名誉主编　雷洁琼

三点一测丛书
（修订版）

重点难点提示　知识点精析
综合能力测试

与现行教材同步

高二数学

主编　岑志林

应试能力的导向
学生自学的点拨
名师心血的结晶
名校经验的浓缩

科学出版社　龍門書局

-30

三点一测丛书（修订版）

岑志林　主编

三点一测丛书（修订版）

高二数学

岑志林　主　编

责任编辑　李敬东　俞茵茵

科学出版社
龍門書局　出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717

北京市东华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经销

*

1996年7月第一版　开本：787×1092　1/32
1997年7月修订版　印张：13 1/4
1997年9月第十一次印刷　字数：289 000
印数：224 001—254 000

ISBN 7-80111-204-0/G・133

定价：13.20元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《三点一测丛书》(修订版)

编 委 会

立足知识点　突出含金量

——《三点一测丛书》(修订版)序

《三点一测丛书》是一套涵盖中学主要课程的自读导向教程，去年一出版就畅销神州大地，好评如潮。全国各地读者纷纷来信赞扬这套丛书纵有深度，横有跨度，内容丰富，贴紧教材，讲法新颖，精要实用。中学生说："《三点一测丛书》就像我们前进道路上的一盏明灯，指引着我们前进。""捧着《三点一测丛书》，我感到它的'重量'了。对于我们中学生来讲，它真可谓'雪中送炭'，是我们迈向知识天堂的一架云梯。"一些教育行家对这套丛书给予高度评价：**"这套书的含金量很高。""在当前许许多多的辅导读物中此更具有实用性、工具性、权威性。"特别是，我们尊敬的雷老在接见这套丛书的编辑人员时高兴地勉励我们："你们为孩子们做了一件好事。"**广大读者和雷老的赞扬给了我们极大的鼓舞。

有些朋友来信问：你们写《三点一测丛书》是怎么考虑的，为什么一出版就受到如此青睐？实际上，这套丛书的选题和编写经历了一个较长的调研和酝酿过程。我们与一些思维敏锐的教学研究者和出版家在实践中共同发现：**近年来，在中学的辅导读物中都一窝蜂地抓"点"，例如"考点"、"热点"、"要点"、"基点"等等。其实，归根到底，最关键的就是"重点"、"难点"，最基本的就是"知识点"。我们抓住了"知识点"，进行精辟的分析，解决了其中的"重点"和"难点"，这样读者就可以学习到掌握知识**

的手段。由此，举一反三，触类旁通，把握书海扬帆的正确航向。“三点一测”即重点、难点提示，知识点精析，综合能力测试。我们期望这套丛书能成为既实用、准确、翔实，又能指点迷津的辅导读物，让学习者、应试者一看，就心明眼亮，避开误区，不走弯路。为此，我们邀请了在教学第一线的知名特、高级教师编写了这套丛书，我们为学习者从大纲、考纲中找到了各科求知的达标点，从设计的测试题中找到了应试的参照系，**使学习者切实体味到怎样从“知识型”向“能力型”转变，从“苦读型”向“巧读型”转变，从而在学习和应试中切实有效地进行素质教育。**

根据广大读者的要求和建议，科学出版社、龙门书局已着手将这套丛书制作成光盘，不久将在全国发行。同时，我们在保留第一版的所有特色的基础上，对各册作了认真的修订，统一了体例，更新了习题，改正了差错。特别是，增加和更新了许多由第一线教师精心设计、反复验证过的珍贵资料，并引进了新近披露的重要导向性的信息。经过修订后的这套丛书，知识和技能的含量进一步增加，更适合读者学习需要。**此外，丛书修订版以新的封面问世，并加了激光防伪标志，希望能起到遏制盗版的作用。**

实践是检验真理的标准，读者是最好的评审员。我们深深地感谢全国上百万的莘莘学子与辛勤耕耘的导师们对《三点一测丛书》的厚爱。他们的意见和建议十分珍贵，他们的赞扬和鼓励使我们更加充满信心。我们更殷切地期盼着这套丛书的修订版问世后，能更多地听到反馈意见，以便不断修订，使之完善。最终，能在蓊郁的书林中呈现出一道绿影婆娑的怡人风景。

希　扬

1997 年春

前　言

本书是根据现行的高中数学教学大纲对于基础知识、基本技能、基本方法，运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力，以及运用所学数学知识和方法分析问题和解决问题的能力的要求而编写的。编写的指导思想是在狠抓“三基”，发展智力，培养能力的前提下，紧紧抓住教材中的“知识点”，对其进行精辟的阐述，再通过精选的习题，认真剖析，重在应用，着力于突出重点，突破难点。

每章每节都是由“重点难点提示”、“知识点精析”、“知识点应用”和“综合能力测试题”四部分组成，所选的训练题，紧紧抓住知识点，特别是重点、难点，结合高考题型分选择题、填空题、解答题三种，每单元都选有一套典型的测试题，供检查测验用，以利于巩固、加深和活用，并实现逐步提高学生分析问题与解决问题能力的目标。参考答案放在各章之后，供读者参考。

参加高中数学编写工作的有詹运达（沈阳二中数学组长、高级教师、学科带头人）、曾放（沈阳二中高级教师）、蔡京南（沈阳二中高级教师）、陶华惠（沈阳二中高级教师）、岑志林（沈阳二中教学副校长、特级教师、中国数学奥林匹克高级教练员），全书由岑志林主编。本书是我们教学工作与指导高三复习工作的经验结晶，希望能为读者带来较大的收益。尽管我们进行了认真的编、校，但由于时间仓促，难免有不足和错误

之处，望广大读者批评、指正。

编　者

1997 年 4 月

目　录

代数部分

解 析 几 何

代 数 部 分

第五章　不等式

本章主要内容有不等式、不等式的性质、不等式的证明、不等式的解法及含有绝对值的不等式.

5.1　不等式的概念和性质

一、重点难点提示

掌握不等关系的定义,四个性质,三个推论及其证明.

二、知识点精析

对不等式的每条性质要会证明,对性质的条件要掌握确切.

实数 a、b 具有以下不等关系

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b$$

$$a-b=0\Leftrightarrow a=b$$

$$a-b<0\Leftrightarrow a<b$$

不等式有下面一些性质

1. $a>b\Leftrightarrow b<a$
2. $a>b,b>c\Rightarrow a>c$
3. $a>b\Rightarrow a+c>b+c$
4. $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc;a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$
5. $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

6. $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

7. $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n \quad (n \in Z$ 且 $n > 1)$

如性质 3 中，$a > b$ 是 $a + c > b + c$ 的充分且必要条件，但性质 5 中 $a > b, c > d$ 是 $a + c > b + d$ 的充分不必要条件，因此解不等式组时不能做如下变形.

例　解不等式组

$$\begin{cases} x - 2 > 1 & ① \\ 2x > 1 & ② \end{cases}$$

① + ② 得 $3x - 2 > 2 \qquad \therefore \quad x > \frac{4}{3}$

这种解法是错误的，因为原不等式组与 $3x - 2 > 2$ 不等价.

正确的解法是　由 ① 得 $x > 3$，由 ② 得 $x > \frac{1}{2}$

$\therefore$ 不等式组的解集为 $\{x \mid x > 3\}$

三、知识点应用

例 1　设 $60 < a < 84, 28 < b \leqslant 33$　求 $a + b, a - b$，及 $\frac{a}{b}$ 的范围.

解　$\left.\begin{array}{l} 60 < a < 84 \\ 28 < b \leqslant 33 \end{array}\right\} \Rightarrow 88 < a + b < 117$

$$\left.\begin{array}{l} 60 < a < 84 \\ 28 < b \leqslant 33 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 60 < a < 84 \\ -33 \leqslant -b < -28 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 27 < a - b < 56$

$$\left.\begin{array}{l} 60 < a < 84 \\ 28 < b \leqslant 33 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 60 < a < 84 \\ \frac{1}{33} \leqslant \frac{1}{b} < \frac{1}{28} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{60}{33} < \frac{a}{b} < \frac{84}{28}$$

$\Rightarrow \frac{20}{11} < \frac{a}{b} < 3$

例 2　求证：$a>b,\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Rightarrow a>0,b<0$.

证明　$\because\ a>b\quad\therefore\ a-b>0$

又　$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\qquad\therefore\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$

即　$\frac{b-a}{ab}>0$　　而　$b-a<0$

$\therefore\ ab<0$　　而 $a>b$

$\therefore\ a>0,b<0$.

例 3　已知　$a>0,a^2-2ab+c^2=0,bc>a^2$，试比较 a,b,c 的大小.

解　$\because\ bc>a^2>0\qquad\therefore b,c$ 同号

而　$b=\frac{a^2+c^2}{2a}>0\qquad\therefore\ c>0$

由　$(a-c)^2=2ab-2ac=2a(b-c)>0$

得　$b-c>0\qquad\therefore b>c$

由　$$\left.\begin{array}{l}b=\frac{a^2+c^2}{2a}\\ bc>a^2\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a^2+c^2}{2a}\cdot c>a^2$$

$\Rightarrow a^2c+c^3>2a^3\Rightarrow(a^3-a^2c)+(a^3-c^3)<0$

$\Rightarrow(a-c)(2a^2+ac+c^2)<0$

$\because\ 2a^2+ac+c^2>0$　　即　$a-c<0$

$\therefore\ a<c$

综上　$a<c<b$.

四、综合能力测试题

选择题

1. 若 $a>b,c>d$ 下列结论中不成立的是　（　　）

(A) $a-c>b-c$　　(B) $a-d>b-c$

(C) $a+d>b+c$　　(D) $a-c<a-d$

2. 若 $a>b$　则　（　　）

(A) $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$　　(B) $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

(C) $a^3 > b^2$　　(D) $a^2 > b^3$

3. 若 $a \geqslant b$　则　　(　　)

(A) $(ac)^2 \geqslant (bc)^2$　　(B) $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$

(C) $ac^2 \geqslant bc^2$　　(D) $\frac{c^2}{a} > \frac{c^2}{b}$

4. 若 $-1 < \alpha < \beta < 1$　则下列各式中恒成立的是　　(　　)

(A) $-2 < \alpha - \beta < 0$　　(B) $-2 < \alpha - \beta < -1$

(C) $-1 < \alpha - \beta < 0$　　(D) $-1 < \alpha - \beta < 1$

填空题

1. 若 $a > b, c > d$　且 $a < 0, d < 0$　则 ac ____ bd.

2. 设 $x > 1, -1 < y < 0$　试将 x、y、$-y$、$-xy$ 按由小到大的顺序排列起来________________.

3. 若 $d > c$　　$a + b = c + d, a + d < b + c$ 则 a、b、c、d 的大小关系是____________________.

解答题

1. 证明若 a、b、c 为一个三解形的三边，则 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 也可以作为一个三角形的三边.

2. 若 $a > b, c > d, a$、b、c、d 中至少有三个同号，试比较 ac 与 bd 的大小，并说明理由.

5.2　不等式的证明

一、重点难点提示

掌握证明不等式的几种常用方法，掌握两个(或三个)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数这一定理，并能运

用上述性质、定理和方法解决一些问题.难点在于由于不等式证明题目杂,技巧多不易掌握,因此除了上述思维方法要有系统了解外,还要注意解题技巧的总结.

二、知识点精析

不等式的证明方法很多,主要应该掌握比较法、综合法和分析法.对反证法、放缩法和判别式法等方法的要点也应明确,并掌握它的基本使用.

1. 比较法

比差:根据 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$

比商:根据 $a>b>0\Leftrightarrow \frac{a}{b}>1$

步骤:作差(或商)— 变形 — 判断.

2. 综合法

利用某些已经证明过的不等式作为基础,再运用不等式的性质推导出所要求证的不等式.这种证明方法通常叫做综合法.这是一种由因导果的方法.

常用的关系有:

(1) $a^2\geqslant 0$ 或 $(a\pm b)^2\geqslant 0$

(2) $a^2+b^2\geqslant 2ab$, $a^2+b^2\geqslant -2ab$,即 $a^2+b^2\geqslant 2|ab|$

(3) 对 $a>0$、$b>0$、$c>0$ 有

$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ (当且仅当 $a=b$ 时取等号)

$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ (当且仅当 $a=b=c$ 时取等号)

$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ (当且仅当 $a=b=c$ 时取等号)

3. 分析法

从求证的不等式出发,分析使这个不等式成立的条件,把

证明这个不等式转化为判定这些条件是否具备的问题，如果能够肯定这些条件都已具备，那么就可以断定原不等式成立，这种证明方法通常叫分析法．这是一种执果索因的方法．

三、知识点应用

例 1　用比较法证明

(1) 已知　$a > b > c$，求证：$a^2b + b^2c + c^2a > ab^2 + bc^2 + ca^2$.

证明　解法 1　$a^2b + b^2c + c^2a - (ab^2 + bc^2 + ca^2)$

$= (b - c)a^2 + (c^2 - b^2)a + b^2c - bc^2$

$= (b - c)[a^2 - (b + c)a + bc]$

$= (b - c)(a - b)(a - c) > 0$

$\because$　$a > b > c$　$\therefore$　$b - c > 0, a - b > 0, a - c > 0$

$\therefore$　$a^2b + b^2c + c^2a > ab^2 + bc^2 + ca^2$.

解法 2　$\because a > b > c$　　设 $a = b + x, c = b - y$　(x、$y \in R^+$)

$a^2b + b^2c + c^2a - (ab^2 + bc^2 + ca^2)$

$= ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$

$= (b + x)bx + b(b - y)y - (b + x)(b - y)(x + y)$

$= xy(x + y) > 0$.

(2) 已知　$a > b > c > 0$，则 $a^ab^bc^c > (abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$.

证明　解法 1　$\because \lg(a^ab^bc^c) - \lg(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

$= a\lg a + b\lg b + c\lg c - \frac{1}{3}(a + b + c)(\lg a + \lg b + \lg c)$

$= \frac{1}{3}[(a - b) + (a - c)]\lg a + \frac{1}{3}[(b - a) + (b - c)]\lg b + \frac{1}{3}[(c - a) + (c - b)]\lg c$

$= \frac{a - b}{3}\lg\frac{a}{b} + \frac{b - c}{3}\lg\frac{b}{c} + \frac{a - c}{3}\lg\frac{a}{c} > 0$