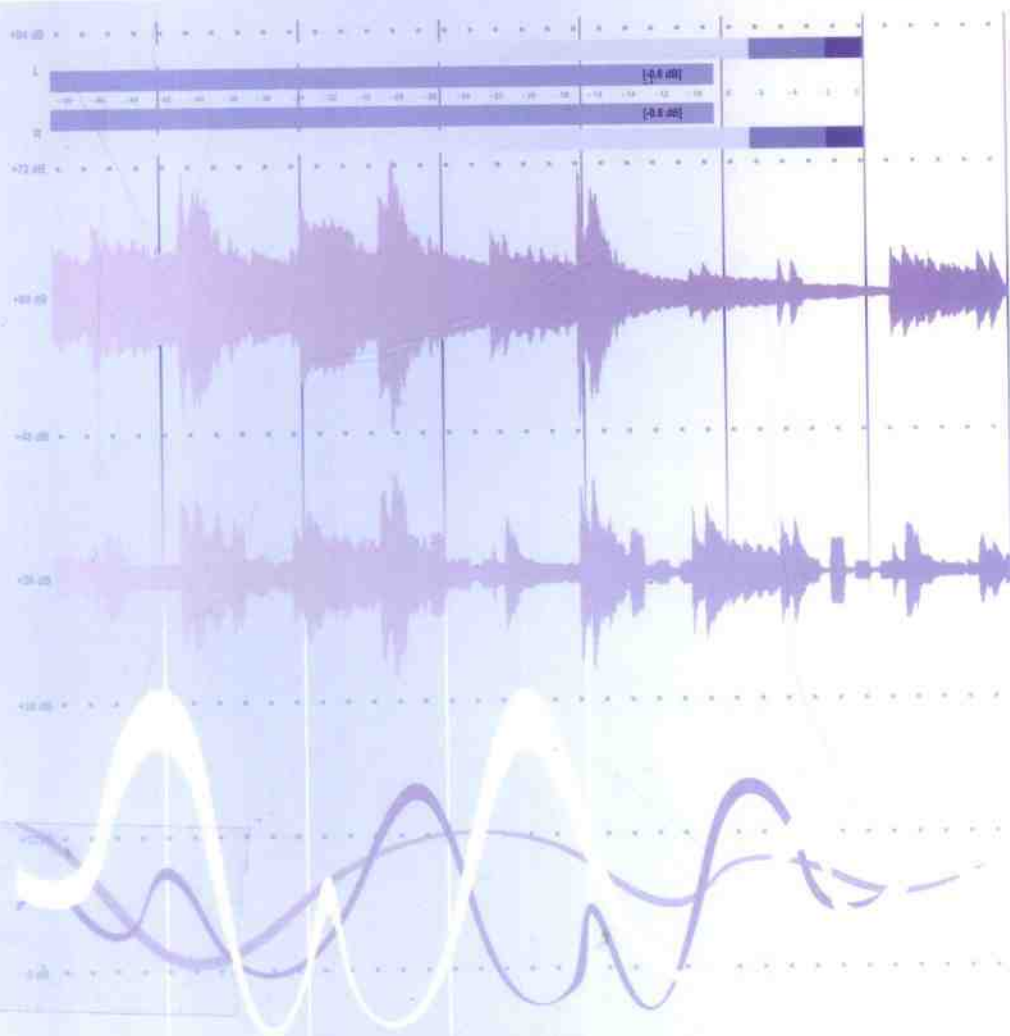


# 通信信道 盲均衡算法 与仿真


· 郭业才 著 ·



 气象出版社  
China Meteorological Press

# 通信信道盲均衡 算法与仿真

郭业才 著

 气象出版社  
China Meteorological Press

## 内容简介

本书以作者近年来在盲均衡算法方面的研究成果为主线,结合国内外相应的研究,较全面地介绍了信道盲均衡的基本理论和近年来的新方法和新成果。对信道均衡的基本理论与算法、分集技术与相位跟踪原理和方法、基于恒参误差函数、变参误差函数、联合误差函数及坐标变换误差函数的盲均衡算法、基于分集技术和相位跟踪方法的盲均衡算法、基于分数间隔的盲均衡算法与级联盲均衡算法及盲均衡算法的 Simulink 仿真实现等,进行了较为详细的阐述。

本书适合从事信息与通信工程领域的科技工作者研读,也可作为高等学校各相关专业研究生的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

通信信道盲均衡算法与仿真/郭业才著. —北京:  
气象出版社, 2009. 12

ISBN 978-7-5029-4893-1

I. 通… II. 郭… III. 通信信道-盲均衡算法  
IV. TN911.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 224784 号

Tongxin Xindao Mangjunheng Suanfa yu Fangzhen

通信信道盲均衡算法与仿真

郭业才 著

出版发行:气象出版社

地 址:北京市海淀区中关村南大街 46 号

总 编 室:010-68407112

网 址:<http://www.cmp.cma.gov.cn>

策划编辑:李太守

责任编辑:林雨晨

封面设计:博思雅企划

印 刷:北京中新伟业印刷有限公司

开 本:787 mm×1092 mm 1/16

字 数:300 千字

版 次:2009 年 12 月第 1 版

定 价:25.00 元

邮政编码:100081

发 行 部:010-68409198

E-mail: [qxcbs@263.net](mailto:qxcbs@263.net)

终 审:周诗健

责任技编:郝 平

印 张:10.5

印 次:2009 年 12 月第 1 次印刷

## 前 言

信道均衡是通信系统中的一项重要技术,其思想是在接收端对信道引起的畸变进行校正,以补偿信道的幅频特性和相频特性,从而提高通信质量。信道均衡可以在时间域进行,称为时域均衡,也可在频率域进行,称为频域均衡;均衡的目的是设计一个均衡器(又称逆滤波器),该均衡器特性正好与信道特性相反,可以有效纠正多径效应和信道畸变对通信质量造成的影响。如果均衡过程需要训练序列,就是自适应均衡器;无需训练序列的均衡器就是盲均衡器。盲均衡的崭新思想,1975年由Sato提出,之后的数十年中,在通信、地球科学、声呐及雷达等领域得到了广泛的应用。盲均衡器的性能可从收敛速度、稳态均方误差、计算复杂度、信噪比、码间干扰等方面来考察。其中,收敛速度和稳态均方误差是最重要的两个衡量指标,它们是一对矛盾,通常一种性能的提高往往是以牺牲另一种性能为代价。如何解决这对矛盾,一直是盲均衡技术中的研究热点与难点。虽然在无线通信领域中,盲均衡技术的研究取得了一些重要成果,但是由于水声信道极其复杂,具有时变、频变、多径衰落特性,可利用带宽极其有限,水声信道盲均衡技术的研究,国内处于起步阶段,亟待解决的理论和实验研究问题较多。针对这种现状,作者及课题组自2002年以来,以水声信道为均衡对象,开展了水声信道盲均衡算法研究,研究成果汇编出版了国内第一部《自适应盲均衡技术》专著(合肥工业大学出版社,2007)。2007年之后,本课题组继续开展这方面的深化研究,研究成果陆续在国际会议和国内重要刊物上发表,本书是在第一部著作《自适应盲均衡技术》及最新研究成果基础上编写而成的。

全书共分6章,第1章概述信道均衡的基本理论;第2章分析了分集技术与相位跟踪原理和方法;第3章定义了恒参误差函数、变参误差函数、联合误差函数及坐标变换误差函数,研究了基于这些误差函数的盲均衡算法;第4章研究了基于分集技术和相位跟踪方法的盲均衡算法;第5章分析了分数间隔的盲均衡算法及级联盲均衡算法;第6章研究了盲均衡算法的Simulink仿真实现。

本书既是本课题组最新研究成果的总结,又可为信道盲均衡理论、算法与仿真进一步深化研究提供借鉴,为同行起抛砖引玉的作用。本书虽然经作者反复地斟酌及仔细校对,但限于作者的水平,书中难免会出现一些错误和不妥之处,诚请专家和读者给以批评指正。

本书在编写过程中,参阅了该领域相关专著及科研成果;我的研究生周巧喜、饶伟、林仁刚等为本书所取得的成果做了大量工作,本书的成果获得了全国博士学位论文作者专项资金(200753)、江苏省自然科学基金项目(BK2009410)、江苏省“六大人才高峰”培养对象资助项目(2008026)、江苏省高等学校自然科学基金项目(08KJB510010)的资助;气象出版社给予了大力支持。在此一并表示诚挚的谢意。

郭业才

2009年10月

于南京信息工程大学

## 目 录

## 前 言

<b>第 1 章 信道均衡概论</b> .....	( 1 )
1.1 均衡器的分类 .....	( 1 )
1.2 自适应均衡原理 .....	( 2 )
1.3 Bussgang 类盲均衡算法 .....	( 14 )
1.4 分数间隔盲均衡算法 .....	( 23 )
<b>第 2 章 分集技术与相位跟踪方法</b> .....	( 27 )
2.1 分集概述 .....	( 27 )
2.2 分集分类 .....	( 28 )
2.3 分集合并 .....	( 32 )
2.4 相位跟踪方法 .....	( 40 )
<b>第 3 章 基于变参误差函数的盲均衡算法</b> .....	( 52 )
3.1 基于恒参误差函数的盲均衡算法 .....	( 52 )
3.2 基于变参误差函数的盲均衡算法 .....	( 57 )
3.3 基于变系数误差函数的盲均衡算法 .....	( 63 )
3.4 基于联合误差函数的盲均衡算法 .....	( 68 )
3.5 基于变参误差函数的判决反馈盲均衡算法 .....	( 70 )
3.6 基于变参误差函数的双模式盲均衡算法 .....	( 75 )
<b>第 4 章 基于分集与相位跟踪原理的盲均衡算法</b> .....	( 86 )
4.1 基于时间分集的判决反馈盲均衡算法 .....	( 86 )
4.2 基于空间分集的判决反馈盲均衡算法 .....	( 90 )
4.3 基于空间分集的判决反馈双模式盲均衡算法 .....	( 93 )
4.4 结合数字锁相环的盲均衡算法 .....	( 96 )
4.5 基于频率分集的盲均衡算法 .....	( 101 )
<b>第 5 章 分数间隔盲均衡算法</b> .....	( 107 )
5.1 分数间隔坐标变换盲均衡算法 .....	( 107 )

---

5.2	基于 $T/2$ 分数间隔的超指数迭代软切换盲均衡算法 .....	(112)
5.3	基于 $T/4$ 分数间隔的盲均衡算法 .....	(117)
5.4	基于 $T/4$ 分数间隔的判决反馈盲均衡算法 .....	(120)
5.5	$T/4$ 分数间隔的判决反馈解相关盲均衡算法 .....	(126)
5.6	分数间隔级联盲均衡算法 .....	(131)
<b>第 6 章</b>	<b>Simulink 的仿真实现 .....</b>	<b>(138)</b>
6.1	Simulink 概述 .....	(138)
6.2	基于恒参误差函数的盲均衡器设计 .....	(143)
6.3	基于变系数误差函数的盲均衡器设计 .....	(148)
6.4	基于恒参误差函数的 DFE 设计及应用 .....	(150)
6.5	基于变系数误差函数的 DFE 设计 .....	(153)
6.6	基于双模式盲均衡算法的 DFE 设计 .....	(153)
<b>参考文献</b>	.....	<b>(158)</b>

## 第1章 信道均衡概论

**【内容提要】**首先给出了均衡器的分类,在分析均方误差(mean squared error, MSE)性能测度及最小均方(least mean squares, LMS)算法的基础上,简述了需要期望信号的,以波特间隔采样的,基于最小均方误差(minimum mean square error, MMSE)准则的均衡器、自适应LMS均衡器、判决引导自适应均衡器及判决反馈均衡器原理;讨论了不需期望信号的Busgang类波特间隔盲均衡算法,包括判决引导(decision directed, DD)算法、Stao算法、Gordard算法等,对其中的常数模算法及其性能进行了较为详尽地分析与说明;最后,在过采样理论的基础上,分析了分数间隔均衡器的一般结构。

在数字通信系统中,由于受多径传输和有限带宽的影响,实际的信道不可能满足信号传输无失真条件,因此,接收端的接收信号不可避免地存在码间干扰(inter-symbol interference, ISI)。在某些场合,如移动通信、水下通信系统中,ISI会严重影响通信质量,于是必须在接收端对信道引起的畸变进行校正,以补偿信道的幅频特性和相频特性,这种校正称为信道均衡<sup>[1,2]</sup>,这种补偿信道畸变特性的滤波器称为均衡器,用这种均衡器在接收机中实施专门的滤波方法就是均衡技术。

### 1.1 均衡器的分类

均衡技术是通过在接收机中实施专门的滤波方法,来补偿由带宽受限、时间色散信道引起的码间干扰。

#### 1.1.1 时域均衡器与频域均衡器

根据是在时域与频域中讨论问题来划分,均衡器分两种:一种是时域均衡器,借助于修改系统的脉冲响应特性,使均衡器与信道的合成冲激响应满足无码间干扰的条件。第二种是频域均衡器,借助于修改系统的频率特性,使均衡器与信道的合成频率响应满足无码间干扰的条件。

#### 1.1.2 线性均衡器与非线性均衡器

根据信号处理方法的不同,均衡器一般分为线性和非线性两大类,每类均衡器又都具有横向和格形两种结构,如图1.1所示<sup>[3]</sup>。

对于每类结构都有一组对均衡器权向量自适应调整的算法。

线性均衡器(linear equalizer, LE)能消除由于滤波特性不良造成的码间干扰,但是当信道具有频谱零点时,线性均衡器又会增强噪声,使信道有效的信噪比降低,所以常用于最小相位

信道的均衡和信道干扰不太严重的场合。但由于线性均衡器结构和算法两方面的简单性,至今仍然被普遍采用。

非线性均衡器可有效地克服频率选择性衰落,因此适用于信道失真较大的情况。



图 1.1 均衡器的分类

### 1.1.3 自适应均衡器和盲自适应均衡器

从是否需要训练序列来划分,均衡器可分为自适应均衡器和盲自适应均衡器(或自适应盲均衡器)。自适应均衡器实质上就是一个自适应滤波器,用来自动补偿由于信道的非理想频率特性而产生的畸变,自适应均衡器对接收信号进行“逆滤波”,以消除多径效应造成的码间干扰,但它需要不停地发送训练序列。盲自适应均衡器不需要训练序列就能补偿信道畸变所造成的影响,它是这样一类自适应滤波算法:不需要外部供给期望响应,就能够产生与希望恢复的输入信号在某种准则下最逼近的滤波器输出。换言之,算法对期望响应是“盲”的。然而,算法本身在自适应过程中通过一个非线性变换产生期望响应的估计。这种自适应滤波器习惯称为盲均衡器,因为它们不用期望响应(“盲”),但要使滤波器输出与希望恢复的输入信号相等(“均衡”)。

### 1.1.4 波特间隔均衡器与分数间隔均衡器

根据采样速率来划分,均衡器可分为波特间隔均衡器与分数间隔均衡器。波特间隔均衡器是抽头间隔为码元间隔的均衡器,使用码率或波特率对输入输出信号进行采样的均衡器;分数间隔均衡器是对信道输出信号以比码率更高的速率进行采样的均衡器。

## 1.2 自适应均衡原理

由于信道往往是未知且时变的,因此均衡器必须是自适应的。通常情况下,均衡器具有抽头延迟线结构,均衡器的抽头使用自适应算法来更新。

理论上讲,由更新算法得到的均衡器与信道的传递函数互为倒数,作用相互抵消,从而获得最佳传输波形,以消除 ISI、恢复原始信号,同时使有限的带宽得以充分利用。因此,自适应均衡器特在水声信道均衡中得到了成功应用<sup>[4]</sup>。

传统的自适应均衡过程一般包括训练和跟踪两种模式。首先,由发射机发射已知的固定长度的训练序列,均衡器抽头根据训练序列作一定的调整,发射机在发送训练序列后发送用户



数据。训练序列的设计必须能够在最恶劣的信道条件下,当训练序列结束以后,使得均衡器系数接近最优。这样,当接收用户数据时,自适应均衡器就能跟踪信道的变化。为了保证始终有效地抑制 ISI,需要周期地、重复不断地训练均衡器。

图 1.2 描述了自适应滤波在自适应信道均衡中的应用原理。

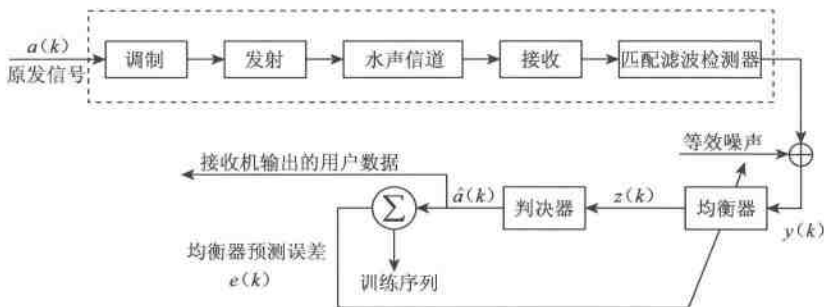


图 1.2 数据传输系统中自适应均衡器模型

最初,传输一个已知的时间极短的训练序列,用合适的自适应算法来调整均衡器的系数。在训练之后实际的数据序列  $\{y(k)\}$  被传输。均衡器对信道特性的缓慢变化进行连续跟踪,从而对系数进行调整,用判定误差来代替已知的训练序列。当判定误差较小时,这种方法效果较好。

调整自适应均衡器系数的算法设计,是均衡器补偿信道性能的关键技术。在所有自适应均衡算法中,最小均方(LMS)算法是最基本、最简单的算法,这种算法是基于最小均方误差准则的,使滤波器的输出信号与期望输出信号之间的均方误差最小,属于最速下降类型的算法,由 Widrow 和 Hoff(1960)引入,其计算量小、易于实现,在实践中被广泛应用。闭环自适应 LMS 算法的自适应权值收敛速度依赖于输入相关矩阵的特征值离散情况,若其中最大的特征值与最小的特征值相差很多,则由于小特征值的影响,使权向量的自适应收敛速度变得很慢。

### 1.2.1 均方误差性能测度

均方误差(MSE)性能测度最早是由维德罗(B. Widrow)等人提出的,这种测量方法适用于一个总的系统输出为期望响应  $d(k)$  和自适应系统输出  $y(k)$  之差的系统。

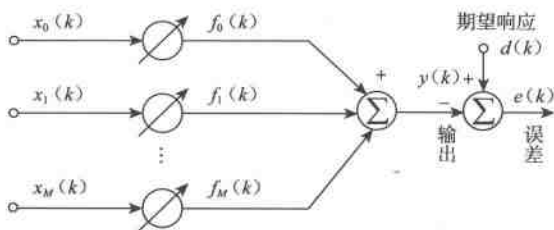


图 1.3 利用 MSE 性能测度的自适应系统

如图 1.3 所示,系统由一个自适应线性组合器和一个相减器组成,在  $k$  时刻系统输出误差为

$$e(k) = d(k) - y(k) \quad (1.2.1)$$

线性组合器的输出为

$$y(k) = \mathbf{f}^T(k) \mathbf{x}(k) \quad (1.2.2)$$

$$\text{式中 } \mathbf{x}(k) = [x_0(k), x_1(k), \dots, x_M(k)]^T \quad (1.2.3a)$$

$$\mathbf{f}(k) = [f_0(k), f_1(k), \dots, f_M(k)]^T \quad (1.2.3b)$$

式中上标 T 表示矩阵的转置。式(1.2.3a)和(1.2.3b)分别为自适应系统在  $k$  时刻的输入信号向量和权向量。于是系统的代价函数定义为

$$J(\mathbf{f}) = E[|e(k)|^2] = E[|d(k) - \mathbf{f}^H \mathbf{x}(k)|^2] \quad (1.2.4)$$

式中上标 H 表示矩阵的埃尔米特共轭。展开上式,得到

$$J(\mathbf{f}) = E[d(k)d^*(k)] - E[d(k)\mathbf{x}^H(k)]\mathbf{f} - \mathbf{f}^H E[\mathbf{x}(k)d^*(k)] + \mathbf{f}^H E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)]\mathbf{f} \quad (1.2.5)$$

为求得权向量的最优值,式(1.2.5)对权向量  $\mathbf{f}$  求偏导,有

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} J(\mathbf{f}) = 2E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)]\mathbf{f} - 2E[\mathbf{x}(k)d^*(k)] = 2\mathbf{R}_{xx}\mathbf{f} - 2\mathbf{R}_{xd} \quad (1.2.6)$$

式中  $\mathbf{R}_{xx}$  是接收信号向量  $\mathbf{x}(k)$  的自相关矩阵,即

$$\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)] \quad (1.2.7)$$

而  $\mathbf{R}_{xd}$  是数据向量  $\mathbf{x}(k)$  与期望信号  $d(k)$  的互相关向量,即

$$\mathbf{R}_{xd} = E[\mathbf{x}(k)d^*(k)] \quad (1.2.8)$$

令  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} J(\mathbf{f}) = 0$ , 则得

$$\mathbf{R}_{xx}\mathbf{f} = \mathbf{R}_{xd} \quad (1.2.9)$$

若  $\mathbf{R}_{xx}$  满秩,则有

$$\mathbf{f}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{xd} \quad (1.2.10)$$

下标 opt 表示最优化。式(1.2.10)是在最小均方误差(MMSE)意义下的最佳权向量,也是 Wiener 滤波理论中最佳滤波器的标准形式及 Wiener-Hopf 方程。

将式(1.2.7)与(1.2.8)代入式(1.2.5),得

$$J(\mathbf{f}) = E[|d(k)|^2] - 2\text{Re}[\mathbf{f}^T \mathbf{R}_{xd}] + \mathbf{f}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{f} \quad (1.2.11)$$

将式(1.2.10)代入式(1.2.11),得

$$\begin{aligned} J_{\min}(\mathbf{f}) &= E[|d(k)|^2] + \mathbf{R}_{xd}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{f}_{\text{opt}} - 2\mathbf{f}_{\text{opt}}^H \mathbf{R}_{xd} \\ &= E[|d(k)|^2] - \mathbf{R}_{xd}^H \mathbf{f}_{\text{opt}} \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

在输入为无噪声的理想情况下,系统的代价函数  $J_{\min}(\mathbf{f})$  趋于零;而通常输入为有噪声情况下,  $J_{\min}(\mathbf{f})$  不为零。

## 1.2.2 最小均方(LMS)算法

LMS 算法是一种应用最为广泛的最优化算法,它基于“下降算法”。按照最陡下降算法的思想,在  $k+1$  时刻的权向量可以通过下面简单的递归关系来计算

$$\mathbf{f}(k+1) = \mathbf{f}(k) + \mu(k)[- \nabla_{\mathbf{f}} J] \quad (1.2.13)$$

式中  $J = E[e^2(k)]$  为代价函数,  $\nabla_{\mathbf{f}} J = \nabla_{\mathbf{f}} (E[e^2(k)])$  是均方误差性能函数  $J$  的梯度值,误差信号  $e(k)$  定义为期望输出与实际输出之间的误差

$$e(k) = d(k) - y(k) = d(k) - \mathbf{f}^H(k) \mathbf{x}(k) \quad (1.2.14)$$

根据式(1.2.13),有

$$f(k+1) = f(k) + 2\mu[\mathbf{R}_{xd} - \mathbf{R}_{xx}f(k)] \quad (1.2.15)$$

实际中,对梯度向量的精确测量是不可能得到的,因为这需要  $\mathbf{R}_{xx}$  和  $\mathbf{R}_{xd}$  的先验知识。一个显而易见的方法是使用其瞬时值  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$  和  $\hat{\mathbf{R}}_{xd}$ , 即

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx}(k) = \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k) \quad (1.2.16)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{xd}(k) = \mathbf{x}(k)d^*(k) \quad (1.2.17)$$

于是权向量更新公式为

$$\hat{f}(k+1) = \hat{f}(k) + \mu[d^*(k) - \mathbf{x}^H(k)\hat{f}(k)]\mathbf{x}(k) = \hat{f}(k) + \mu e^*(k)\mathbf{x}(k) \quad (1.2.18)$$

式中常量  $\mu$  控制随机向量  $f(k)$  的收敛特性。为方便起见,将  $\hat{f}(k)$  也写为  $f(k)$ , 这时式(1.2.18)就写为

$$f(k+1) = f(k) + 2\mu[d^*(k) - \mathbf{x}^H(k)f(k)]\mathbf{x}(k) = f(k) + 2\mu e^*(k)\mathbf{x}(k) \quad (1.2.19a)$$

式中误差信号  $e^*(k)$  为

$$e^*(k) = d^*(k) - \mathbf{x}^H(k)f(k) = d^*(k) - y(k) \quad (1.2.19b)$$

式(1.2.19a)的标量形式为

$$f_i(k+1) = f_i(k) + \mu e^*(k)x_i(k) \quad i=1,2,\dots,M \quad (1.2.19c)$$

在横向滤波器中,  $x_i(k) = x(k-i+1)$ , 所以, 上式可写为

$$f_i(k+1) = f_i(k) + \mu e^*(k)x(k-i+1) \quad i=1,2,\dots,M \quad (1.2.19d)$$

LMS 算法是逐个样本更新的算法, 当信道环境的统计特征平稳且未知时, 逐个样本更新的算法可以很好地工作。LMS 的缺点是其收敛特性依赖于  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$  的特征结构, 当特征值分布很开时, 其收敛速度较慢。

目前 LMS 算法应用很广泛, 根据在迭代过程中权值是否受约束又可以分为有约束和无约束 LMS 算法两种。当存在参考信号, 而不知道期望信号的方向时, 无约束 LMS 算法用得比较多, 其步长的选择很重要, 它影响到收敛速度和稳定性。而在仅知道期望信号的方向时, 可采用有约束的 LMS 算法。LMS 算法的流程, 如表 1.1 所示。

表 1.1 LMS 算法的流程

步骤	操作内容
参数选取	$M$ 为滤波器长度 $\mu$ 步长因子, $0 < \mu < 1$ 信噪比
初始化	$f(0)$ 为权向量初值
运算过程	对于 $k \geq 1$ 获取数据 $\mathbf{x}(k), d(k)$ $y(k) = \mathbf{f}^H \mathbf{x}(k)$ $e(k) = d(k) - y(k)$ $f(k+1) = f(k) - 2\mu e^*(k)\mathbf{x}(k)$

### 1. 加权向量的收敛性<sup>[5]</sup>

在 LMS 算法中, 递推公式的修正值用  $\mathbf{x}(k)d^*(k)$  和  $\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)$  作为  $E\{\mathbf{x}(k)d^*(k)\}$  和  $E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)\}$  的估计。假定输入向量  $\mathbf{x}(k)$  和 LMS 算法的加权向量  $f(k)$  不相关, 则可证明: LMS 算法的加权向量的平均值  $E\{f(k)\}$  将按最陡下降法的加权向量的变化规律变化。

现在,根据  $\mathbf{x}(k)$  和  $f(k)$  不相关这一假设,来寻求 LMS 算法的加权向量平均值的变化规律。将 LMS 算法的递推公式(1.2.19a)改写为

$$\mathbf{f}(k+1) = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)]\mathbf{f}(k) + 2\mu\mathbf{x}(k)d^*(k) \quad (1.2.20)$$

对上式求平均,并根据  $\mathbf{x}(k)$  和  $f(k)$  不相关,得

$$\mathbf{E}\{\mathbf{f}(k+1)\} = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{E}\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)\}]\mathbf{E}\{\mathbf{f}(k)\} + 2\mu\mathbf{E}\{\mathbf{x}(k)d^*(k)\} \quad (1.2.21)$$

或 
$$\mathbf{E}\{\mathbf{f}(k+1)\} = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}_{xx}]\mathbf{E}\{\mathbf{f}(k)\} + 2\mu\mathbf{R}_{xd} \quad (1.2.22)$$

令误差向量  $\mathbf{V}(k)$  为

$$\mathbf{V}(k) = \mathbf{f}(k) - \mathbf{f}_{\text{opt}}$$

则 
$$\mathbf{E}\{\mathbf{V}(k)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{f}(k)\} - \mathbf{f}_{\text{opt}} \quad (1.2.23)$$

由式(1.2.23),得

$$\mathbf{E}\{\mathbf{V}(k+1)\} = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}_{xx}]\mathbf{E}\{\mathbf{V}(k)\} \quad (1.2.24)$$

$$\mathbf{E}\{\mathbf{V}(k)\} = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}_{xx}]^k \mathbf{V}(0) \quad (1.2.25)$$

式中

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{f}(0) - \mathbf{f}_{\text{opt}} \quad (1.2.26)$$

同样有

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} \quad (1.2.27)$$

再令

$$\mathbf{V}'(k) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{V}(k)$$

即 
$$\mathbf{E}\{\mathbf{V}'(k)\} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{E}\{\mathbf{V}(k)\} \quad (1.2.28)$$

由式(1.2.25),得

$$\mathbf{E}\{\mathbf{V}'(k)\} = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{A}]^k \mathbf{V}'(0) \quad (1.2.29)$$

由式(1.2.23),得

$$\mathbf{E}\{\mathbf{f}(k)\} = \mathbf{f}_{\text{opt}} + \mathbf{Q}[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{A}]^k \mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{f}(0) - \mathbf{f}_{\text{opt}}] \quad (1.2.30)$$

根据上面的讨论,即可研究 LMS 算法的加权向量的平均值的收敛性及过渡过程。

(1)收敛性

由式(1.2.29)和(1.2.30)知,当且仅当满足条件

$$0 < \mu < 1/\lambda_{\max} \quad (1.2.31)$$

有 
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{\mathbf{f}(k)\} = \mathbf{f}_{\text{opt}} \quad (1.2.32)$$

式(1.2.31)为 LMS 算法的加权向量平均值的收敛条件。

再分析加权向量的平均值  $f(k)$  的过渡过程。由式(1.2.29),得

$$\mathbf{E}\{\mathbf{V}'_i(k)\} = (\mathbf{I} - 2\mu\lambda_i)^k \mathbf{V}'_i(0) \quad (1.2.33)$$

式中  $\mathbf{E}\{\mathbf{V}'_i(k)\}$ 、 $\mathbf{V}'_i(0)$  分别为  $\mathbf{E}\{\mathbf{V}'(k)\}$ 、 $\mathbf{V}'(0)$  的第  $i$  个分量,  $\lambda_i$  为  $\mathbf{R}_{xx}$  的第  $i$  个特征值。

引入时间常数

$$\tau_i = \frac{1}{\ln(\mathbf{I} - 2\mu\lambda_i)} \approx \frac{1}{2\mu\lambda_i} \quad (1.2.34)$$

式(1.2.33)可写成

$$\mathbf{E}\{\mathbf{V}'_i(k)\} = \mathbf{V}'_i(0) \exp(-k/\tau_i) \quad (1.2.35a)$$

再由式(1.2.23)和式(1.2.28),得

$$\mathbf{E}\{\mathbf{f}(k)\} = \mathbf{f}_{\text{opt}} + \mathbf{Q}\mathbf{E}\{\mathbf{V}'(k)\} \quad (1.2.35b)$$

从而

$$\mathbf{E}\{f_i(k)\} = f_{\text{opt}i} + \sum_{k=1}^M C_{ik} \exp(-k/\tau_i) \quad (1.2.36)$$

式中  $\mathbf{E}\{f_i(k)\}$  为  $\mathbf{E}\{\mathbf{f}(k)\}$  的第  $i$  个分量。式(1.2.36)指出, LMS 算法的加权向量的平均值同

样按  $M$  个指数函数之和变化。从而,最陡下降法中关于加权向量的过渡过程的结论亦适用于 LMS 算法的加权向量的平均值。特别是,由于  $E\{f_i(k)\}$  取决于最慢的一个指数过程,该过程有  $\mathbf{R}_{xx}$  的  $\lambda_{\min}$  和  $\mu$  决定。对 LMS 算法可推导出与最陡下降法的完全一样的收敛过程最大时间常数。实际上,对于平均加权向量来说,根据式(1.2.34)和式(1.2.31),最大时间常数为

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2\mu\lambda_{\min}} > \frac{\lambda_{\max}}{2\lambda_{\min}} = \frac{1}{2} \text{cond}(\mathbf{R}_{xx}) \quad (1.2.37)$$

式中  $\text{cond}(\mathbf{R}_{xx})$  为  $\mathbf{R}_{xx}$  的条件数。所以,与最陡下降法一样,当  $\mathbf{R}_{xx}$  的特征值分散时,即其条件数很大时,即  $\mathbf{R}_{xx}$  称为病态时,LMS 算法的收敛性很差。另外,与最陡下降法类似, $\mu$  值对  $E\{f_i(k)\}$  的收敛过程有很大影响, $\mu$  必须满足收敛条件。并且,在收敛范围内, $\mu$  愈大, $E\{f_i(k)\}$  收敛愈快。但  $\mu$  过大时,过渡过程将出现振荡,如图 1.4 所示。

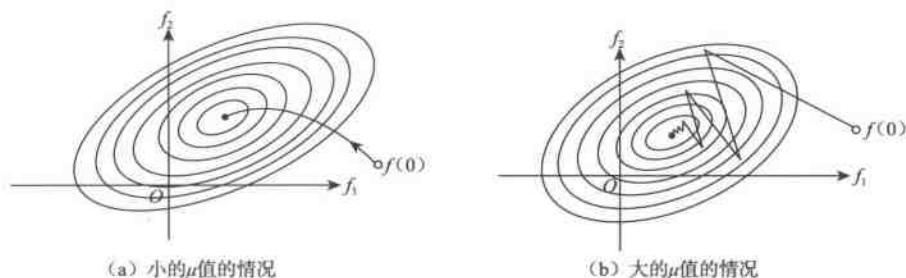


图 1.4  $\mu$  的影响

## (2) 均方误差的过渡过程<sup>[5]</sup>

自适应算法均方误差的过渡过程又称学习曲线。由于 LMS 算法的加权向量的平均值的变化规律与最陡下降法的加权向量一样,因此 LMS 算法的均方误差  $J = E\{e^2(k)\}$  应该近似地按照最陡下降法的均方误差变化规律变化,现分析之。

$$\begin{aligned} e(k) &= d(k) - \mathbf{f}^H(k) \mathbf{x}(k) \\ &= d(k) - \mathbf{f}_{\text{opt}}^H(k) \mathbf{x}(k) - [\mathbf{f}(k) - \mathbf{f}_{\text{opt}}]^H \mathbf{x}(k) \\ &= e_{\text{opt}}(k) - \mathbf{V}^H(k) \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (1.2.38)$$

式中加权误差向量  $\mathbf{V}(k) = \mathbf{f}(k) - \mathbf{f}_{\text{opt}}$ , 而  $e_{\text{opt}}(k)$  为  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{opt}}$  时的误差信号,称为最佳误差信号,即

$$e_{\text{opt}}(k) = d(k) - \mathbf{f}_{\text{opt}}^H \mathbf{x}(k) \quad (1.2.39)$$

最佳误差信号对应于最小均方误差,即

$$E\{|e_{\text{opt}}(k)|^2\} = J_{\min} \quad (1.2.40)$$

且满足正交原理

$$E\{\mathbf{x}(k) e_{\text{opt}}^*(k)\} = 0$$

根据式(1.2.38),均方误差表达式为

$$\begin{aligned} J &= E\{|e(k)|^2\} = E\{|e_{\text{opt}}(k)|^2\} + E\{\mathbf{V}^H(k) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \mathbf{V}(k)\} \\ &\quad - 2\text{Re}\{E[\mathbf{V}^H(k) \mathbf{x}(k) e_{\text{opt}}^*(k)]\} \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

根据正交原理,上式最后一项为零。上式第二项涉及 4 个随机变量之积。同样,假定  $\mathbf{V}(k)$  和  $\mathbf{x}(k)$  独立,则式(1.2.41)可表示为

$$J \approx J_{\min} + E\{\mathbf{V}^H(k)\} \mathbf{R}_{xx} E\{\mathbf{V}(k)\}$$

$$\begin{aligned}
&= J_{\min} + \mathbf{E}\{\mathbf{V}'^H(k)\} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}\{\mathbf{V}'(k)\} \\
&= J_{\min} + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\mathbf{E}\{V'_i(k)\})^2
\end{aligned} \tag{1.2.42}$$

式中  $\mathbf{V}'(k) = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V}(k)$ , 且  $V'_i(k)$  为  $\mathbf{V}'(k)$  的第  $i$  个分量。

利用式(1.2.35a)可知, 对于 LMS 算法来说, 近似式(1.2.42)可表示为

$$J \approx J_{\min} + \sum_{i=1}^M [\lambda_i V_i^2(0)] \exp(-2k/\tau_i) \tag{1.2.43}$$

式中时间常数  $\tau_i$  可由下式求出, 即

$$\tau_{i\text{MSE}} = \frac{\tau_i}{2} \approx \frac{1}{4\mu\lambda_i} \tag{1.2.44}$$

式(1.2.44)表明, LMS 算法的均方误差变化规律即其学习曲线近似地为几个不同的时间常数的指数之和。

## 2. 稳态误差及失调系数<sup>[5]</sup>

由于 LMS 算法在  $\mathbf{E}\{f(k)\}$  收敛到最佳值  $f_{\text{opt}}$  后, 加权向量继续按下式迭代

$$\mathbf{f}(k+1) = \mathbf{f}(k) + 2\mu \mathbf{e}^*(k) \mathbf{x}(k)$$

其修正值  $2\mu \mathbf{e}^*(k) \mathbf{x}(k)$  不为零而是继续随机起伏, 从而使  $\mathbf{f}(k)$  继续随机起伏。这就使得 LMS 算法的  $\mathbf{E}\{f(k)\}$  收敛到  $f_{\text{opt}}$  (即  $\mathbf{E}\{\mathbf{V}(k)\}$  收敛到零) 后, 均方误差  $J$  将大于维纳(Wiener)误差  $J_{\min}$ 。

Widrow 引入失调系数

$$\kappa = \frac{J - J_{\min}}{J_{\min}} \tag{1.2.45}$$

来描述 LMS 算法的稳态均方误差对维纳误差的相对偏差。

现对 LMS 算法的  $\kappa$  进行估计, 首先对加权向量的误差向量  $\mathbf{V}(k)$  的方差  $\mathbf{E}\{\mathbf{V}(k)\mathbf{V}^H(k)\}$  进行近似值估计。

利用  $\mathbf{V}(k)$  的定义及 LMS 算法的递推公式, 有

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(k+1) &= \mathbf{f}(k+1) - f_{\text{opt}} = \mathbf{f}(k) - f_{\text{opt}} + 2\mu \mathbf{e}^*(k) \mathbf{x}(k) \\
&= [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k)] \mathbf{V}(k) + 2\mu \mathbf{x}(k) \mathbf{e}_{\text{opt}}^*(k)
\end{aligned} \tag{1.2.46}$$

为求  $\mathbf{V}(k)$  方差的近似值, 用下式来近似式(1.2.46)

$$\mathbf{V}(k+1) = [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}_{xx}] \mathbf{V}(k) + 2\mu \mathbf{x}(k) \mathbf{e}_{\text{opt}}^*(k) \tag{1.2.47}$$

由式(1.2.26), 可将式(1.2.47)写为

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V}(k+1) = [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{\Lambda}] \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V}(k) + 2\mu \mathbf{e}_{\text{opt}}^*(k) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}(k) \tag{1.2.48}$$

令

$$\mathbf{V}'(k) = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V}(k) = \mathbf{Q}^H \mathbf{V}(k) \tag{1.2.49}$$

则有

$$\mathbf{V}'(k+1) = (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{\Lambda}) \mathbf{V}'(k) + 2\mu \mathbf{e}_{\text{opt}}^*(k) \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}(k) \tag{1.2.50}$$

假定  $\mathbf{x}(k)$  与  $\mathbf{V}'(k)$  不相关, 由式(1.2.50)可得  $\mathbf{V}'(k)$  的方差矩阵为

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{[\mathbf{V}'(k+1)][\mathbf{V}'(k+1)]^H\} &= [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{\Lambda}] \mathbf{E}\{[\mathbf{V}'(k)][\mathbf{V}'(k)]^H\} [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{\Lambda}] \\
&\quad + 4\mu^2 \mathbf{E}\{\mathbf{e}_{\text{opt}}^*(k) \mathbf{e}_{\text{opt}}^*(k) [\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}(k)] [\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}(k)]^H\}
\end{aligned} \tag{1.2.51}$$

假定有关变量均为高斯变量, 利用高斯均值分解定理及正交原理, 将式(1.2.51)简化为

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\{[\mathbf{V}'(k+1)][\mathbf{V}'(k+1)]^H\} \\
&= [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{\Lambda}] \mathbf{E}\{[\mathbf{V}'(k)][\mathbf{V}'(k)]^H\} [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{\Lambda}] + 4\mu^2 J_{\min} \mathbf{\Lambda}
\end{aligned} \tag{1.2.52}$$

式中  $J_{\min} = E\{|e_{\text{opt}}(k)|^2\}$  为维纳误差。

当  $k \rightarrow \infty$  时,有

$$E\{[\mathbf{V}'(k+1)][\mathbf{V}'(k+1)]^H\} \approx E\{[\mathbf{V}'(k)][\mathbf{V}'(k)]^H\} \quad (1.2.53)$$

同时,为保证收敛,通常取

$$\mu\lambda_i \ll 1 \quad (1.2.54)$$

利用式(1.2.53)、式(1.2.52)及式(1.2.54),得

$$E\{[\mathbf{V}'(k)][\mathbf{V}'(k)]^H\} = \mu J_{\min} \mathbf{I} \quad (1.2.55)$$

再由式(1.2.49),得

$$E\{[\mathbf{V}(k)][\mathbf{V}(k)]^H\} = \mu J_{\min} \mathbf{I} \quad (1.2.56)$$

现在来估计 LMS 算法的失调系数。由于假定  $\mathbf{x}(k)$  与  $\mathbf{V}(k)$  不相关,得

$$J = J_{\min} + E\{[\mathbf{V}^H(k)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)\mathbf{V}(k)]\} \quad (1.2.57)$$

现在不用  $E\{\mathbf{V}(k)\}$  来近似  $\mathbf{V}(k)$ ,以便分析  $\mathbf{V}(k)$  的随机起伏的影响。因为  $E\{[\mathbf{V}^H(k)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)\mathbf{V}(k)]\}$  为标量,利用矩阵迹的公式  $\text{tr}(\mathbf{ABC}) = \text{tr}(\mathbf{BCA})$ ,并根据  $\mathbf{V}(k)$  和  $\mathbf{x}(k)$  不相关的假设及矩阵的迹的定义,得

$$J = J_{\min} + \text{tr}[E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k)\}E\{\mathbf{V}(k)\mathbf{V}^H(k)\}] \quad (1.2.58)$$

将  $\mathbf{V}(k)$  方差的渐进式(1.2.56)代入式(1.2.58)得

$$J = J_{\min} + \text{tr}[\mathbf{R}_{xx}(\mu J_{\min} \mathbf{I})] = J_{\min} + \mu J_{\min} \text{tr} \mathbf{R}_{xx} = \left(1 + \mu \sum_{i=1}^M \lambda_i\right) J_{\min} \quad (1.2.59)$$

从而 LMS 算法的失调系数可表为

$$\kappa = \frac{J - J_{\min}}{J_{\min}} = \mu \text{tr} \mathbf{R}_{xx} \quad (1.2.60a)$$

$$\kappa = \mu \sum_{i=1}^M \lambda_i \quad (1.2.60b)$$

这就是说,滤波器阶数愈高,步长因子  $\mu$  和输入信号功率愈大,就使得失调系数愈大。

### 1.2.3 基于 MMSE 准则的均衡器

线性 MSE 均衡器的工作原理是通过调整均衡器的权向量,使期望值和估计值的均方误差最小化。设  $a(k)$  为发送端在第  $k$  个码元间隔发出的信息码元值,期望值取为  $d(k) = a(k)$ ,  $a(k)$  的估计值为  $\hat{a}(k)$ ,则误差信号为

$$e(k) = d(k) - \hat{a}(k) \quad (1.2.61)$$

$$\text{式中} \quad \hat{a}(k) = \sum_{j=-N}^N f_j(k) y(k-j) \quad (1.2.62)$$

式中  $y(k)$  为均衡器的输入序列。这时代价函数为

$$J = E\{|d(k) - \hat{a}(k)|^2\} = E\left\{\left|d(k) - \sum_{j=-N}^N f_j(k) y(k-j)\right|^2\right\} \quad (1.2.63)$$

根据式(1.2.62),式(1.2.63)是均衡器抽头系数  $f_j(k)$  的二次函数,要使  $J$  最小,需要调整  $f_j(k)$  的大小。根据均方估计的正交性原理,等价于使误差函数  $e(k) = d(k) - \hat{a}(k)$  与输入信号  $y^*(k-l)$  正交,  $|l| \leq N$ ,即

$$E[e(k)y^*(k-l)] = E\left[\left(d(k) - \sum_{j=-N}^N f_j(k) y(k-j)\right) y^*(k-l)\right] = 0 \quad (1.2.64)$$

或等价于

$$\sum_{j=-N}^N f_j(k) \mathbb{E}[y(k-j)y^*(k-l)] = \mathbb{E}[d(k)y^*(k-l)] \quad (1.2.65a)$$

$$\text{式中} \quad y(k) = \sum_{i=-N}^N c_i(k)a(k-i) + n(k) \quad (1.2.65b)$$

将式(1.2.65b)代入式(1.2.65a),得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y(k-j)y^*(k-l)] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^N c_i(k)a(k-j-i) + n(k-j)\right)\right. \\ &\quad \left.\cdot \left(\sum_{i'=0}^N c_{i'}^*(k)a^*(k-l-i') + n^*(k-l)\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{i'=0}^N c_i(k)c_{i'}^*(k) \mathbb{E}[a(k-j-i)a^*(k-l-i')] + \mathbb{E}[n(k-j)n^*(k-l)] \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{i'=0}^N c_i(k)c_{i'}^*(k) \delta(i+j-l-i') + S_0 \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=0}^N c_i(k)c_{i+j-l}^*(k) + S_0 \delta_{ij} \\ &= \Gamma_{ij} \quad l, j = -N, \dots, -1, 0 \end{aligned} \quad (1.2.66)$$

式中  $S_0$  为 AWGN 信道的单边带功率谱。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[d(k)y^*(k-l)] &= \mathbb{E}\left[d(k) \sum_{i=0}^N c_i^*(i)d^*(k-l-i) + n^*(k-l)\right] \\ &= \sum_{i=0}^N c_i^*(k) \mathbb{E}[d(k)d^*(k-l-i)] \\ &= \sum_{i=0}^N c_i^*(k) \delta(l+i) \\ &= c_{-l}^*(k) \quad l = -L, \dots, -1, 0 \end{aligned} \quad (1.2.67)$$

根据式(1.2.66)和(1.2.67),式(1.2.65a)可以简化写成

$$\sum_{j=-N}^N f_j(k) \Gamma_{lj} = c_{-l}^*(k) \quad (1.2.68a)$$

式中  $c_{-l}^*(k)$  为信道向量  $\mathbf{c}(k)$  的第  $-l$  个抽头复系数。式(1.2.68a)写成矩阵形式

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{f} = \mathbf{c} \quad (1.2.68b)$$

式中  $\mathbf{f}$  是均衡器权向量,  $\mathbf{\Gamma}$  为  $(2N+1) \times (2N+1)$  协方差矩阵,  $\mathbf{c}$  是  $N+1$  维列向量, 其元素为  $c_{-l}^*(k)$ 。由式(1.2.68)可得最优抽头系数矩阵

$$\mathbf{f}_{\text{opt}} = \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{c} \quad (1.2.69)$$

可以根据式(1.2.69)调整均衡器抽头系数使代价函数最小, 实现 MSE 均衡。

可以使用代价函数的最小值  $J_{\min}$  衡量均衡器在信道噪声和码间干扰共同影响之下的均衡效果。由式(1.2.63), 得

$$J = \mathbb{E}[|d(k) - \hat{a}(k)|^2] = \mathbb{E}[e(k)d^*(k)] - \mathbb{E}[e(k)\hat{a}^*(k)] \quad (1.2.70)$$

根据式(1.2.62)和式(1.2.64), 可知  $\mathbb{E}[e(k)\hat{a}^*(k)] = 0$ , 则有

$$J_{\min} = \mathbb{E}[e(k)d^*(k)] = \mathbb{E}[|\mathbf{I}_k|^2] - \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(k) \mathbb{E}[y(k-j)d^*(k)]$$



$$= 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(k)c_{-j}(k) \quad (1.2.71)$$

均衡器输出的信噪比(signal-to-noise ratio, SNR)定义为

$$\text{SNR} = (1 - J_{\min}) / J_{\min} \quad (1.2.72)$$

由于线性 MSE 均衡器在克服严重的码间干扰方面具有较大的局限性,所以,实际的高速数字通信系统很少采用,取而代之的是可以动态调整均衡器抽头系数的自适应均衡器。基于 MMSE 准则的均衡器减小或消除码间干扰的准则并不是奈奎斯特(Nyquist)准则,所以是次最优均衡器。

#### 1.2.4 判决引导自适应均衡器

自适应均衡器可以采用基于 LMS 算法的线性均衡器。采用 LMS 自适应均衡器就要求知道期望信号  $d(k)$ 。为了获得期望信号  $d(k)$ ,一种办法是定期由发送端向接收端传送已知的信号,又称为训练(training)信号、导引信号或导频(pilot)信号。另一种方法是采用判决检测器,直接由滤波器输出产生  $d(k)$ ,这个方法是由贝尔实验室的 Lucky 首先提出,并称为判决引导法<sup>[6]</sup>。

在信道上传输的数字信息可能是双电平量化,也可能是多电平量化。判决检测器应与之对应。图 1.5 所示的是适于双电平量化的数字信息的判决检测器。

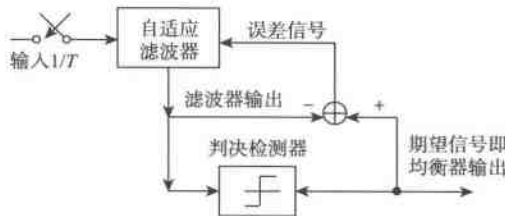


图 1.5 采用量化检测器的自适应均衡器

其原理如下:

双电平判决检测器为一门限为零的判决器。当其输入为零或正时,判决输出为  $+A$ ;当输入为负时,判决输出为  $-A$ 。双电平量化的数字信息可能为  $+A$  或  $-A$ (相当于数据为 1 或 0)。如果线路没有失真或者噪声,或者失真和噪声很小,则当数据为 1 时(其电平为  $+A$ ),滤波器输出大于零的概率相当大,判决输出为  $+A$ ,即为 1;而当数据为 0 时(其电平为  $-A$ ),滤波器输出小于零的概率相当大,判决输出为  $-A$ ,即为 0;这时判决正确的概率相当大。当有一定的失真和噪声时,判决正确和错误均有一定的概率。只有判决正确,均衡器才能工作。实验证明,即使最初有 25% 的量化判决是错误的,自适应滤波器也能沿着正确的方向调整自己的参数并收敛到最佳解。这种方法的一个问题是:当失真较大时,收敛前的高差错率可能使滤波器虚假收敛到局部极值点,而不是总体极值点。图 1.6 给出了更详细的 LMS 自适应均衡器的框图<sup>[6]</sup>。