題解中心

代數學辭典

日本長澤龜之助 原著
薛德炯 吳載耀 編譯

上海 新亞書店 出版

題解中心

代數學辭典

日本 長澤龜之助原著
薛德炯 吳載耀編譯

上海新亞書店出版

代數學辭典

長澤龜之助著

一九三五年六月初版
一九五二年二月八版

定價人民幣八〇〇〇〇元

編譯者　薛德炯　吳載耀

出版者　新亞書店
上海河南中路159號
電話: 94258

總發行所　中國科技圖書聯合發行所
上海中央路24號304室
電話:19566　電報掛號:21968

分銷處　南京　重慶　漢口　貴陽　新亞書店

14001—18500

公式

交換律

◎和與其被加數之順序無關.

$a+b+c=b+a+c=c+b+a=\cdots\cdots.$

◎積與其因數之順序無關.

$a\times b\times c=a\times c\times b=b\times c\times a=\cdots\cdots.$

組合律

◎以符號表和時,可任意分其各項為羣.

$a+b+c+d=a+(b+c+d)$

$=(a+b)+(c+d)=\cdots\cdots.$

◎以符號表積時,可任意分其因數為羣.

$a\times b\times c=a\times(b\times c)=b\times(a\times c)=\cdots\cdots.$

分配律

◎由若干項所成之式,乘以某數,等於此式之各項,乘以同數.

$(a+b+c+d)m=am+bm+cm+dm.$

◎反之,由若干項所成之式,除以某數,等於此式之各項,除以同數.

$(a+b+c+d)\div n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}+\frac{d}{n}.$

指數律

◎$a^m\times a^n=a^{m+n}.$

◎反之,若 $m>n$, 則 $a^m\div a^n=a^{m-n}.$

若 $m<n$, 則 $a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}.$

符號律

◎加法　$+a+(+b)=+(a+b).$

$-a+(+b)=-(a-b)[a>b].$

$=+(b-a)[a<b].$

$+a+(-b)=+(a-b)[a>b].$

$=-(b-a)[a<b].$

$-a+(-b)=-(a+b).$

◎減法　$+a-(+b)=+(a-b)[a>b].$

$=-(b-a)[a<b].$

$+a-(-b)=+(a+b).$

$-a-(+b)=-(a+b).$

$-a-(-b)=-(a-b)[a>b].$

$=+(b-a)[a<b].$

◎乘法　$(+a)\times(+b)=+ab.$

$(-a)\times(+b)=-ab.$

$(+a)\times(-b)=-ab.$

$(-a)\times(-b)=+ab.$

◎除法　$(+ab)\div(+a)=+b.$

$(-ab)\div(+a)=-b.$

$(-ab)\div(-a)=+b.$

$(+ab)\div(-a)=-b.$

公式及因數

◎$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

◎$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

◎$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$

◎$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

◎$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$

◎$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$

◎$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

◎$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

⊙$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

⊙$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$
$$=-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2$$
$$=16s(s-a)(s-b)(s-c)\left[s=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\right].$$

⊙$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab.$

⊙$(a+b+c)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6abc.$

⊙$(\Sigma a)^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab$. 卽作 $a+b+\cdots\cdots$ 之平方時,可作各項之平方,及各文字與其次文字之積之 2 倍,而取其和.

⊙二同次式之積或商,爲一同次式. 更多同次式之積亦然.

⊙含 x 之任意有理整式中,以 a 代入 x 後,其式爲零,則此式得爲 $x-a$ 所整除.

⊙剩餘定理. x 之有理整式,除以 $x-a$ 而得之剩餘,卽以 a 代入此式之 x 而得之值.

⊙$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2$
$$+\cdots\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}).$$

⊙$a^{2m+1}+b^{2m+1}=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b$
$$+a^{2m-2}b^2-\cdots\cdots-ab^{2m-1}+b^{2m}).$$

⊙$a^{2m}-b^{2m}=(a+b)(a^{2m-1}-a^{2m-2}b$
$$+a^{2m-3}b^2-\cdots\cdots+ab^{2m-2}-b^{2m-1}).$$

⊙$a^{2m}+b^{2m}=(a+b)(a^{2m-1}-a^{2m-2}b$
$$+a^{2m-3}b^2-\cdots\cdots-b^{2m-1})+2b^{2m}.$$

⊙$a^{2m+1}-b^{2m+1}=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b$
$$+a^{2m-2}b^2-\cdots\cdots+b^{2m})-2b^{2m+1}.$$

⊙$\Sigma(b-c)=(b-c)+(c-a)+(a-b)=0.$

⊙$\Sigma a(b-c)=a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$
$$=0.$$

⊙$\Sigma(b^2-c^2)=\Sigma(b+c)(b-c)=0.$

⊙$(b-c)(c-a)(a-b)$
$$=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$$
$$=-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$$
$$=-bc(b-c)-ca(c-a)-ab(a-b).$$

⊙$(b+c)(c+a)(a+b)$
$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$$
$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$$
$$=\Sigma a^2b+2abc.$$

⊙$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=bc(b+c)$
$$+ca(c+a)+ab(a+b)+a^3+b^3+c^3.$$

⊙$(a+b+c)(bc+ca+ab)=a^2(b+c)$
$$+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc.$$

⊙$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=a^2(b+c)$
$$+b^2(c+a)+c^2(a+b)-a^3-b^3-c^3-2abc.$$

⊙$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2.$

⊙$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$
$$+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2.$$

⊙$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$
$$=(ax+by+cz+dw)^2$$
$$+(ay-bx+cw-dz)^2$$
$$+(az-bw-cx+dy)^2$$
$$+(aw+bz-cy-dx)^2.$$

由此結果考察之,可知自其左上向下之對角線上,爲 a, b, c, d 與 x 之組合,其符號爲 $+---$. 依此交叉法,考察其餘,亦可發見其符號及文字之組合,有一定之規律. 故此結果,如能少加注意,卽甚易記憶.

⊙對稱式[互換者]. 一式中互換其二文字,而式值不變,則此式爲此二文字之互換對稱式. 例如 $bc+ca-mabc$ 爲 a, b 之互換對稱式.

⊙對稱式[輪換者]. 一式中以第一文字爲第二文字,以第二文字爲第三文字,以第三文字爲第一文字,而式值不變,則此式爲

此三文字之輪換對稱式.例如 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ 爲 a, b, c 之輪換對稱式.

⊙設二式爲同文字之對稱式,則其和差積商皆爲對稱式.

⊙以下數例,爲互換同次對稱式:

一次　$A(x+y)$.

二次　$A(x^2+y^2)+Bxy$.

三次　$A(x^3+y^3)+B(x^2y+xy^2)$.

四次　$A(x^4+y^4)+B(x^3y+xy^3)+Cx^2y^2$.

一次　$A(x+y+z)$.

二次　$A(x^2+y^2+z^2)+B(yz+zx+xy)$.

三次　$A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+Cxyz$.

⊙以下數例,爲輪換同次對稱式.

二文字 x, y 之式,與互換同.

三文字 x, y, z 之式,至二次止,與互換同.

三次　$A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+y^2z+z^2x)+C(xy^2+yz^2+zx^2)+Dxyz$.

⊙下式爲 x, y, z 之互換或輪換二次不同次對稱式:

$$A(x^2+y^2+z^2)+B(yz+zx+xy)+C(x+y+z)+D.$$

⊙若干文字之交代式中,命其任何二文字相等,則式值爲零.

⊙交代式與交代式之積或商爲對稱式.

⊙對稱式與交代式之積或商,爲交代式

⊙最簡交代式.　a, b, c 之最簡交代式爲

$$\Pi(b-c)=(b-c)(c-a)(a-b).$$

⊙若干文字之交代式,得爲其最簡交代式所整除.

公約數及公倍數

⊙設 A 及 B 之最大公約數爲 G, 最小公倍數爲 L, 又 $A=aG$, $B=bG$, 則

$$L=abG=A\times\frac{B}{G}=B\times\frac{A}{G}=\frac{A\times B}{G}.$$

分　數

⊙$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$.　$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}$.

⊙$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots}$

$$=\left(\frac{pa_1{}^n+qa_2{}^n+\cdots\cdots}{pb_1{}^n+qb_2{}^n+\cdots\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

方 程 式

⊙一元一次方程式 $ax+b=0$ 之根爲 $x=-\dfrac{b}{a}$.

⊙二元一次方程式 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 之根爲

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\quad y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$$

⊙三元一次方程式 $ax+by+cz=d$, $a'x+b'y+c'z=d'$, $a''x+b''y+c''z=d''$ 之根爲

$$x=\frac{d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)}.$$

y 之值,可將 x 值中之 a, b, c, 變爲 b, c, a 以求得之; z 之值,可由 y 之值,仿前變化以求得之; 但如是所得之 x, y, z 值,分母相等.

⊙二次方程式 $ax^2-b=0$ 之根爲 $x=\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

若 $ab>0$, 則爲實根;若 $ab<0$, 則爲虛根.

⊙二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

若 $b^2-4ac>0$, 則爲相異之實根,

若 $b^2-4ac=0$, 則爲相等之實根,

若 $b^2-4ac<0$, 則爲相異之虛根.

⊙根與係數之關係. 設 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β, 則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

冪 及 根

⊙$a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=a^{m+n+p+\cdots\cdots}$.

⊙$(a^m)^n=a^{mn}$.

⊙$(a^xb^yc^z\cdots\cdots)^m=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\cdots\cdots$

⊙$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$.

⊙$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$.

⊙$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$.

⊙$a^0=1, \ a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.

⊙$\sqrt{(a\pm\sqrt{b})}$

$$=\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}.$$

不 等 式

⊙設 $a>b$, 則 $a+x>b+x, \ -a<-b$,

又 $ma>mb[m>0], \ ma<mb[m<0]$.

⊙設 $a_1>b_1, \ a_2>b_2, \ a_3>b_3, \cdots\cdots, \ a_n>b_n$, 一切文字皆爲正數, 則

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n>b_1b_2b_3\cdots\cdots b_n.$$

⊙設文字皆爲負, $a>b$, $c>d$, 則 $ac<bd$.

⊙設 $a>b$, a, b 爲正數, 則

$$a^m>b^m[m>0], \ a^m<b^m[m<0].$$

⊙設 $ax+b>0$, 則

$$x>-\frac{b}{a}[a>0], \ x<-\frac{b}{a}[a<0].$$

⊙$ax^2+bx+c>0$ 中,

設 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 α, β $[\alpha>\beta]$, 且 α, β 俱爲實數,則

$a>0$ 時, $x>\alpha$, 或 $x<\beta$.

$a<0$ 時, $\alpha>x>\beta$.

設 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲虛數,則

$a>0$ 時, x 之一切値皆適合,

$a<0$ 時,不等式爲不可能.

⊙$ax^2+bx+c<0$, 得與以上相反之結果.

⊙設 $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots(x-a_n)>0$, 則欲適合此不等式, 須 $x>a_1$, 或 $a_2>x>a_3, \cdots\cdots, \ a_{2r}>x>a_{2r+1}, \cdots\cdots\cdots$. [但 $a_r>a_{r+1}$].

⊙$ax+by+c=0\cdots\cdots(1), \ a'x+b'y+c'\gtrless0\cdots\cdots(2)$ 之解答 [由 (1) 得未知數之一, 例如以 y 表他未知數,以之代入 (2), 而得一不等式,解之,卽得 $y\lesseqgtr\alpha$] 爲 $x=-\frac{c+by}{a}$, $y\gtrless\alpha$.

⊙$(x^2+y^2+z^2+\cdots\cdots)(a^2+b^2+c^2+\cdots\cdots)$

$$\nless(ax+by+cz+\cdots\cdots)^2.$$

⊙設 a, b 爲正,則 $\frac{a+b}{2}\nless\sqrt{ab}$.

⊙若干正數之相加平均數,大於其相乘平均數.

⊙設 m 及 r 爲正,且 $m>r$, 則

$$\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots+a_n^m}{n}$$

$$\nless\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots\cdots+a_n^r}{n}$$

$$\times\frac{a_1^{m-r}+a_2^{m-r}+\cdots\cdots+a_n^{m-r}}{n}.$$

⊙設 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ 爲正, $\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots=m$,

則 $\frac{\Sigma a_1{}^m}{n} \nless \frac{\Sigma a_1{}^\alpha}{n}\cdot\frac{\Sigma a_1{}^\beta}{n}\cdot\frac{\Sigma a_1{}^\gamma}{n}\cdots\cdots$.

⊙設 $a, b, c,\cdots\cdots$ 爲正整數, $\alpha, \beta, \gamma,\cdots\cdots$ 爲正數, 則 $\left(\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+\cdots\cdots}{a+b+c+\cdots\cdots}\right)^{a+b+c+\cdots\cdots}$ $\nless \alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots\cdots$.

極 大 極 小

⊙若干正數之積爲一定, 則其和之極小, 在各數相等時.

⊙若干正數之和爲一定, 則其積之極大, 在各數相等時.

⊙設文字表正數, $x^m y^n z^p\cdots\cdots$ 爲一定, 則其和 $x+y+z+\cdots\cdots$ 之極小, 在 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\cdots\cdots$ 時.

⊙設文字表正數, $x+y+z+\cdots\cdots$ 爲一定, 則積 $x^m y^m z^p\cdots\cdots$ 之極大, 在 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\cdots\cdots$ 時.

⊙設 ax^2+bx+c 中, $a>0$ 時之極小値, $a<0$ 時之極大値爲 $\frac{4ac-b^2}{4a}$, 則對應於此之 x 値爲 $-\frac{b}{2a}$.

⊙欲求 $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ 之極大或極小値, 可命其等於 y, 作一方程式, 而求令 x 値爲實數之條件, 解 y 之二次不等式以求得之.

比　　例

⊙設 $ad=bc$, 則 $a:b=c:d$.

⊙反之, 設 $a:b=c:d$, 則 $ad=bc$.

⊙又設 $a:b=c:d$, 則

$b:a=d:c$ [反比定理].

$a+b:b=c+d:d$ [合比定理].

$a\sim b:b=c\sim d:d$ [分比定理].

$a+b:a\sim b=c+d:c\sim d$ [分合比定理].

$a:c=b:d$ [更比定理].

$a^n:b^n=c^n:d^n$.

$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

⊙設 $a:a'=b:b'=c:c'=\cdots\cdots$, 則 $a:a'=b:b'=c:c'=\cdots\cdots=a+b+c+\cdots\cdots:a'+b'+c'+\cdots\cdots$.

⊙設 $a:b=b:c=c:d$, 則 $a:c=a^2:b^2$, $a:d=a^3:b^3$, $b^2=ac$.

變　數　法

⊙設 $A\propto B$, $B\propto C$, 則 $A\propto C$.

⊙設 $A\propto B$, $C\propto D$, 則 $AC\propto BD$.

⊙設 $A\propto B$, 則 $A^n\propto B^n$.

⊙設 C 爲一定時, $A\propto B$, 又 B 爲一定時, $A\propto C$, 則 B, C 俱變時, $A\propto BC$.

級　　數

⊙設等差級數中, 初項爲 a, 末項爲 l, 公差爲 d, 項數爲 n, 和爲 s, 則

已　知	公　　　式
$a\ d\ n$	$l=a+(n-1)d$.
$a\ d\ s$	$l=-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[2ds+(a-\frac{1}{2}d)^2]}$.
$a\ n\ s$	$l=\frac{2s}{n}-a$.
$d\ n\ s$	$l=\frac{s}{n}+\frac{(n-1)d}{2}$.
$a\ d\ n$	$s=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$.

$a\ d\ l$	$s=\dfrac{l+a}{2}+\dfrac{l^2-a^2}{2d}.$
$a\ n\ l$	$s=(l+a)\dfrac{n}{2}.$
$d\ n\ l$	$s=\frac{1}{2}n[2l-(n-1)d].$
$d\ n\ l$	$a=l-(n-1)d.$
$d\ n\ s$	$a=\dfrac{s}{n}-\dfrac{(n-1)d}{2}.$
$d\ l\ s$	$a=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{[(l+\frac{1}{2}d)^2-2ds]}.$
$n\ l\ s$	$a=\dfrac{2s}{n}-l.$
$a\ n\ l$	$d=\dfrac{l-a}{n-1}.$
$a\ n\ s$	$d=\dfrac{2(s-an)}{n(n-1)}.$
$a\ l\ s$	$d=\dfrac{l^2-a^2}{2s-l-a}.$
$n\ l\ s$	$d=\dfrac{2(nl-s)}{n(n-1)}.$
$a\ d\ l$	$n=\dfrac{l-a}{d}+1.$
$a\ d\ s$	$n=\dfrac{d-2a\pm\sqrt{[(2a-d)^2+8ds]}}{2d}.$
$a\ l\ s$	$n=\dfrac{2s}{l+a}.$
$d\ l\ s$	$n=\dfrac{2l+d\pm\sqrt{[(2l+d)^2-8ds]}}{2d}.$

⊙設等比級數中,初項爲 a, 末項爲 l, 公比爲 r, 項數爲 n, 和爲 s, 則

已 知	公 式
$a\ r\ n$	$l=ar^{n-1}.$
$a\ r\ s$	$l=\dfrac{a+(r-1)s}{r}.$
$a\ n\ s$	$l(s-l)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=0.$
$r\ n\ s$	$l=\dfrac{(r-1)sr^{n-1}}{r^n-1}.$
$a\ r\ n$	$s=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}.$
$a\ r\ l$	$s=\dfrac{rl-a}{r-1}.$
$a\ n\ l$	$s=\dfrac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}.$
$r\ n\ l$	$s=\dfrac{lr^n-l}{r^n-r^{n-1}}.$
$r\ n\ l$	$a=\dfrac{l}{r^{n-1}}.$
$r\ n\ s$	$a=\dfrac{(r-1)s}{r^n-1}.$
$r\ l\ s$	$a=rl-(r-1)s.$
$n\ l\ s$	$a(s-a)^{n-1}-l(s-l)^{n-1}=0.$
$a\ n\ l$	$r=\sqrt[n-1]{\dfrac{l}{a}}.$
$a\ n\ s$	$r^n-\dfrac{s}{a}r+\dfrac{s-a}{a}=0.$
$a\ l\ s$	$r=\dfrac{s-a}{s-l}.$
$n\ l\ s$	$r^n-\dfrac{s}{s-l}r^{n-1}+\dfrac{l}{s-l}=0.$
$a\ r\ l$	$n=\dfrac{\log l-\log a}{\log r}+1.$
$a\ r\ s$	$n=\dfrac{\log[a+(r-1)s]-\log a}{\log r}.$
$a\ l\ s$	$n=\dfrac{\log l-\log a}{\log(s-a)-\log(s-l)}+1.$
$r\ l\ s$	$n=\dfrac{\log l-\log[lr-(r-1)s]}{\log r}+1.$

⊙設等比級數中, $-1<r<1$, $n=\infty$, 則

$$s=\frac{a}{1-r}.$$

⊙設 a, b, c 成等差級數, 則

$$a-b:b-c=a:a.$$

⊙設 a, b, c 成等比級數, 則

$$a-b:b-c=a:b.$$

⊙設 a, b, c 成調和級數，則

$$a-b:b-c=a:c.$$

⊙設二數 a, b 之等差，等比，調和中項分別爲 A, G, H，則 $A=\frac{1}{2}(a+b)$，$G=\pm\sqrt{ab}$，$H=\dfrac{2ab}{a+b}$，$G^2=A\cdot H$.

記數法

⊙設底 r 中之某數，其數字和得爲 $r-1$，或其因數所整除，則此數亦得爲 $r-1$，或其因數所整除.

⊙設底 r 中之某數，其奇數位之數字和與偶數位之數字和之差，得爲 $r+1$ 所整除，則此數亦得爲 $r+1$ 所整除.

排列，配合

⊙相異之 n 個物，一次盡取之，其方法有 ${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\times2\times1$ 種.

⊙由相異之 n 個物，每次取 r 個，其方法有 ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ 種.

⊙n 個物之輪狀排列，有 $(n-1)!$ 種.

⊙設 n 個物中，有 p 個，q 個，r 個分別相同，則一次盡取之方法數爲 $\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$.

⊙由相異之 n 個物，一次盡取，而可重複，其方法有 n^n 種.

⊙由相異之 n 個物，一次取 r 個，而可重複，其方法有 n^r 種.

⊙由相異之 n 個物，每次取 r 個作配合，可得 ${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 種.

⊙${}_nC_r={}_nC_{n-r}$. ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$.

⊙${}_nC_r$ 之最大值.若 n 爲偶數，則在 $r=\dfrac{n}{2}$ 時；若 n 爲奇數，則在 $r=\dfrac{n-1}{2}$，及 $r=\dfrac{n+1}{2}$ 時.

⊙將相異之 $x+y+z$ 個物，分成三組，分別含 x, y, z 個物，其配合數爲 $\dfrac{(x+y+z)!}{x!y!z!}$.

⊙Vandermonde 氏定理.設 n 爲任意整數，x, y 有任意値，則 $(x+y)_n=x_n+nx_{n-1}y_1+\dfrac{n(n-1)}{2}x_{n-2}y_2+\cdots\cdots+\dfrac{n!}{r!(n-r)!}x_{n-r}y_r+\cdots\cdots+y_n$.

⊙由 n 個文字，作 r 次同次積，可得 ${}_nH_r=\dfrac{n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)}{1\cdot2\cdots\cdots r}={}_{n+r-1}C_r$ 個.

二項定理

⊙$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n$.

⊙二項式展開式中之公項爲 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$.

⊙二項式 $(a+b)^n$ 之展開式中，由初末兩項起，距離相等之項，其係數相等.

⊙$(1+x)^n$ 展開式中之最大項爲第 r 項，但 r 爲適合 $\dfrac{(n+1)x}{x+1}<r<\dfrac{(n+1)x}{x+1}+1$ 之整數.若 $r=\dfrac{(n+1)x}{x+1}$，則第 r 項與第 $r+1$ 項，大於其他一切項.

⊙$(1\pm x)^n$ 之展開式中，係數之絕對値爲最大之項，爲第 r 項，但 r 爲適合 $\dfrac{n+1}{2}<r<1+\dfrac{n+1}{2}$ 之整數.若 n 爲偶數，則 $r=\dfrac{n}{2}+1$ 時之第 r 項係數爲最大，若 n 爲奇數，

則第 $\dfrac{n+1}{2}$ 項及第 $\dfrac{n+3}{2}$ 項之係數相等，而大於其他一切項之係數.

⊙$(1+x)^n$ 之展開式中,各項係數之和爲 2^n.

⊙$(1+x)^n$ 之展開式中，第奇數項之係數和，等於第偶數項之係數和.

多 項 定 理

⊙$(a+b+c+\cdots\cdots)^n$ 之展開式中,其公項爲 $\dfrac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots\cdots}a^\alpha b^\beta c^\gamma\cdots\cdots$. 但 $\alpha+\beta+\gamma+\cdots=n$.

⊙$(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^n$展開式中之公項爲 $\dfrac{p!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\cdots\cdots}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\cdots\cdots\cdots\cdots x^{\beta+2\gamma+3\delta+\cdots\cdots}$.

⊙$(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^r)^n$ 之展開式中,距兩端等遠之二項,其係數相等.

對 數

⊙$\log_a a=1$. $\log_a a^m=m$. $\log_a 1=0$.

⊙$\log(ab)=\log a+\log b$.

⊙$\log(a\div b)=\log a-\log b$.

⊙$\log a^m=m\log a$. $\log\sqrt[m]{a}=\dfrac{1}{m}\log a$.

⊙$\log_a b\times\log_b a=1$.

⊙$e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$=2.7182818284\cdots\cdots$.

⊙$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\cdots$.

⊙$a^x=1+x\log_e a+\dfrac{x^2(\log_e a)^2}{2!}+\dfrac{x^3(\log_e a)^3}{3!}+\cdots\cdots$.

⊙$1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{6!}+\cdots\cdots=\dfrac{1}{2}(e+e^{-1})$.

⊙$\log_e(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots$.

⊙$\log_e(n+1)-\log_e n=2\left\{\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{3(2n+1)^3}+\dfrac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right\}$.

利 息, 年 金

命本銀$=P$, 本利和$=A$, 利率$=r$, $1+r=R$, 期數$=n$.

⊙單利中　利息$=Pnr$.
　　本利和$=P(1+nr)$.

⊙複利中　本利和$=P(1+r)^n$.
　　利息$=P\{(1+r)^n-1\}$.

⊙$r=\sqrt[n]{\dfrac{A}{P}}-1$. $n=\dfrac{\log A-\log P}{\log(1+r)}$.

⊙n 年後之銀額 P 之現價 $V=\dfrac{P}{1+nr}$[單利].

折扣率 $D=\dfrac{Pnr}{1+nr}$.

⊙n 年後之銀額 P 之現價 $V=P\cdot R^{-n}$ [複利]. 扣折率 $D=P(1-R^{-n})$.

⊙永續年金 a 之現價$=\dfrac{a}{r}$.

⊙p 年後開始, n 年間之年金 a 圓之現價爲 $\dfrac{a}{R^{p+n}}\times\dfrac{R^n-1}{r}$.

⊙p 年後開始,永續年金 a 之現價爲 $\dfrac{a}{R^p r}$.

級數之收斂, 發散

⊙有下列條件之一者,爲收斂級數.

I. 諸項皆小於某收斂級數之對應項

II. 二級數對應諸項之比爲有限，而一

方為收斂級數.

III. 一切項皆為正數之某級數中，自其任意特別項以下，各項與其前項之比,恆小於較 1 小之一定量.

IV. 相隣二項，符號相反，絕對值 $u_n > u_{n+1}$，n 無限增大,則 u_n 無限減小.

V. $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 之極限大於 1.

⊙有下列條件之一者,為發散級數.

I. 級數之各項為有限值，且一切項同號.

II. 二級數對應諸項之比為有限，而一方為發散級數.

III. 一切項皆為正數之某級數中，自其任意特別項以下，各項與其前項之比,恆等於 1，或大於 1.

IV. $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 之極限小於 1.

⊙$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ 發散.

⊙二項級數 $1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\cdots\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\cdots$，若 m 非正整數，$|x|<1$，則收斂.

⊙指數級數 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$ 收斂.

⊙對數級數 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$，在 $1\geqq x>-1$ 時收斂，$x=-1$ 時發散.

級數之總和法

⊙命第 n 項 $=u_n$，至 n 項之和 $=S_n$，至無限項之總和 $=S_\infty$.

⊙設 $u_n=n$，則 $S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

⊙設 $u_n=n^2$，則 $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

⊙設 $u_n=n^3$，則 $S_n=\{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$.

⊙設 $u_n=n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)$，則 $S_n=\frac{1}{r+1}n(n+1)\cdots\cdots(n+r)$.

⊙設 $u_n=n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)$ [r 次多角數之第 n 項]，則 $S_n=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(r-2)$.

⊙設 $u_n=(a+nb)(a+\overline{n+1}b)(a+\overline{n+2}b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-1}b)$，則 $S_n=\frac{(a+\overline{n+r}b)u_n-au_1}{(r+1)b}$.

⊙設 $u_n=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}b)\cdots(a+\overline{n+r-1}b)}$，則 $S_n=\frac{(a+rb)u_1-(a+nb)u_n}{(r-1)b}$.

⊙設 $u_n=\frac{a(a+x)(a+2x)\cdots(a+\overline{n-1}x)}{b(b+x)(b+2x)\cdots(b+\overline{n-1}x)}$，則 $S_n=\frac{a}{a+x-b}\left\{\frac{(a+x)\cdots\cdots(a+nx)}{b(b+x)\cdots(b+\overline{n-1}x)}-1\right\}$.

⊙設 $u_{n+1}=\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$ [二項級數],則 $S_\infty=(1+x)^m$ [但 $1>x>-1$].

⊙設 $u_{n+1}=\frac{1}{n!}$，則 $S_\infty=2.7182818\cdots\cdots$[此為自然對數之底,常以 e 表之].

⊙設 $u_{n+1}=\frac{x^n}{n!}$ [指數級數],則 $S_\infty=e^x$.

⊙設 $u_n=(-1)^{n-1}\frac{y^n}{n!}$ [對數級數],則 $S_\infty=\log_e(1+y)$.

整　數　論

⊙設 $N=a^\alpha b^\beta c^\gamma\cdots\cdots$，則其約數有 $(\alpha+1)\times(\beta+1)(\gamma+1)\cdots\cdots$ 個. 但 a, b, c,……為

相異之質數.

⊙設 $N=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots\cdots$, 則其約數之總和爲

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\times\cdots\cdots.$$

⊙設 p 爲質數, N 對於 p 爲質數, 則 $N^{p-1}-1$ 爲 p 之倍數 [Fermat 氏定理].

⊙設 a 爲小於 $|\underline{n}$ 之質數, 則其最高次冪之指數爲 $I\left(\frac{n}{a}\right)+I\left(\frac{n}{a^2}\right)+I\left(\frac{n}{a^3}\right)+\cdots\cdots$.

⊙r 個連續整數之積,得爲 $|\underline{r}$ 所整除.

⊙設 a 對於 b 爲質數,則 $a, 2a, 3a,\cdots\cdots, (b-1)a$ 分別除以 b 而得之剩餘,無相同者.

⊙$\phi(abcd\cdots\cdots)=\phi(a)\times\phi(b)\times\cdots\cdots$. 但 $a, b, c, d,\cdots\cdots$ 互爲質數.

⊙設 $N=a^p$ [a 爲質數],則 $\phi(N)=a^p\left(1-\frac{1}{a}\right)$.

⊙設 $N=a^pb^qc^r\cdots\cdots$[$a, b, c,\cdots\cdots$ 爲相異之質數],則 $\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\cdots$.

⊙設 p 爲質數,則 $1+|\underline{p-1}$ 爲 p 之倍數 [Wilson 氏定理].

連 分 數

⊙設連分數 $a+\frac{a_1}{b_1+}\ \frac{a_2}{b_2+}\ \frac{a_3}{b_3+}\cdots\cdots$ 之第 n 近數爲 $\frac{p_n}{q_n}$, 則

$$p_n=b_{n-1}p_{n-1}+a_{n-1}p_{n-2},$$
$$q_n=b_{n-1}q_{n-1}+a_{n-1}q_{n-2}.$$

⊙$a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$ 中,

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},$$
$$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2},$$

⊙$\frac{a_1}{b_1-}\ \frac{a_2}{b_2-}\ \frac{a_3}{b_3-}\cdots\cdots$ 中,

$$p_n=b_np_{n-1}-a_np_{n-2},$$
$$q_n=b_nq_{n-1}-a_nq_{n-2}.$$

⊙$a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$ 中,

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}.$$

⊙$\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$ 中,

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}.$$

或 然 率

⊙必可成功之事,其或然率爲 1.

⊙設兩事 A, B 成功之或然率,分別爲 a, b, A 及 B 間無互相之關係,則

I. A, B 同時成功之或然率爲 ab.

II. A, B 之中任意一事成功之或然率爲 $a+b$.

III. A 成功 B 失敗之或然率爲 $a(1-b)$.

IV. A, B 俱失敗之或然率爲 $(1-a)(1-b)$.

⊙設互相無關之若干事, 各自成功之或然率,分別爲 $p_1, p_2, p_3,\cdots\cdots$, 則是等事同時成功之或然率爲 $p_1p_2p_3\cdots\cdots$, 同時失敗之或然率爲 $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots\cdots$.

⊙設 A 事成功之或然率爲 p, 又 A 成功時, 第二事 B 成功之或然率爲 q, 則二事同時成功之或然率爲 pq.

⊙某事於每回試驗中, 成功之或然率爲 p, 則於 n 回之試驗中, 成功 n 回, $n-1$ 回, $n-2$ 回等之或然率,等於 $(p+q)^n$ 二項展開式之諸項.但 $q=1-p$.

⊙前條 n 回之試驗中,成功及失敗之最大或

然率為 $(p+q)^n$ 展開式中之最大項.

◉前二條 n 回之試驗中,至少成功 r 回之或然率為 $p^n+np^{n-1}q+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+\frac{n!}{r!(n-r)!}p^rq^{n-r}$.

◉設 $\frac{a}{a+b}$ 為得所設銀額 M 之或然率,則其期望為 $M\times\frac{a}{a+b}$.

行　列　式

◉行列式中之行易為列,列易為行,行列式之值不變.

◉行列式之任意二行[或列]互易,則行列式變號.

◉行列式中有二行[或二列]相等,則其值為零.

◉以同數乘行列式之一列[或一行]之諸元,等於以此數乘行列式.

◉$\Delta=a_1\Delta_{a_1}-a_2\Delta_{a_2}+a_3\Delta_{a_3}-\cdots=-b_1\Delta_{b_1}+b_2\Delta_{b_2}-b_3\Delta_{b_3}+\cdots\cdots=a_1\Delta_{a_1}-b_1\Delta_{b_1}+c_1\Delta_{c_1}-\cdots\cdots$.

◉$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l & m & n \\ a_2 & b_2 & c_2 & p & q & r \\ a_3 & b_3 & c_3 & s & t & u \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\times\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

◉$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+\cdots\cdots+k_1x_n=\alpha_1$,
$a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+\cdots\cdots+k_2x_n=\alpha_2$,
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$,
$a_nx_1+b_nx_2+c_nx_3+\cdots\cdots+k_nx_n=\alpha_n$

之解答如下: $x_1=\frac{[\alpha_1b_2c_3\cdots\cdots k_n]}{[a_1b_2c_3\cdots\cdots k_n]}$, $\cdots\cdots$,

普徧之, $x_r=\frac{[a_1b_2\cdots\cdots\alpha_r\cdots\cdots k_n]}{[a_1b_2c_3\cdots\cdots k_n]}$.

◉欲令如 $a_1x_1+b_1x_2+\cdots\cdots+k_1x_n=\alpha_1$ 之 $n+1$ 個方程式聯立,其條件為 $[a_1b_2c_3\cdots\cdots k_n\alpha_{n+1}]=0$.

◉欲令如 $a_1x_1+b_1x_2+\cdots\cdots+k_1x_n=0$ 之 n 個方程式,得為 $x_1=x_2=\cdots\cdots=0$ 以外之他值所適合,須 $[a_1b_2c_3\cdots\cdots k_n]=0$.

◉Sylvester 氏消元法.由 $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $px^2+qx+r=0$ 消去 x, 得

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}=0.$$

方 程 式 論

◉n 次方程式,有 n 個根.

◉n 次方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$ 中根與係數之關係.設由 n 個根中,每次取 r 個作積,一切積之和為 S_r, 則 $S_1=-p_1$, $S_2=p_2$, $S_3=-p_3$, $\cdots\cdots\cdots$, $S_n=(-1)^np_n$.

◎方程式 $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n=0$ 中,

I. 根變號後,則方程式爲 $p_0y^n-p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^np_n=0$.

II. 根乘 c 後, 則方程式爲 $p_0y^n+p_1\times cy^{n-1}+p_2c^2y^{n-2}+\cdots\cdots+p_nc^n=0$.

III. 根減以 c 後, 則方程式爲 $f(y+c)=0$.

IV. 以根之逆數爲根之方程式爲 $p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+p_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots+p_0=0$.

◎欲令一方程式爲逆數方程式, 須由兩端起,同次序之項之係数相等[第一類],或僅符號相異[第二類].

◎逆數方程式之重要性質.

I. 第一類中之奇數次者, 有等於 -1 之根.

II. 第二類中之奇數次者, 有等於 $+1$ 之一根.

III. 第二類中之偶數次者, 有等於 ±1 之二根.

IV. 據上求得各根, 由 $f(x)$ 除去對應於此各根之因數, 則求他根之方程式, 爲第一類之偶數次.

◎第一類之偶數次逆數方程式, 得減半其次數.

◎設方程式之係數爲有理, 其根中有二次根數之根或虛根存在,則必成共軛之一組.

◎n 次方程式之係數皆爲整數, 且 n 次項之係數爲 1, 則不能有分數根.

◎設 $f(x)$ 爲 x 之任意有理整函數, $f'(x)$ 爲其第一導出函數, 則 $f'(x)=\frac{f(x)}{x-a_1}+\frac{f(x)}{x-a_2}+\frac{f(x)}{x-a_3}+\cdots\cdots$. 但 $a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots$ 爲 $f(x)=0$ 之實根或虛根.

◎ $f(x)=0$ 中所含之等根,可求 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最大公約數 $\phi(x)$, 命之等於 0 以求得之. 但設 $\phi(x)=0$ 之根, 有 m 個 a, n 個 $b,\cdots\cdots$, 則 $f(x)=0$ 之根, 有 $m+1$ 個 a, $n+1$ 個 $b,\cdots\cdots$

◎設 $f(\alpha)$ 及 $f(\beta)$ 異號, 則方程式 $f(x)=0$ 之根,至少有一個在 α 與 β 之間.

◎奇數次方程式,至少有一實根.

◎設偶數次方程式中,第一項之係數爲1,末項爲負, 則此方程式至少有二實根, 而其符號相反.

◎$(x-a)(x-b)(x-c)-f^2(x-a)-g^2(x-b)-h^2(x-c)-2fgh=0$ 之根,皆爲實數.

◎設 $f(\alpha)$ 及 $f(\beta)$ 異號,則 $f(x)=0$ 之根 有奇數個在 α 與 β 之間; $f(\alpha)$ 與 $f(\beta)$ 同號,則 $f(x)=0$ 之根 有偶數個在 α 與 β 之間,或無一根在 α 與 β 之間.

◎$f'(x)=0$ 之根中,至少有一實根在 $f(x)=0$ 之隣接二根間 [Rolle 氏定理].

◎$f(x)=0$ 中,正實根之個數,不能多於 $f(x)$ 中諸項係數符號之變化數, 負實根之個數, 不能多於 $f(-x)$ 中係數符號之變化數. [Descartes 氏符號定律].

◎設 $x^3+px+q=0$ 之根爲 $-(a+b)$, $-(\omega a+\omega^2b)$, $-(\omega^2a+\omega b)$, 則 a^3 及 b^3 爲

$$\left\{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right\}.$$

◎三次方程式解法之不能化. 設 a^3 及 b^3 之式爲 $\alpha+i\beta$ 及 $\alpha-i\beta$ 之虛數式,則可命 r^2

$=\alpha^2+\beta^2$, $\tan\theta=\dfrac{\beta}{a}$, 於是三根爲 $-2r^{\frac{1}{3}}\times\cos\dfrac{\theta}{3}$, $-2r^{\frac{1}{3}}\cos\dfrac{\theta+2\pi}{3}$, $-2r^{\frac{1}{3}}\cos\dfrac{\theta+4\pi}{3}$.

◎欲解 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$, 可先解 $4\times(\lambda^2-s)\left(2\lambda+\dfrac{p^2}{4}-q\right)-(p\lambda-r)^2=0$, 再由 $2\lambda+\dfrac{p^2}{4}=q+\alpha^2$, $p\lambda=r+2\alpha\beta$, $\lambda^2=s+\beta^2$ 得 α, β, 於是解 $x^2+\dfrac{p}{2}x+\lambda\pm(\alpha x+\beta)=0$, 即得所求之根.

⊙欲令 $x^3+px+q=0$ 之根皆爲實數, 其條件爲 $27q^2+4p^3$ 爲負.

⊙Sturm 氏定理[第一門 4448 題].

⊙綜合除法[第一門 196 題及 4452 題].

⊙有數字係數之方程式, 其實根近似值之運算 Horner 氏法[第一門 4453 題].

目　次