2005考研辅导教材

硕士研究生入学考试

双博士系列

历年真题解析及双色点评

数学三

编 写

双博士考研数学课题组

支 持

双博士在线

www.bbdd.cc

总策划

胡东华

礼品

买80元双博士考研书送80元

机械工业出版社
China Machine Press

硕士研究生入学考试
历年真题解析及双色点评

（数学三）

主　编　北京大学数学科学学院　田勇
编　写　双博士考研数学课题组
支　持　双博士在线　www.bbdd.cc
总策划　胡东华

机械工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试历年真题解析及双色点评(数学三)/田勇主编. -北京:
机械工业出版社,2004.4
考研辅导教材

ISBN 7-111-12081-7

Ⅰ.硕...　Ⅱ.田...　Ⅲ.经济数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 032140 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮编:100037)
责任编辑:于　宁　牛　涛　　责任校对:王鲁华
封面设计:吴亦锋　　责任印制:何全君
北京市高岭印刷有限公司　　机械工业出版社出版发行
2004 年 4 月第 2 版　第 1 次印刷
787mm × 1092mm　1/16　印张 16.125　字数 374 千字
定价:18.00 元

前言

任何事物的发展都具有规律性，考研命题也不例外。通过对历年考研试题的科学分析，我们可以发现，知识点的考察总是具有稳定性、普遍性和反复出现的共性。近几年的数学试题都可以在往届的考卷中觅到踪影，有些题目甚至完全雷同。因此，任何模拟题的练习效果，都不如演练真题，真题具有无可比拟的权威性和实战性。

本着“想考生所想，急考生所急”的宗旨，双博士考研数学课题组精心打造了这本《硕士研究生入学考试真题解析及双色点评（数学三）》，本书的特点如下：

1. 考点及思路：每道题目均有名师点拨命题考点，归纳解题思路。

2. 双色点评：每个考题均注有点评，或详细分析了此类题型的解题方法，或指出了考生易犯的错误，或评价了题目的难易程度，或点出考题的出处，点评透彻准确。

3. 考点分类汇编：在本书的第二部分，我们将历年考点的分布按章节统计成表格，依此总结了命题规律并对发展趋势作出了科学预测。

4. 解题技巧总结：紧跟第二部分中的各章考点汇编，我们结合历年考题将解题技巧进行了进一步总结，相信定会使读者达到“一览众山小”的境界。

考生在使用本书过程中遇到问题可登录双博士在线 www.bbdd.cc/本站论坛/我爱双博士下面留言提问。在准备考研公共课和专业课中遇到的问题，也可登录双博士在线 www.bbdd.cc 在线咨询。

双博士在线在考前提供密押试卷（政治、英语、西医），本试卷去年版直接命中 2004 考研真题。获取本试卷的具体方法为：揭开封面上的防伪标识，获得 10 位数字 ID 和 6 位 PW 方可登录。每购一本双博士图书，可点击双博士在线非公开栏目 30 次。

与本系列配套的双博士系列用书《2005 考研数学应试题典》（理工、经济）2004 年 4 月出版，《2005 考研数学公式掌中宝》（理工、经济）2004 年 4 月出版，《2005 考研最后冲刺》（理工、经济）2004 年 9 月出版。

双博士短信课堂：订阅双博士短信课堂，每日两条考试信息，快乐备考，轻松过级。考研直通车栏目包括：高频词汇、低频词汇、词汇速记巧记、黄金短语、经典句型；政治考点精华背诵、时事直通车、特快消息。

目　录

第一部分　真题实战演练及双色点评

第二部分　考点分类汇编及技巧总结

第一部分

真题实战演练及双色点评

2004 年全国硕士研究生入学
统一考试数学(三)试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上)。

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = 5$,则 $a =$ ____,$b =$ ____.

(2) 函数$f(u,v)$由关系式$f[xg(y),y] = x + g(y)$确定,其中函数$g(y)$可微,且$g(y)\neq 0$,则$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} =$ ________。

(3) 设$f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x < \dfrac{1}{2} \\ -1, & x\geqslant \dfrac{1}{2}\end{cases}$ 则$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx =$ ______

(4) 二次型$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$的秩为______.

(5) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X > \sqrt{DX}\} =$ ______

(6) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$,总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$,$X_1,X_2\cdots X_{n_1}$ 和 Y_1,$Y_2\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本,则

$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2}\right] = \_\_\_\_\_\_$$

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分。在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)。

(7) 函数$f(x) = \dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界。

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$　　【　】

(8) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = a$,

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x = 0,\end{cases}$$

则

(A) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关.　　【　】

(9) 设$f(x) = |x(1-x)|$,则

(A) $x = 0$ 是$f(x)$的极值点,但$(0,0)$不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(B) $x = 0$ 不是$f(x)$的极值点,但$(0,0)$是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(C) $x = 0$ 是$f(x)$的极值点,且$(0,0)$是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

$(D)x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 【 】

(10) 设有以下命题

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛,则 $\sum_{n-1}^{\infty}u_n$ 收敛

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

④ 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛,则 $\sum_{n-1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n-1}^{\infty}v_n$ 都收敛

则以上命题中正确的是

(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ ①④ 【 】

(11) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f'(a)>0$, $f'(b)<0$,则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)=0$. 【 】

(12) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价,则必有

(A) 当 $|A|=a(a\neq0)$ 时,$|B|=a$.

(B) 当 $|A|=a(a\neq0)$ 时,$|B|=-a$.

(C) 当 $|A|\neq0$ 时,$|B|=0$.

(D) 当 $|A|=0$ 时,$|B|=0$.

(13) 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq0$,若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程 $AX=b$ 的互不相等的解,则对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系

(A) 不存在 (B) 仅含一个非零解向量

(C) 含有两个线性无关的解向量 (D) 含有三个线性无关的解向量 【 】

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$,对给定的 $a\in(0,1)$,数 u_n 满足 $P\{X>u_0\}=a$,若 $P\{|X|<x\}=a$,则 x 等于

(A) $u_{\frac{a}{2}}$ (B) $u_{1-\frac{a}{2}}$ (C) $u_{\frac{1-a}{2}}$ (D) u_{1-a} 【 】

三、(本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{sin^2x}-\frac{cos^2x}{x^2})$

四、(本题满分 8 分)

求 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$,其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域.

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且满足

$$\int_a^x f(t)dt\geqslant\int_a^x g(t)dt, x\in[a,b)$$

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b g(t)dt,$$

证明：$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b xg(x)\,\mathrm{d}x$

六、(本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$，其中价格 $P \in (0,20)$，Q 为需求量

(Ⅰ) 求需求量对价格的弹性 $E_d (E_d > 0)$；

(Ⅱ) 推导 $\frac{dR}{dp} = Q(1 - E_d)$（其中 R 为收益），并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加

七、(本题满分 9 分)

设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$$

的和函数为 $S(x)$ 求：

(Ⅰ) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程；

(Ⅱ) $S(x)$ 的表达式.

八、(本题满分 13 分)

设 $a_1 = (1,2,0)^T, a_2 = (1, a+2, -3a)^T, a_3 = (-1, -b-2, a+2b)^T, \beta = (1,3,-3)^T$. 试讨论当 a,b 为何值时，

(Ⅰ) β 不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

(Ⅱ) β 可由 a_1, a_2, a_3 惟一地线性表示，并求出表示式.

(Ⅲ) β 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示，但表示式不惟一，并求出表示式.

九、(本题满分 13 分)

设 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(Ⅰ) 求 A 的特征值和特征向量；

(Ⅱ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵

十、(本题满分 13 分)

设 A, B 为两个随机事件，且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B \mid A) = \frac{1}{3}, P(A \mid B) = \frac{1}{2}$ 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生} \\ 0, & B \text{ 不发生} \end{cases}$$

求：

(Ⅰ) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(Ⅱ) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}；

(Ⅲ) $Z = X^2 + Y^2$ 的概率分布；

十一、(本题满分 13 分)

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;a,\beta)=\begin{cases}1-(\frac{a}{x})^{\beta}, & x>a\\ 0, & x\leqslant a\end{cases}$$

其中参数 $a>0,\beta>1$。设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计量；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，求未知参数 β 的最大似然估计量；

（Ⅲ）当 $\beta=2$ 时，求未知参数 a 的最大似然估计量；

2004 年全国硕士研究生入学统一考试
数学(三)答案及双色点评

一、填空题

(1)1, -4

考点:求极限

思路:题中函数式含参量,要根据给定极限反求参量值

【解析】由于$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$,故分母极限必为0,即$\lim\limits_{x\to 0}e^x-a=0$,此时只有$a=1$. 则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=1-b=5$,故$b=-4$

点评:本题属于极限的应用型问题,事实上,主要考查的还是极限的求法问题,所以希望考生能熟练掌握。

(2) $-\dfrac{g'(v)}{[g(v)]^2}$

考点:复合函数的求导。

【解析】由题设$\begin{cases}xg(y)=u\\ y=v\end{cases}$ $\begin{cases}x'_u=\dfrac{1}{g(y)},x'_v=0\\ y'_v=1,y'_u=0\end{cases}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x'_u\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{g(y)}\right)$$
$$=\frac{-g'(y)\cdot 1}{[g(y)]^2}$$
$$=-\frac{g'(v)}{[g(v)]^2}$$

点评:本题主要考查的是偏导数的计算问题,我们由偏导数的定义可以知道,求多元函数的偏导数实质上仍是求一元函数的导数,所以多元初等函数求偏导数并没有新的内容,只需大家掌握好一元函数求导的方法即可。

(3) $-\dfrac{1}{2}$

考点:求定积分

思路:进行变量代换的同时要变换积分限.

【解析】令$t=x-1$,则

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}te^{t^2}dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{t^2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

点评: 本题主要考查计算定积分的基本方法,平时我们常用的方法有:

(1) 应用定积分换元法。

(2) 应用定积分的分部积分法。

(3) 直接应用微积分中的基本公式。

(4) 应用定积分的几何意义以及定积分性质。

(5) 联合应用定积分的换元法和分部积分法。

(4)2

考点:二次型的秩

思路:要求二次型的秩则需先找出二次型的矩阵 A 来.

【解析】$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$

$= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3{}^2$

所以 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{进行行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

则 $r(A) = 2$

点评: 大家要掌握用正交变换把二次型化为标准形的方法,本题的方法是基本的而且非常重要的方法。在本题中我们已知标准形也就是已知矩阵 A 的特征值,这样在反问题中我们利用相似就很容易把题目解出来。

(5)e^{-1}

考点:随机变量的指数分布

【解析】因 X 服从参数为 λ 的指数分布,所以有

$DX = \frac{1}{\lambda^2}, P\{X > x\} = e^{-\lambda x}(x > 0)$,

$P\{X > \sqrt{DX}\} = P\{X > \frac{1}{\lambda}\} = e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = e^{-1}$.

点评: 常见随机变量的分布还有 0 - 1 分布、二项分布、超几何分布、泊松(*Poisson*)分布、均匀分布及正态分布,要牢固掌握这些分布及其应用,同时理解各分布中参数的概率意义以及与分布数字特征间的关系。

(6)σ^2

考点:随机变量数字特征的相关计算

思路:利用公式:

$D(X_i) = E(X_i^2) - (EX_i)^2 = E(X_i{}^2) - u^2$

$D(X) = D(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D = \frac{\sigma^2}{n}$ 等进行计算

【解析】$E(X_i - \overline{X})^2 = E(X_i{}^2) + E(\overline{X})^2 - 2E(X_i \cdot \overline{X})$

$= E(X_i{}^2) + E(\overline{X})^2 - \frac{2}{n}E(X_i{}^2) - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n_1} E(\overline{X}) \cdot E(X_i)$

$$= (1 - \frac{2}{n_1})(D(X_i) + u^2) + D(\overline{X}) + u^2 - \frac{2(n_1 - 1)}{n_1}u^2$$

$$= (1 - \frac{2}{n_1})\sigma^2 + \frac{1}{n_1}\sigma^2$$

$$= (1 - \frac{1}{n_1})\sigma^2$$

同理 $E(Y_j - \overline{Y})^2 = (1 - \frac{1}{n_2})\sigma^2$

则原式 $= \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}[\sum_{i=1}^{n_1}(1 - \frac{1}{n_1})\sigma^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(1 - \frac{1}{n_2})\sigma^2]$

$= \sigma^2$

点评:在随机变量数字特征的这部分内容中,期望与方差的关系以及运算是常考的内容,希望考生能熟练掌握。

二、选择题

(7) A

考点:函数的有界性

思路:$f(x)$ 为分段函数,需在其各分段区间内讨论. $f(x)$ 的间断点为 $x = 0,1,2$ 在各段区间内函数均连续,故判断间断点类型即可确定函数是否有界. 因此本题也可将其转化为判断间断点处是否存在极限.

【解析】$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\frac{\sin(-3)}{-2\times 9} = -\frac{\sin 3}{18}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{-\sin(-2)}{-1\times(-2)} = -\frac{\sin 2}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$,故选 A

点评:本题主要考查的是关于分段函数的性质,关于分段函数需要大家注意的主要是分段点处的性质及运算。

(8) D

考点:函数连续性的概念及有关间断点类型的判断

思路:极限值中含参量 a,故需对 a 进行讨论.

【解析】当 $a = 0$ 时

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{u\to\infty} f(u) = 0 = g(0)$,

此时 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

当 $a \neq 0$ 时

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = a = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \neq g(0)$,故

此时 $x = 0$ 为 $g(x)$ 的第 Ⅰ 类可去间断点

点评:本题主要考查考生对连续性的概念的理解以及使用洛必达法则来求极限的方法。

(9) C

考点:一元函数的极值点与拐点

思路:先由函数确定其各段区间,再利用各区间单调性进行判定.

【解析】$f(x)=|x(1-x)|=\begin{cases}-x^2+x & x\in(0,1)\\ x^2-x & x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)\end{cases}$

由于 $x=0$ 时 $f(x)=0$,又因为 $f(x)\geqslant 0$,故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

$f''(x)=\begin{cases}-2 & x\in(0,1)\\ 2 & x\in(-\infty,0)\end{cases}$

在 $x=0$ 点左侧 $f'(x)$ 单增,右侧($x\in(0,1)$)单减,故(0,0)也是曲线的拐点.

点评:本题是关于极值点与拐点的判断问题,考生只需严格根据其定义以及基本性质运算即可。

(10)B

考点:级数敛散性

【解析】对 ① 可举反例 $u_n=\begin{cases}-1 & n\text{ 为奇数}\\ 1 & n\text{ 为偶数};\end{cases}$

对 ② 则有收敛的性质,即:若级数收敛则其部分和必收敛,也可由反证法推出。

对 ③ 则由比值判别法可判定发散

对 ④ 也可举反例 $u_n=1, vn=-1(n=1,2,\cdots)$

点评:本题主要考查的是级数收敛,发散与级数项之间的联系,我们可以用级数各式各项的一些特点来判断级数的敛散性。

(11)D

考点:连续函数的介值定理及关于导数的性质

【解析】题设满足介值定理条件,则 C 项明显正确. 根据导数的定义 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$,($x\epsilon[a,b]$)故有 $f(x)>f(a)$,即在 $x=a$ 的邻域内任意一点处的 $f(x)>f(a)$,故 A 正确,同理 B 也是正确的,排除法可知 D 为选项.

点评:本题是选择题,所以考生不必直接去找出要选的答案,可用排除法,将其它选项排除即可。

(12)D

考点:矩阵等价的相关性质

【解析】由定理知若 $A\cong B$,则 $R(A)=R(B)$. 若 $|A|=0$,则可知 $R(A)<n$,也即 $R(B)<n$,故 $|B|=0$,D 为选项.

点评:矩阵等价是矩阵这部分内容中的一个非常重要的概念,希望考生对其有关的一些性质,特征熟练掌握灵活运用。

(13)B

考点:线性方程组解

【解析】综合运用矩阵及伴随矩阵的概念. 由 $A\neq 0$,可知矩阵 A 的任意 $n-1$ 阶子式不为0,故 $R(A)\geq n-1$. 若 $R(A)=n$,则 $|A|\neq 0$,根据克莱姆法则 $Ax=b$ 有惟一解所以 $R(A)=n-1$,此时,齐次方程 $AX=0$ 的基础解系中应含有一个非零解向量,选 B.

点评:本题考查的是伴随矩阵的秩与矩阵秩的关系,二者的关系需要考生熟悉掌握并能灵活运用。

(14)C

考点:常见随机变量的概率分布及其应用

【解析】 由于 $X \sim N(0,1)$,因此对任何正数 $\lambda > 0$,有

$$P\{X > \lambda\} = P\{X < -\lambda\} = \frac{1}{2}P\{|X| > \lambda\}.$$

若 $P\{|X| < x\} = \alpha$,则因 $\alpha \in (0,1)$,必有 $x > 0$ 且

$$P\{X > x\} = \frac{1}{2}P\{|X| > x\} = \frac{1}{2}P\{|X| \geqslant x\}$$

$$= \frac{1}{2}(1 - P\{|X| < x\}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

由此可得 $x = u_{\frac{1-\alpha}{2}}$,应选(C)

点评:本题考查的是正态分布,除此之外,常见随机变量的分布还有泊松分布,二项分布、均匀分布等,要求大家熟练掌握其分布与应用以及各参数几何意义及其与分布间的数字特征。

三、

考点:求函数极限

思路:先将其化为$\frac{0}{0}$型,然后使用洛必达法则逐步计算.

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2})$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x^2 - \sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x^2 - \frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x - \frac{1}{4}\sin 4x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1 - \cos 4x}{6x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{3x}$$

$$= \frac{4}{3}$$

点评:本题主要考查的是求极限的一种很重要的方法,即利用无穷小代换法,需要考生常用的互相等价的几种无穷小量。

四、

考点:重积分

思路:注意积分限的确定并利用对称性简化计算.也可注意使用极坐标达到简化计算的目的.

【解法1】 $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D大圆}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_{D小圆}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma.$

$$\iint\limits_{D大圆}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_{D大}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D大}y\mathrm{d}\sigma(据对称性)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 + 0 = \frac{16}{3}\pi.$$

$$\iint\limits_{D_{小圆}} (\sqrt{x^2+y^2}+y)\,d\sigma。$$

$$= \iint\limits_{D_小} (\sqrt{x^2+y^2})\,d\sigma + \iint\limits_{D_小} y\,d\sigma$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{-2\cos\theta} r^2 dr + 0$$

$$= \frac{32}{9}$$

所以$\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\,d\sigma = \frac{16}{9}(3\pi-2).$

【解法 2】　由积分区域对称性和被积函数的奇偶性

$$\iint\limits_D y\,d\sigma = 0$$

原式 $= \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma + 0$

$$= 2\Big[\iint\limits_{D_{上1}} \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma + \iint\limits_{D_{上2}} \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma\Big]$$

$$= 2\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_{-2\cos\theta}^2 r^2 dr\Big]$$

$$= 2\Big[\frac{4}{3}\pi + \Big(\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{9}\Big]$$

$$= \frac{16}{9}(3\pi-2).$$

点评：本题主要考查的是重积分的计算。要求考生在计算这类积分时，不要一上来就盲目地去计算，而是先观察一下被积函数以及积分区域的特点，看看可不可以找到一些技巧性方法来做以简化计算步骤。

五、

考点：定积分

思路：用分部积分的方法，考虑将证明不等式移项后得到$\int_a^b x(f(x)-g(x))dx \leq 0$，由此想到构造函数 $F(x) = f(x) - g(x)$，$G(x) = \int_a^x F(t)dt$，然后将已知条件代入进行证明.

[证明] 令 $F(x) = f(x) - g(x)$，$G(x) = \int_a^x F(t)dt$

由题设知

$G(x) \geqslant 0, x \in [a,b]$

$G(a) = G(b) = 0, G'(x) = F(x)$

从而

$$\int_a^b xF(x)dx = \int_a^b x dG(x)$$

$$= xG(x)\,|_a^b - \int_a^b G(x)dx$$