修正課程標準適用

高中乙組代數學

下　冊

民國二十六年二月初版
民國二十六年二月發行

高中標準適用
組代數學（全二冊）

◎下冊實價國幣三角五分
（郵運匯費另加）

編者 陳藎民 王疏九

發行者 中華書局有限公司
代表人 路錫三

印刷者 中華書局印刷所（上海澳門路）

總發行處 中華書局印刷所（上海福州路）

分發行處 各埠中華書局

（一一〇七八）

修正課程標準適用

高中乙組代數學

下　冊

目　次

第十三章　恆等式和其應用

第十四章　二項式定理

第十五章　比例及變數法

第十六章 級數

第十七章 對數及其應用

第十八章 排列組合及或然率

第十九章　行列式

第二十章　複數(虛數)

第二十一章 方程式論

修正課程標準適用

高中乙組代數學

下 册

第十三章

恆等式和其應用

1. 恆等式的意義　設 A 和 B 是相等的兩個代數式,並且用以往的運算律,可以將 A 式變成 B 式,那嗎我們說 A 式恆等於 B 式,用記號表示出來,便寫做

$$A \equiv B.$$

例如　$x(x+3)+9$ 是恆等於 $x^2+3(x+3)$

因　$x(x+3)+9=(x^2+3x)+9$

$$=x^2+(3x+9)=x^2+3(x+3).$$

$A \equiv B$ 叫做恆等式,所以恆等式 $A \equiv B$ 就是說第一式 A 可以用運算律把牠變做第二式 B,有些時候,一恆等式中,不含有未知數如 $7-2+3=6+7-5$,便叫做數值的恆等式.

2. 恆等式的性質　在代數學的運算中,我

們常常拿來應用的有幾條定理,這都是恆等式最重要的性質,茲分述於下.

定理 I, 設含 X 的兩多項式恆等,則其相當項的係數也要相等,即是

(證) 若 $a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+a_n\equiv b_0X^n+b_1X^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+b_n$

則 $a_0=b_0$, $a_1=b_1$,$\cdots\cdots\cdots a_n=b_n$

因爲這些相當係數不同,多項式也就不同,第一式就不能用運算的方法把牠變做第二式.

例如,設 $ax^2-2x-4=7x^2+bx-c$,

於是 $a=7$, $b=-2$ $c=4$.

假設 a_0, a_1, $\cdots\cdots a_n$ 和 b_0, b_1, $\cdots\cdots b_n$ 都是不含 X 的數,那嗎從 $a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots\cdots+a_n\equiv b_0X^n+b_1X^{n-1}+\cdots\cdots+b_n$ 便可以得出恆等式

$a_0\equiv b_0$, $a_1\equiv b_1\cdots\cdots a_n\equiv b_n$

上面的定理對於幾個未知數的恆等式也同樣成立,但是他們的係數要都是常數才可以.

定理 II 設 $A\equiv B$ 於是 $B\equiv A$

(證) 因爲我們僅用結合律,可以把 A 式變做 B 式,所以用結合律的還原法,就可以把 B 式變成 A 式了.

例如 將前節的例題倒轉變去.

因 $x^2+3(x+3)=x^2+(3x+9)=(x^2+3x)+9=x(x+3)+9,$

定理 III 設 $A\equiv C$ 和 $B\equiv C$ 於是 $A\equiv B$.

(證) 因爲 $B\equiv C$.根據定理 II 便有 $C\equiv B$.

故 $A\equiv C,\quad C\equiv B$ 於是 $A\equiv B$

例如 $x(x+3)+9\equiv x^2+3x+9$

$$x^2+3(x+3)\equiv x^2+3x+9$$

故 $x(x+3)+9\equiv x^2+3(x+3)$

定理 IV 一恆等式的兩邊,若施以相同的演算後,常爲一恆等式.

由相等的規律,可以得出下面的例題.

例如 設 $A\equiv B$, 於是 $A+C\equiv B+C$ 等

3. <u>恆等式的證法</u> 證明兩個代數式 A 和 B 是恆等時,不必一定要把 A 式變成 B 式,才說 $A\equiv B$;祇要將 A,B 兩式能够化成同樣的一個 C 式就算够了,這下面的定理是給我們一個很有用的方法.

若從一個假設的恆等式 $A\equiv B$, 用逆算方法導出的結果, $C\equiv D$, 是一個已知的恆等式,那嗎這種假設的恆等式 $A\equiv B$ 必定是眞確的.

因爲用逆推方法將 $C\equiv D$ 可以變成 $A\equiv B$, 但是 $C\equiv D$ 是眞確的,所以 $A\equiv B$ 也要眞確.

例如求證 $(a+b)^2-4ab$ 恆等於 $(a-b)^2$.

若先假設 $(a+b)^2-4ab\equiv(a-b)^2$ ……………(1)

便可以得出 $a^2-2ab+b^2\equiv(a-b)^2$ …………(2)

但是(2)式是已知的恆等式,並且由(1)式到(2)式是可以逆算的,所以(1)式成立.

有時由假設 $A\equiv B$, 證到 $C\equiv D$ 成立,但是不能逆算轉去,那嗎就是原來的假設錯誤.

例如,假設 $x\equiv -x$ …………………………(1)

便可以得出 $x^n\equiv(-x)^2$ ……………………(2)

第(2)式固然成立,但是第(1)式不能因第(2)式之成立而成立,所以假設根本就錯了.

習題

試證下列各恆等式.

1. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3\equiv 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

2. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\equiv(ax+by)^2+(bx-ay)^2$

3. $\dfrac{x+2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x+b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{x+c}{(c-a)(c-b)}\equiv 0$.

4. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)\equiv(ax+by)^2-(bx+ay)^2$

5. $(x+y)^3-x^3-y^3\equiv 3xy(x+y)$.

6. $(a+b+c)^3\equiv a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc.$

4. 恆等式原理的應用——未定係數法

我們有時要把一含某未知數的代數式化成這未知數特形的代數式,可以先用文字代表未定的係數,再用恆等式的原理去求出他們的值來,這樣的方法叫做未定係數法.

例 1. 試將 x^2+4x+6 化成以 $(x+1)$ 做未知數的二次多項式.

(解) 所求二次式最普遍的形狀是 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$;a,b,c.都代的常數.

若這個問題是可能的,一定有

$$x^2+4x+6\equiv a(x+1)^2+b(x+1)+c\cdots\cdots(1)$$

或 $$x^2+4x+6\equiv ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)\cdots\cdots(2)$$

由§2定理 1,因(2)式是恆等式,所以同次項的係數相等,卽

$$a=1,\quad 2a+b=4,\quad a+b+c=6,$$

解之得 $$a=1,\quad b=2,\quad c=3.$$

故 $$x^2+4x+6\equiv(x+1)^2+2(x+1)+3.$$

這類問題,用綜合除法做爲便.

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 4 & 6 & -1 \\
 & -1 & -3 & \\
\hline
1 & 3 & 3 & \\
 & -1 & & \\
\hline
1 & 2 & &
\end{array}$$

因為所求的常數項就是等於以 $x+1$ 去除原式的剩餘,倒數第二項的係數就等於以 $x+1$ 去除第一次商的剩餘,以下類推.

例 2. 求用 x^2+x-2 除 x^4+x^3-4 的商式和餘式.

(解) 因商式是二次式,餘式是一次式,並設此二式為

$$a_0x^2+a_1x+a_2 \text{ 和 } b_0x+b_1$$

則 $$x^4+x^3-4\equiv(a_0x^2+a_1x+a_2)(x^2+x-2)+b_0x+b_1$$

展開得 $$x^4+x^3-4\equiv a_0x^4+(a_0+a_1)x^3-(2a_0-a_1-a_2)x^2$$
$$-(2a_1-a_2-b_0)x-(2a_2-b_1)$$

因同次項的係數相等,所以得

$$a_0=1,\quad a_0+a_1=1,\quad -2a_0+a_1+a_2=0,$$
$$-2a_1+a_2+b_0=0,\quad -2a_2+b_1=-4.$$

解之得 $a_1=0,\quad a_2=2,\quad b_0=-2,\quad b_1=0.$

故商式 $=x^2+2$, 餘式 $=-2x.$

5. <u>對稱式和對稱恆等式</u>　含有幾文字的代數式中,若任意將二文字對調,所得的新式仍

與原式爲恆等式者,這式便叫做這些文字的**完全對稱式**;如將各文字排成一定的次序,順次用後一文字,去代替前一文字,用首一文字去代替最末一文字,結果才和原式恆等的,便叫做這些文字的**輪換對稱式**,這兩種統稱曰**對稱式.**

例如　$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$ 是三次對稱式,

$x^2y+y^2z+z^2x$ 便是三次輪換對稱式.

我們若取兩個對稱式(完全或輪換),求他們的和,差,積,商時,原式既不因文字之調換而改變其形式,和,差,積,商當然也不因文字的調換而改變其形式,所以對稱式的和,差,積,商仍然是一個對稱式.

例如　$3xyz(x+y+z)$ 和 $x+y+z$ 的和,差,積,商

$$(x+y+z)(3xyz+1),\quad (x+y+z)(3xyz-1),$$

$$3xyz(x+y+z)^2,\quad 3xyz$$

都是對稱式.

6. 對稱式的析因式法　以一不爲對稱式的代數式,調換文字後,其形式必變,盡取一切變成的式,便成功一組對稱組.

例如 $(x+y)$，$(y+z)$，$(z+x)$ 是 x,y,z 三文字的完全對稱組.

$(x-y)$，$(y-z)$，$(z-x)$ 便是 x,y,z 三文字的輪換對稱組.

定理:一對稱式的諸因式中,若含有其對稱組中之某一式,則必含有這對稱組中其餘的各式.

(證) 因為調換文字的結果,使這式改為組中他式,並且組中所有的式都是由這式變出來的,而對稱式又不因文字的調換而改變,所以組中各式都是對稱式的因式.

對稱式析因式時可分為下之三步.

I. 由因式定理,求出一個因式.

II. 由上述定理,得出屬於對稱組的一切因式.

III. 由§5知所餘的因式也成對稱,係數則用未定係數法求出.

例 1. 把 $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ 析因式.

9 (解) 設 $x=-y$，則上式為零,因

$$(-y+y+z)^5+y^5-y^5-z^5\equiv 0.$$

所以原式能被$x+y$整除,同理也可以被$y+z,z+x$整除,故$x+y,y+z,z+x$都是原式的因式,但原式是五次對稱式,故尚有一因式爲二次對稱式.設此二次對稱式爲

$$k(x^2+y^2+z^2)+L(xy+yz+zx),$$

9

則 $$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$$

$$\equiv(x+y)(y+z)(z+x)[k(x^2+y^2+z^2)+L(xy+yz+zx)]$$

以$x=1,y=1,z=0$代入得　$15=2k+L$

以$x=2,y=1,z=0$代入得　$35=5k+2L$

解之得　$$k=5,\quad L=5$$

故　$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5\equiv5(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$$

例 2.　把$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$析因式.

(解)　設$a=b$,　則上式爲零,故$a-b$是原式的一個因式,又因原式是一輪換對稱式,所以$b-c,c-a$也是原式的因式。

但原式是四次輪換對稱式,故知尚有一一次對稱式.設此式爲$L(a+b+c)$,

則 $$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$

$$\equiv L(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

若以$a=0$,　$b=1$,　$c=2$代入,則得　$6L=-6$　$L=-1$

故　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$$\equiv-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

習　題

1.　試把$4x^2+8x+7$變成以$2x+3$做未知數的多項式.

2.　試求出一最簡方程式$ax+by=-1$,已知其兩組解答爲$x=3,y=1$和$x=4,y=-1$.

3.　試求方程式$x^3+bx^2+cx+d=0$,已知其三根爲2,1,和3.

試用未定係數法求下列各題前式被後式除的商和剩餘.

4.　$3x^4-2x^3-32x^2+66x-35$,　x^2+2x-7.

5.　$3x^3-3x^2+x-5$,　x^2-3x+2.

6.　$2x^5-3x^4+x^2-5$,　x^3-3x+2.

分解下列各式的因式.

7.　$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

8.　$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

9.　$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$.

10.　$x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$.

11.　$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$.