式的意義	1
2. 恆等式的性質	1
3. 恆等式的證法	3
4. 恆等式原理的應用——未定係數法	5
5. 對稱式和對稱恆等式	6
6. 對稱式的析因式法	7

第十四章 二項式定理

1. 數學歸納法	12
2. 二項式定理	15
3. 二項式的公項	17
4. 注意	17

第十五章 比例及變數法

1. 比	20
------	----

2. 比的原則.....	20
3. 比例.....	21
4. 比例式的計算.....	21
5. 化等積式爲比例式.....	22
6. 比例定理.....	23
7. 對於解方程式的應用.....	24
8. 正變.....	25
9. 正變圖解.....	26
10. 反變.....	26
11. 反變圖解.....	27
12. 聯變.....	29
13. 對於造公式的應用.....	30

第十六章 級數

1. 等差級數.....	32
2. 等差級數的末項及第 n 項.....	32
3. 等差級數的和.....	33
4. 等差中項.....	35
5. 諸等差中項.....	35
6. 調和級數.....	37
7. 調和中項.....	37

8. 等比級數.....	38
9. 等比級數的末項和第 n 項.....	38
10. 等比級數的和.....	39
11. 等比中項.....	39
12. 諸等比中項.....	40

第十七章 對數及其應用

1. 對數.....	42
2. 定位部和定值部.....	42
3. 定位部求法.....	43
4. 定值部求法.....	43
5. 真數對數的互求.....	43
6. 對數的特性.....	44
7. 餘對數.....	44
8. 對數計算.....	45
9. 對於解方程式的應用.....	49
10. 對於解公式的應用.....	51

第十八章 排列組合及或然率

1. 排列.....	53
2. 求排列數一.....	53
3. 求排列數二.....	54

4. 求排列數三	54
5. 關於排列的應用問題	56
6. 組合	57
7. 組合數和排列數的關係	57
8. 組合的公式	58
9. 關於組合的應用問題	59
10. 或然率	61
11. 共立事件和複合或然率	62
12. 不共立事件和完全或然率	63

第十九章 行列式

1. 行列式	65
2. 高級行列式和低級行列式的關係	67
3. 行列式定理	71
4. 行列式的化簡	72

第二十章 複數(虛數)

1. 複數之起源	78
2. 複數的運算律	80
3. 複數的四則運算	81
4. 複數相等的定理	82
5. 複數的圖示法	83

6. 複數的代數形和極形	84
7. 特摩氏公式	87
8. 複數的應用	88

第二十一章 方程式論

1. n 次整式	91
2. n 次整式的值	91
3. 多項式的圖象	93
4. 因子定理	95
5. 方程式的基本定理	95
6. 虛根定理	95
7. 笛卡兒符號律	96
8. p 形方程式	99
9. 有理根定理	100
10. 方程式的變換	102
11. 無理根求法(忽拏法)	107
12. n 次方程式的一般解法	110
13. 方程式的代數解	111
14. 三次方程式的代數解	112
15. 四次方程式的代數解	116

修正課程標準適用

高中乙組代數學

下 冊

第十三章

恒等式和其應用

1. 恒等式的意義 設 A 和 B 是相等的兩個代數式，並且用以往的運算律，可以將 A 式變成 B 式，那嗎我們說 A 式恒等於 B 式，用記號表示出來便寫做

$$A \equiv B.$$

例如 $x(x+3)+9$ 是恒等於 $x^2+3(x+3)$

$$\text{因 } x(x+3)+9 = (x^2+3x)+9$$

$$= x^2 + (3x+9) = x^2 + 3(x+3).$$

$A \equiv B$ 叫做恒等式，所以恒等式 $A \equiv B$ 就是說第一式 A 可以用運算律把牠變做第二式 B ，有些時候，一恒等式中，不含有未知數如 $7-2+3=6+7-5$ ，便叫做數值的恒等式。

2. 恒等式的性質 在代數學的運算中，我

們常常拿來應用的有幾條定理,這都是恆等式最重要的性質,茲分述於下。

定理 I, 設含 X 的兩多項式恆等,則其相當項的係數也要相等,即是

$$\text{(證) 若 } a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n \equiv b_0X^n + b_1X^{n-1} + \dots + b_n$$

$$\text{則 } a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

因為這些相當係數不同,多項式也就不同,第一式就不能用運算的方法把牠變做第二式。

$$\text{例如,設 } ax^2 - 2x - 4 = 7x^2 + bx - c,$$

$$\text{於是 } a=7, \quad b=-2 \quad c=4.$$

假設 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 和 $b_0, b_1, \dots, b_n$ 都是不含 X 的數,那嗎從 $a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n \equiv b_0X^n + b_1X^{n-1} + \dots + b_n$ 便可以得出恆等式

$$a_0 \equiv b_0, \quad a_1 \equiv b_1, \dots, a_n \equiv b_n$$

上面的定理對於幾個未知數的恆等式也同樣成立,但是他們的係數要都是常數才可以。

定理 II 設 $A \equiv B$ 於是 $B \equiv A$

(證) 因為我們僅用結合律,可以把 A 式變做 B 式,所以用結合律的還原法,就可以把 B 式變成 A 式了。

例如 將前節的例題倒轉變去。

$$\text{因 } x^2 + 3(x+3) = x^2 + (3x+9) = (x^2 + 3x) + 9 = x(x+3) + 9,$$

定理 III 設 $A \equiv C$ 和 $B \equiv C$ 於是 $A \equiv B$ 。

(證) 因為 $B \equiv C$, 根據定理 II 便有 $C \equiv B$ 。

故 $A \equiv C$, $C \equiv B$ 於是 $A \equiv B$

例如
$$x(x+3) + 9 \equiv x^2 + 3x + 9$$

$$x^2 + 3(x+3) \equiv x^2 + 3x + 9$$

故
$$x(x+3) + 9 \equiv x^2 + 3(x+3)$$

定理 IV 一恆等式的兩邊, 若施以相同的演算後, 常為一恆等式。

由相等的規律, 可以得出下面的例題。

例如 設 $A \equiv B$, 於是 $A + C \equiv B + C$ 等

3. 恆等式的證法 證明兩個代數式 A 和 B 是恆等時, 不必一定要把 A 式變成 B 式, 才說 $A \equiv B$; 祇要將 A, B 兩式能够化成同樣的一個 C 式就算够了, 這下面的定理是給我們一個很有用的方法。

若從一個假設的恆等式 $A \equiv B$, 用逆算方法導出的結果, $C \equiv D$, 是一個已知的恆等式, 那嗎這種假設的恆等式 $A \equiv B$ 必定是真確的。

因爲用逆推方法將 $C \equiv D$ 可以變成 $A \equiv B$, 但是 $C \equiv D$ 是真確的, 所以 $A \equiv B$ 也要真確.

例如求證 $(a+b)^2 - 4ab$ 恆等於 $(a-b)^2$.

若先假設 $(a+b)^2 - 4ab \equiv (a-b)^2 \dots\dots\dots(1)$

便可以得出 $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a-b)^2 \dots\dots\dots(2)$

但是(2)式是已知的恆等式, 並且由(1)式到(2)式是可以逆算的, 所以(1)式成立.

有時由假設 $A \equiv B$, 證到 $C \equiv D$ 成立, 但是不能逆算轉去, 那嗎就是原來的假設錯誤.

例如, 假設 $x \equiv -x \dots\dots\dots(1)$

便可以得出 $x^n \equiv (-x)^2 \dots\dots\dots(2)$

第(2)式固然成立, 但是第(1)式不能因第(2)式之成立而成立, 所以假設根本就錯了.

習題

試證下列各恆等式.

$$1. (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \equiv 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

$$2. (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \equiv (ax + by)^2 + (bx - ay)^2$$

$$3. \frac{x+2}{(a-b)(a-c)} + \frac{x+b}{(b-c)(b-a)} + \frac{x+c}{(c-a)(c-b)} \equiv 0.$$

$$4. (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) \equiv (ax + by)^2 - (bx + ay)^2$$

$$5. (x+y)^3 - x^3 - y^3 \equiv 3xy(x+y).$$

$$6. \quad (a+b+c)^3 \equiv a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(c+a) + 3c^2(a+b) + 6abc.$$

4. 恆等式原理的應用 —— 未定係數法

我們有時要把一含某未知數的代數式化成這未知數特形的代數式, 可以先用文字代表未定的係數, 再用恆等式的原理去求出他們的值來, 這樣的方法叫做未定係數法.

例 1. 試將 $x^2 + 4x + 6$ 化成以 $(x+1)$ 做未知數的二次多項式.

(解) 所求二次式最普遍的形狀是 $a(x+1)^2 + b(x+1) + c$; a, b, c 都代的常數.

若這個問題是可能的, 一定有

$$x^2 + 4x + 6 \equiv a(x+1)^2 + b(x+1) + c \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{或 } x^2 + 4x + 6 \equiv ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c) \dots\dots\dots(2)$$

由 §2 定理 1, 因 (2) 式是恆等式, 所以同次項的係數相等, 即

$$a=1, \quad 2a+b=4, \quad a+b+c=6,$$

$$\text{解之得 } a=1, \quad b=2, \quad c=3.$$

$$\text{故 } x^2 + 4x + 6 \equiv (x+1)^2 + 2(x+1) + 3.$$

這類問題, 用綜合除法做爲便.

$$\begin{array}{r}
 1 \qquad 4 \qquad 6 \mid -1 \\
 \quad -1 \quad -3 \mid \\
 \hline
 1 \qquad 3 \qquad 3 \\
 \quad -1 \qquad \mid \\
 \hline
 1 \mid 2
 \end{array}$$

因為所求的常數項就是等於以 $x+1$ 去除原式的剩餘，倒數第二項的係數就等於以 $x+1$ 去除第一次商的剩餘，以下類推。

例 2. 求用 x^2+x-2 除 x^4+x^3-4 的商式和餘式。

(解) 因商式是二次式，餘式是一次式，並設此二式為

$$a_0x^2+a_1x+a_2 \text{ 和 } b_0x+b_1$$

$$\text{則 } x^4+x^3-4 \equiv (a_0x^2+a_1x+a_2)(x^2+x-2)+b_0x+b_1$$

$$\begin{aligned}
 \text{展開得 } x^4+x^3-4 &\equiv a_0x^4+(a_0+a_1)x^3-(2a_0-a_1-a_2)x^2 \\
 &\quad -(2a_1-a_2-b_0)x-(2a_2-b_1)
 \end{aligned}$$

因同次項的係數相等，所以得

$$a_0=1, \quad a_0+a_1=1, \quad -2a_0+a_1+a_2=0,$$

$$-2a_1+a_2+b_0=0, \quad -2a_2+b_1=-4.$$

$$\text{解之得 } a_1=0, \quad a_2=2, \quad b_0=-2, \quad b_1=0.$$

$$\text{故商式} = x^2+2, \quad \text{餘式} = -2x.$$

5. 對稱式和對稱恆等式 含有幾文字的代數式中，若任意將二文字對調，所得的新式仍

與原式爲恆等式者，這式便叫做這些文字的完全對稱式；如將各文字排成一定的次序，順次用後一文字，去代替前一文字，用首一文字去代替最末一文字，結果才和原式恆等的，便叫做這些文字的輪換對稱式，這兩種統稱曰對稱式。

例如 $x(y+z)^2 + y(z+x)^2 + z(x+y)^2 - 4xyz$ 是三次對稱式，

$x^2y + y^2z + z^2x$ 便是三次輪換對稱式。

我們若取兩個對稱式（完全或輪換），求他們的和，差，積，商時，原式既不因文字之調換而改變其形式，和，差，積，商當然也不因文字的調換而改變其形式，所以對稱式的和，差，積，商仍然是一個對稱式。

例如 $3xyz(x+y+z)$ 和 $x+y+z$ 的和，差，積，商

$$(x+y+z)(3xyz+1), \quad (x+y+z)(3xyz-1),$$

$$3xyz(x+y+z)^2, \quad 3xyz$$

都是對稱式。

6. 對稱式的析因式法 以一不爲對稱式的代數式，調換文字後，其形式必變，盡取一切變成的式，便成功一組對稱組。

例如 $(x+y)$, $(y+z)$, $(z+x)$ 是 x, y, z 三文字的完全對稱組。

$(x-y)$, $(y-z)$, $(z-x)$ 便是 x, y, z 三文字的輪換對稱組。

定理：一對稱式的諸因式中，若含有其對稱組中之某一式，則必含有這對稱組中其餘的各式。

(證) 因為調換文字的結果，使這式改為組中他式，並且組中所有的式都是由這式變出來的，而對稱式又不因文字的調換而改變，所以組中各式都是對稱式的因式。

對稱式析因式時可分為下之三步。

I. 由因式定理，求出一個因式。

II. 由上述定理，得出屬於對稱組的一切因式。

III. 由 §5 知所餘的因式也成對稱，係數則用未定係數法求出。

例 1. 把 $(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ 析因式。

9 (解) 設 $x = -y$ ，則上式為零，因

$$(-y+y+z)^5 + y^5 - y^5 - z^5 = 0.$$

所以原式能被 $x+y$ 整除, 同理也可以被 $y+z, z+x$ 整除, 故 $x+y, y+z, z+x$ 都是原式的因式, 但原式是五次對稱式, 故尚有一因式爲二次對稱式. 設此二次對稱式爲

$$k(x^2+y^2+z^2)+L(xy+yz+zx),$$

$$\begin{aligned} \text{則} \quad & (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 \\ & \equiv (x+y)(y+z)(z+x)[k(x^2+y^2+z^2)+L(xy+yz+zx)] \end{aligned}$$

$$\text{以 } x=1, y=1, z=0 \text{ 代入得 } 15=2k+L$$

$$\text{以 } x=2, y=1, z=0 \text{ 代入得 } 35=5k+2L$$

$$\text{解之得} \quad k=5, \quad L=5$$

$$\text{故 } (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 \equiv 5(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$$

例 2. 把 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 析因式.

(解) 設 $a=b$, 則上式爲零, 故 $a-b$ 是原式的一個因式, 又因原式是一輪換對稱式, 所以 $b-c, c-a$ 也是原式的因式.

但原式是四次輪換對稱式, 故知尚有一一次對稱式. 設此式爲 $L(a+b+c)$,

$$\begin{aligned} \text{則} \quad & a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) \\ & \equiv L(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c). \end{aligned}$$

$$\text{若以 } a=0, \quad b=1, \quad c=2 \text{ 代入, 則得 } 6L=-6 \quad L=-1$$

故
$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$$

$$\equiv -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

習題

1. 試把 $4x^2 + 8x + 7$ 變成以 $2x + 3$ 做未知數的多項式。
2. 試求出一最簡方程式 $ax + by = -1$, 已知其兩組解答為 $x=3, y=1$ 和 $x=4, y=-1$.
3. 試求方程式 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, 已知其三根為 2, 1, 和 3.

試用未定係數法求下列各題前式被後式除的商和剩餘.

4. $3x^4 - 2x^3 - 32x^2 + 66x - 35$, $x^2 + 2x - 7$.

5. $3x^3 - 3x^2 + x - 5$, $x^2 - 3x + 2$.

6. $2x^5 - 3x^4 + x^2 - 5$, $x^3 - 3x + 2$.

分解下列各式的因式.

7. $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$.

8. $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

9. $x(y+z)^2 + y(z+x)^2 + z(x+y)^2 - 4xyz$.

10. $x^2(y-z)^3 + y^2(z-x)^3 + z^2(x-y)^3$.

11. $(x+y)(y+z)(z+x) + xyz$.