名师帮你学数学

陈振宣等编著

高中代数(下)

中国青年出版社

名师帮你学

数 学

（高中代数·下）

陈振宣 等

中国青年出版社

(京)新登字083号

责任编辑:赵惠宗
封面设计:沈云瑞

图书在版编目(CIP)数据

名师帮你学数学:高中代数·下/陈振宣等编著.一北京:中国青年出版社,1994,8

ISBN7-5006-1611-2

Ⅰ.名… Ⅱ.陈… Ⅲ.代数-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634,624

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第02338号

名师帮你学数学(高中代数·下)

陈振宣 等

*

中国青年出版社出版 发行

社址:北京东四12条21号 邮政编码:100708

空军指挥学院印刷厂印刷 新华书店经销

*

787×1092 1/32 10.25印张 205千字

1994年8月北京第1版 1994年8月北京第1次印刷

ISBN 7-5006-1611-2/G·398 定价6.40元

主要作者简介

陈振宣 杭州市人。上海老中教一级。退休后被上海师大教科所聘为特邀研究员，1993年被上海市新学科研究所思维科学室聘为研究员。1994年被中国管理科学研究院思维科学研究所评为研究教授。

作者长期从事数学思维方法及思维科学研究，主要著作有《中学数学思维方法》、《数学思想方法入门》、《数学题解辞典》、《高考中常用的数学思想方法》等。

马　明　南京师大附中原副校长，特级教师，国家教委中小学教材审定委员会中学数学审查委员，南京师大数学系兼职教授，江苏省中小学数学教学研究会副理事长。

主要作品有《马明数学教育论文集》、《周期函数初论》、《三角浅说》、《圆和二次方程》、《同解方程和同解不等式》、《节约的数学》、《初中数学思维训练与解题方法》、《高中数学解题思路训练》等。

杨象富　浙江宁海县人，宁海中学教科室主任。1981 年评为特级教师，1989 年批准为中国数学奥林匹克高级教练。近年曾受聘参加全国高考和全国高中数学联赛命题工作。

作者已在宁海中学(省重点中学)执教 42 年，坚持联系实际进行数学教育研究，已出版《杨象富数学教学经验》、《中学数学综合题的解法发现》、《高中代数复习与研究》等十种。

赵大悌　1940 年生，山东乐陵人。北京海淀教师进修学校中学教研室副主任、数学组长。北京数学教学研究会常务理事、北京数学会普委会副主任。1991 年被评为北京市特级教师。参加过北京市高师院校高考命题、全国高考“考试说明”的审定、北京市数学竞赛的命题等工作。曾到全国十几个省市讲学，并参加编写书籍数十本，在省市级以上刊物发表文章数十篇。

前　言

数学教育历来存在两种策略思想，一是“以多取胜”，另一是“以少御多”. 上世纪末英国出版了一系列颇有影响的教科书：*Chrystal* 的《*Text Book of Algebra*》，*Hall and Knight* 的高等代数与三角，*Loney* 的三角、坐标几何，都以题型丰富、难题多、解法巧妙见长. 这些书流行几十年. 此风东渐，日本的上野清编写了以《大代数讲义》为代表的一系列讲义，实际上是上述英国教材的编译之作. 此后长泽龟之助又有以题解为中心的《数学辞典》问世，逐渐介绍到我国来，使“以多取胜”的策略在中国数学教育界占统治地位，影响深远，且有愈演愈烈之势. 然而“题海”无边，既苦了教师与学生，又不能真正提高广大学生的数学素质. 于是，“题海”的危害日益成为教育界的共识：一是加重了学生的负担，严重摧残青少年的身心健康；二是把学生的思维禁锢于机械摹仿的定势之中，而难以自拔，造成高分低能. 因此，反对“题海”之声一阵高于一阵. 但在激烈的考试竞争之中，多数教师又不得不搞“题海”. 坊间习题集，*A*、*B* 卷已成泛滥之势，教育行政领导部门屡禁而不止. 这就是目前亚洲地区数学教育中的“怪圈”.

要跳出“怪圈”，非改弦易辙，走“以少御多”之路不可.

要“以少御多”，既减轻负担，又提高质量，必须探索总结数学教育的内在规律. 按规律办事，才能真正提高数学素质，逐步达到不怕考题千变万化，都能游刃有余，跳出“题海”，走上数学教育的坦途.

数学素质的核心是数学思维的素质. 根据我们的研究，要提高数学思维的水平，必须抓住以下三条：

第一，要熟练掌握数学思维的载体，在数学语言与数学知识的理解与运用方面下功夫.数学语言有三种形态：①自然语言(这是理解数学概念与原理的基础)；②数学符号语言(这是简缩数学思维，提高思维效率的根本)；③数学图象语言(这是形象思维的载体).注意符号语言与图象语言的互译，是抽象思维与形象思维，左、右脑协同操作的训练，是开发大脑潜能的重要途径之一.

第二，要强化数学思维方法的概括与领会，知识与语言是思维的工具，思维方法则是思维的导航器."题海"只注意题型归类和解题模式的汇集，形成各式套路，让学生去摹仿，这无助于思维水平的提高.数学思维方法是从思维的高度引导学生作概括，一旦真正领会，应用之广与灵活变化，是初料所难以估计的.有的学生对思维方法有所理解之后说："似乎忽然自觉聪明起来了".反映了他们的真实感受.

第三，要注意情感因素与心理素质的培养.人是有情感的，人的思维总是伴随情感而进行，情感可能激励思维，也可能成为思维的障碍.数学思维要正常发挥，不能不注意心理素质的培养.通过数学教育逐步转变学生的学习态度，培养兴趣、意志、毅力，顽强的探究意识，善于排除情绪波动，保持思维的积极态势.情感与心理素质是思维能力的另一侧面，千万忽视不得.

以上是我们编写这套书的动机与指导思想，我们的具体做法是：

1.与教材同步配套，以教材的大节或大体上相当于一周的学习内容，将每一章分为若干讲，便于与教材配合学习.

2.每讲有一段无标题的引言，对所学内容提出简明的要求及学习方法指导，引导入门，利于复习和深入.

3. 每讲的范例是本书的主体，开头是对概念性强、思维灵活的基础题（不少是自编的）的分析，用以加深理解、发展运用知识与语言的能力，进而通过剖析典型综合题，引导从思维的高度作概括，逐步领会常用的数学思维方法，提高捕捉正确合理的解题思路的能力.

4. 每章之末的小结，旨在教会“从厚到薄”与“从薄到厚”的治学方法，使一门学科的内容“收之可藏于密，放之则弥六合”，形成知识网络，明白内容经纬，便于检索和应用. 同时把握住这一知能发展的最佳时期，通过综合性较强的范例，以扩大全章学习的收获，加强对数学思维方法的理解. 运用妙题巧解，实际应用，激发兴趣，转变数学态度，形成智力因素与情感因素的良性循环.

5. 最后一册《中学数学思想方法选讲》，将前五册涉及的数学思维方法，进行系统提高，使认识与情感获得升华，脑潜能得到充分开发.

阅读引言和范例的分析与说明，犹如聆听名师指导点拨，每周一练既精选又精编，竭力为师生免于题海之苦着想.

丛书主编组由马明、陈振宣、杨象富、赵大悌、赵惠宗同志组成. 本册由陈振宣同志主持编写. 参加编写的还有王永利、张莉萍、袁其祥等同志.

编写这样的课外读物，还是初次尝试，敬请读者指正. 让我们共同努力，逐步形成一套摆脱题海，跳出怪圈，提高素质，利于实用，具有特色的学生课外读物.

目　　录

第五章　不 等 式

第一讲　不等式及其性质

本章主要学习不等式的性质、不等式的证明和不等式的解法. 通过本章学习要培养逻辑推理能力、等价与非等价转化、逻辑划分和变量变换的思想. 正确理解和掌握不等式的基本概念和性质，这是本章学习的关键.

研究不等式的基础是由于实数集不仅是有序集(任二个实数可以规定顺序)，而且实数集对于加法、乘法运算是保序的(定理 3、4)，因此实数集也是一个实数域. 这一性质反映在本节教材的不等式的概念和四个定理之中，务必要求逐步理解和掌握.

【范例】

例 1　下列哪一个关系是错的?

(1)若 $a>b$，则(　　).

(A)$a+1>b+1$　　(B)$a-3>b-3$

(C)$-5a<-5b$　　(D)$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

(2)若 $a>b, b>c$，则(　　).

(A)$a+b>b+c$　　(B)$a-b>b-c$

(C)$a(b-c)>b(b-c)$　　(D)$\frac{a}{c-b}<\frac{b}{c-b}$

(3)若 $a<b, c<0$，则(　　).

(A)$ac>bc$　　(B)$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

(C)$ac^2<bc^2$　　(D)$\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$

解　(1)由于题目条件仅指出 $a>b$,未指出 $ab>0$,故当 $ab<0$ 时,关系式$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$就不成立,故应选(D).

(2)(C)、(D)是根据不等式对乘法的单调性,可知是正确的,(A)是利用不等式对加法的单调性,也是正确的.(B)表面上和(A)相差不大,但实际有很大差异,它说明两个同向不等式一般不能相减,相减后可能成立,也可能不成立.但两个同向不等式一定可以相加.我们可以观察一些数值加以说明,取 $a=7,b=5,c=4$,或 $a=7,b=5,c=-2$,便可知 $a-b>b-c$,对前一组数成立而后一组数就不成立.

(3)因为 $a<b$,没有指出 $ab>0$,故$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$不一定成立.因此推不出$\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$,故应选(D).

例 2　若 $a>b>0$,下列各式中恒成立的是(　　).

(A)$\frac{2a+b}{a+2b}>\frac{a}{b}$　　(B)$\frac{b^2+1}{a^2+1}>\frac{b^2}{a^2}$

(C)$a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$　　(D)$a^a>a^b$

解　考察这些不等式,可以利用不等式的性质,或利用特殊值法进行淘汰不符合的不等式.利用不等式的性质可知,当 $a>b>0$ 时,$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,故(C)不恒成立.当 $0<a<1,a>b$ 时,可知 $a^a<a^b$,故(D)不成立,如果选取特殊值 $a=2,b=1$,可知 $\frac{2a+b}{a+2b}=\frac{5}{4},\frac{a}{b}=2$,故(A)不成立.由于是单项选择题,本题仅留下的答案(B)应是满足题意的解.

说明 选择题中使用取特殊值的方法,往往用于淘汰某些选择支,如果采用特殊值使某些不等式成立,并不表示这个不等式一定成立.

例 3 已知$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$,$0\leqslant\beta\leqslant\pi$,则 $2\alpha-\frac{\beta}{2}$的范围是

__________.

解 $\because\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$,$\therefore\quad -\pi\leqslant 2\alpha\leqslant\pi$,

又$\because\quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi$,$-\frac{1}{2}<0$,由不等式性质知

$$-\frac{1}{2}\pi\leqslant-\frac{1}{2}\beta\leqslant 0,$$

$\therefore\quad -\frac{3}{2}\pi\leqslant 2\alpha-\frac{1}{2}\beta\leqslant\pi.$

所以答案应填$-\frac{3}{2}\pi\leqslant 2\alpha-\frac{1}{2}\beta\leqslant\pi$.

例 4 已知 $0<\alpha<\pi$,试比较 $2\sin2\alpha$ 与 $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$的大小.

分析 要比较两数大小,只要考察它们的差就可以了,又因这两个三角函数的自变量不一致,故要设法作变换使自变量大小一致.

解 $2\sin2\alpha-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=2\cdot2\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$=\frac{4\sin^2\alpha\cos\alpha-(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{4\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)-(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{(1+\cos\alpha)[4\cos\alpha(1-\cos\alpha)-1]}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{-4(1+\cos\alpha)(\cos\alpha-\frac{1}{2})^2}{\sin\alpha},$$

$\because\quad 0<\alpha<\pi$,

$\therefore\quad \sin\alpha>0, 1+\cos\alpha>0, (\cos\alpha-\frac{1}{2})^2\geqslant 0$，当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时等号成立. 故 $2\sin2\alpha-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\leqslant 0$. 这表示当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，$2\sin2\alpha=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$；当 $0<\alpha<\pi$，而 $\alpha\neq\frac{\pi}{3}$ 时，$2\sin2\alpha<\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

例 5 若 $m>0$，比较 m^m 与 2^m 的大小.

分析 为了比较 m^m 与 2^m 的大小，注意到 $m^m>0, 2^m>0$，可采用比商法，即根据 $m^m:2^m$ 大于 1；等于 1；小于 1 来判断. 讨论三种情况 $m=2, m<2, m>2$.

当 $m=2$，$m^m:2^m=\left(\frac{m}{2}\right)^m=\left(\frac{2}{2}\right)^2=1$，此时 $m^m=2^m$，

当 $m<2$，$\left(\frac{m}{2}\right)^m<1$，此时 $m^m<2^m$，

当 $m>2$，$\left(\frac{m}{2}\right)^m>1$，此时 $m^m>2^m$.

说明 逻辑划分(分类)思想是数学中重要思想方法，分类要求做到不空、不漏、不相交. 把 m 的取值，分成 $m<2, m=2, m>2$ 三种情况就是一种正确的分类.

例 6 如果 a、$b\in R$，试证明 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，并指出何时等号成立.

证 $\because\quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\frac{(a+b)^2-4ab}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}\geqslant 0$，当 $a=b$ 时等号成立.

又 $\because\quad \frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{2a^2+2b^2-(a+b)^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}\geqslant 0$，当 $a=b$ 时等号成立.

$\therefore ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

例 7 当 $1<a<b<a^2$，比较 $\log_a b$、$\log_b a$、$\log_a\frac{a}{b}$、$\log_b\frac{b}{a}$、

$\frac{1}{2}$的大小.

分析 由于要比较的几个数都是对数，我们联想到对数的性质，以及对数函数的单调性. 对于底数大于 1 的对数来说，真数小于 1、等于 1、大于 1 的对数分别是负数、零和正数，底数本身的对数是 1，这些都是比较大小的理论依据.

解 $\because$ $1<a<b$，$\therefore \log_a b>\log_a a=1$，而 $0<\log_b a=\frac{1}{\log_a b}<1$，$\because \frac{a}{b}<1$，$\therefore \log_a \frac{a}{b}<0$，而 $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}>\frac{1}{\log_a a^2}=\frac{1}{2}$

$(\because 1<b<a^2)$

$0<\log_b \frac{b}{a}=1-\log_b a<1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，这样，其大小顺序是 $\log_a \frac{a}{b}<\log_b \frac{b}{a}<\frac{1}{2}<\log_b a<\log_a b$.

例 8 比较 $(x_1-x_2)^2+y_2^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_3+x_1)^2+y_3^2$ 与 $x_1^2+x_2^2+y_2^2+x_3^2+y_3^2$ 的大小.

解 $\because$ $(x_1-x_2)^2+y_2^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_3+x_1)^2+y_3^2-(x_1^2+x_2^2+y_2^2+x_3^2+y_3^2)$

$=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+y_2^2+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+y_2^2-2y_2y_3+y_3^2+x_3^2+2x_1x_3+x_1^2+y_3^2-x_1^2-x_2^2-y_2^2-x_3^2-y_3^2$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_3x_1+(y_2-y_3)^2$

$=(x_1+x_3-x_2)^2+(y_2-y_3)^2\geqslant 0$

$\therefore$ $(x_1-x_2)^2+y_2^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_3+x_1)^2+y_3^2\geqslant x_1^2+x_2^2+y_2^2+x_3^2+y_3^2$.

当且仅当 $x_1+x_3=x_2$，且 $y_2=y_3$ 时，等号成立.

例 9 证明在$\triangle ABC$ 中，有 $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$（$S$ 表示$\triangle ABC$ 的面积，a、b、c 代表三角形的边长），并问等号何时成立.

解 $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S$

$$=a^2+b^2+a^2+b^2-2ab\cos C-4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$=2[a^2+b^2-ab(\sqrt{3}\sin C+\cos C)]$$

$$=2[a^2+b^2-2ab\sin(30°+C)]$$

$$\geq 2[a^2+b^2-2ab]=2(a-b)^2\geqslant 0.$$

等号成立的条件是 $\sin(30°+C)=1$ 和 $a-b=0$，即 $C=60°$，$a=b$，故此三角形是等边三角形.

说明 此不等式称 *Weitzenleck* 不等式，其证法已有 20 多种，本题的结论是有关三角形的边长 a、b、c 和它的面积之间关系.

关键 理解与熟练不等式的性质是本讲的关键，而判断两个实数的大小可以作两个数的差，或两个数的商（两数均为正数时），有时也利用函数的单调性，从思维方法来分析，都是等价转化思想的运用.

【练习一】

A 组

1. 填空题

(1)已知 $a<b<0$，$c>0$，用下列符号（"$>$"、"$<$"、"$\geqslant$"、"$\leqslant$"、"$=$"）之一联接各代数式.

①若 $ad>bd$，则 d ________ 0；

②$\frac{c}{a}$ ________ $\frac{c}{b}$；

③$(a-5)c$ ________ $(b-5)c$；

④若 $-\frac{\pi}{2}<\theta_1<\theta_2<\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\theta_1$ ________ $\sin\theta_2$；

⑤若 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，则 $\cos\theta$ ________ $\sin\theta$；

⑥$\frac{a}{b}$________1.

(2)$a>b$，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$同时成立的条件是________.

(3)若 $a>b$，$c>d$，举出 $a-c>b-d$ 不成立的一个例子为________.

(4)设 $1\leqslant a\leqslant 5$，$-1\leqslant b\leqslant 2$，则 $a-b$ 的范围是________.

(5)已知 $1<x<a$，则$(\log_a x)^2$ 与 $\log_a x^2$ 的大小关系是$(\log_a x)^2$ ______ $\log_a x^2$.

(6)当 p、q、x、$y\in R^+$，则 $q>p$、$x>y$ 时，有 $\frac{x}{x+p}$________$\frac{y}{y+q}$.

(7)若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$(a、b、c 为实数)，并且$\{x|f(x)=0\}=\varnothing$，$\{x|f(x)>0\}=R$，则 a、b、c 应满足的条件是________.

(8)已知 $6<a<10$，$\frac{a}{2}\leqslant b<2a$，$c=a+b$，那末 c 的取值范围是________.

2.选择题

(1)若 $b<0<a$，$d<c<0$，则下列各式中恒成立的是(　　).

(A)$ac>bd$　　　　(B)$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

(C)$a+c>b+d$　　　　(D)$a-c>b-d$

(2)下列命题中正确的是(　　).

(A)$a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$

(B)$ab>c$，$b\neq 0\Rightarrow a>\frac{c}{b}$