名师帮你学

数学

解析几何

陈振宣等编著

中国青年出版社

名师帮你学

数　学

（解析几何）

陈振宣等

中国青年出版社

(京)新登字 083 号

责任编辑:赵惠宗
封面设计:沈云瑞

图书在版编目(CIP)数据

名师帮你学数学:解析几何/陈振宣等编著. —北京:中国青年出版社,1994,8

ISBN7—5006—1614—7

Ⅰ.名… Ⅱ.陈… Ⅲ.解析几何—高中—教学参考资料Ⅳ.G634,654

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 02341 号

名师帮你学数学(解析几何)

陈振宣 等

*

中国青年出版社出版 发行

社址:北京东四 12 条 21 号 邮政编码:100708

空军指挥学院印刷厂印刷 新华书店经销

*

787×1092 1/32 11 印张 220 千字

1994 年 8 月北京第 1 版 1994 年 8 月北京第 1 次印刷

ISBN 7—5006—1614—7/G·341 定价 6.80 元

主要作者简介

陈振宣　杭州市人。上海老中教一级。退休后被上海师大教科所聘为特邀研究员，1993 年被上海市新学科研究所思维科学研究室聘为研究员。1994 年被中国管理科学研究院思维科学研究所评为研究教授。

作者长期从事数学思维方法及思维科学研究，主要著作有《中学数学思维方法》、《数学思想方法入门》、《数学题解辞典》、《高考中常用的数学思想方法》等。

马　明　南京师大附中原副校长，特级教师，国家教委中小学教材审定委员会中学数学审查委员，南京师大数学系兼职教授，江苏省中小学数学教学研究会副理事长。

作者从事中等数学教学40多年，坚持联系实际进行数学教育研究，讲课严谨，风趣横生，使数学教学不断科学化、艺术化。主要作品有《马明数学教育论文集》、《周期函数初论》、《三角浅说》、《圆和二次方程》、《同解方程和同解不等式》、《节约的数学》、《初中数学思维训练与解题方法》等。

杨象富　浙江宁海县人。1980年评为特级教师，1989年批准为中国数学奥林匹克高级教练。近年曾受聘参加全国高教和全国高中数学联合命题工作。

作者已在省重点中学执教42年，坚持联系实际进行数学教育研究，已出版《杨象富数学教学经验》、《中学数学综合题的解法发现》、《高中代数综合与研究》等十种。

赵大悌　1940年生，山东乐陵人。北京海淀教师进修学校中学教研室副主任、数学组长。北京数学教学研究会常务理事、北京数学会普委会副主任。1991年被评为北京市特级教师。参加过北京市高师院校高考命题、全国高考“考试说明”的审定、北京市数学竞赛的命题等工作。曾到全国十几个省市讲学，并参加编写书籍数十本，在省市级以上刊物发表文章数十篇。

前　言

一

数学教育历来存在两种策略思想，一是“以多取胜”，另一是“以少御多”．上世纪末英国出版了一系列颇有影响的教科书：*Chrystal* 的《*Text Book of Algebra*》，*Hall and Knight* 的高等代数与三角，*Loney* 的三角、坐标几何，都以题型丰富、难题多、解法巧妙见长．这些书流行几十年．此风东渐，日本的上野清编写了以《大代数讲义》为代表的一系列讲义，实际上是上述英国教材的编译之作．此后长泽龟之助又有以题解为中心的《数学辞典》问世，逐渐介绍到我国来，使“以多取胜”的策略在中国数学教育界占统治地位，影响深远，且有愈演愈烈之势．然而“题海”无边，既苦了教师与学生，又不能真正提高广大学生的数学素质．于是，“题海”的危害日益成为教育界的共识：一是加重了学生的负担，严重摧残青少年的身心健康；二是把学生的思维禁锢于机械摹仿的定势之中，而难以自拔，造成高分低能．因此，反对“题海”之声一阵高于一阵．但在激烈的考试竞争之中，多数教师又不得不搞“题海”．坊间习题集，*A*、*B* 卷已成泛滥之势，教育行政领导部门屡禁而不止．这就是目前亚洲地区数学教育中的“怪圈”．要跳出“怪圈”，非改弦易辙，走“以少御多”之路不可．

要“以少御多”，既减轻负担，又提高质量，必须探索总结数学教育的内在规律．按规律办事，才能真正提高数学素质，逐步达到不怕考题千变万化，都能游刃有余，跳出“题海”，走上数学教育的坦途．

数学素质的核心是数学思维的素质．根据我们的研究，要

提高数学思维的水平,必须抓住以下三条:

第一,要熟练掌握数学思维的载体,在数学语言与数学知识的理解与运用方面下功夫.数学语言有三种形态:①自然语言(这是理解数学概念与原理的基础);②数学符号语言(这是简缩数学思维,提高思维效率的根本);③数学图象语言(这是形象思维的载体).注意符号语言与图象语言的互译,是抽象思维与形象思维,左、右脑协同操作的训练,是开发大脑潜能的重要途径之一.

第二,要强化数学思维方法的概括与领会,知识与语言是思维的工具,思维方法则是思维的导航器."题海"只注意题型归类和解题模式的汇集,形成各式套路,让学生去摹仿,这无助于思维水平的提高.数学思维方法是从思维的高度引导学生作概括,一旦真正领会,应用之广与灵活变化,是初料所难以估计的.有的学生对思维方法有所理解之后说:"似乎忽然自觉聪明起来了",反映了他们的真实感受.

第三,要注意情感因素与心理素质的培养.人是有情感的,人的思维总是伴随情感而进行,情感可能激励思维,也可能成为思维的障碍.数学思维要正常发挥,不能不注意心理素质的培养.通过数学教育逐步转变学生的学习态度,培养兴趣、意志、毅力,顽强的探究意识,善于排除情绪波动,保持思维的积极态势.情感与心理素质是思维能力的另一侧面,千万忽视不得.

以上是我们编写这套书的动机与指导思想,我们的具体做法是:

1.与教材同步配套,以教材的大节或大体上相当于一周的学习内容,将每一章分为若干讲,便于与教材配合学习.

2. 每讲有一段无标题的引言,对所学内容提出简明的要求及学习方法指导,引导入门,利于复习和深入.

3. 每讲的范例是本书的主体,开头是对概念性强、思维灵活的基础题(不少是自编的)的分析,用以加深理解、发展运用知识与语言的能力,进而通过剖析典型综合题,引导从思维的高度作概括,逐步领会常用的数学思维方法,提高捕捉正确合理的解题思路的能力.

4. 每章之末的小结,旨在教会“从厚到薄”与“从薄到厚”的治学方法,使一门学科的内容“收之可藏于密,放之则弥六合”,形成知识网络,明白内容经纬,便于检索和应用.同时把握住这一知能发展的最佳时期,通过综合性较强的范例,以扩大全章学习的收获,加强对数学思维方法的理解.运用妙题巧解,实际应用,激发兴趣,转变数学态度,形成智力因素与情感因素的良性循环.

5. 最后一册《中学数学思想方法简介》,将前五册涉及的数学思维方法,进行系统提高,使认识与情感获得升华,脑潜能得到充分开发.

阅读引言和范例的分析与说明,犹如聆听名师指导点拨,每周一练既精选又精编,竭力为师生免于题海之苦着想.

丛书主编组由马明、陈振宣、杨象富、赵大悌、赵惠宗同志组成.本册由陈振宣同志主持编写,参加编写的还有陈永箴、陈永莉、郑文珠等.

编写这样的课外读物,还是初次尝试,敬请读者指正,让我们共同努力,逐步形成一套摆脱题海,跳出怪圈,提高素质,利于实用,具有特色的学生课外读物.

目　录

第一章　直　线

第一讲　有向线段、定比分点

解析几何是用代数方法来研究几何问题的一门数学学科.因而,首先要学会建立几何语言和代数语言之间的桥梁.坐标法就是几何的基本元素——点和代数的基本元素——数(组)之间互相转化的一套法则.平面直角坐标系是平面点集到有序数组的集合之间的一种映射.熟练掌握从点到数组(即点的坐标)和从数组到点的相互转化是解析几何的基本功.

坐标法是以有向线段的数量的概念为基础的,有向线段$\overline{AB}$的数量 AB 等于终点 B 的坐标 x_2 减去始点 A 的坐标 x_1 所得的差,即 $AB=x_2-x_1$.它是导出距离、分点公式的工具、必须牢固掌握.

熟练坐标法的应用的关键是:

(1)掌握建立恰当坐标系的方法;

(2)熟练几何量的解析化(即坐标化);

(3)掌握方程思想这一基本的思维方法.

【范例】

例 1　已知 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$,$A(\cos\theta,\sin\theta)$,$B(\sin\theta,\cos\theta)$,则

$|AB|=($　　$)$.

(A) $2(\sin\theta-\cos\theta)$　　(B) $2\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)$

(C) $\sqrt{2}(\sin\theta-\cos\theta)$　　(D)以上都不对

解　$|OA|=|OB|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$

$$|AB|=2|OA|\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)$$

$$=2\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)$$

应选(B).

说明　应用距离公式：

$$|AB|=\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2}$$

$$=\sqrt{2(1-\sin2\theta)}$$

$$=\sqrt{4\sin^2(\frac{\pi}{4}-\theta)}$$

$$=2\sin(\frac{\pi}{4}-\theta).$$

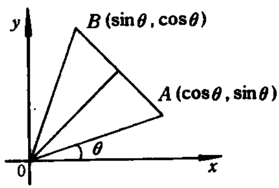

图 1－1

如果应用距离公式：

$|AB|=\sqrt{2(\sin\theta-\cos\theta)^2}$

$=\sqrt{2}|\sin\theta-\cos\theta|$，不注意 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，$\sin\theta<\cos\theta$，误得 $|AB|$ $=\sqrt{2}(\sin\theta-\cos\theta)$，则误选(C).

所以对运算和算术根概念不注意是这类基本题失误的根源.

例 2　已知三角形三顶点坐标分别为 $A(x_1,y_2)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，三边长分别为 $|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$. 则此三角形的内心 I 的坐标为____________.

解　设 AI 交 BC 于 D 点，

$\because \quad BD/DC=|AB|/|CA|=\dfrac{c}{b}.$

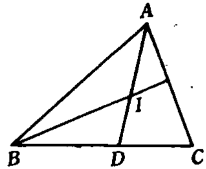

图 1－2

$$\therefore \quad x_D=\frac{x_2+\frac{c}{b}x_3}{1+\frac{c}{b}}=\frac{bx_2+cx_3}{b+c}.$$

$$y_D=\frac{y_2+\frac{c}{b}y_3}{1+\frac{c}{b}}=\frac{by_2+cy_3}{b+c},$$

$\because \quad \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{c}{b}, \quad \therefore \quad \dfrac{BD}{BD+DC}=\dfrac{c}{b+c}.$

且 $BD+DC=BC=a, \quad \therefore \quad BD=\dfrac{ac}{b+c}.$

$$\therefore \quad \frac{AI}{ID}=\frac{|AB|}{|BD|}=\frac{b+c}{a},$$

$$x_I=\frac{x_1+\frac{b+c}{a}x_D}{1+\frac{b+c}{a}}=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}.$$

$$y_I=\frac{y_1+\frac{b+c}{a}y_D}{1+\frac{b+c}{a}}=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}$$

故应填空：$\left(\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\dfrac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$.

说明 应用同样方法，可求三个旁心坐标.

例 3 已知一线段 P_1P_2 被点 P 分成 $\lambda=3:2$. 且 P_1、P 的坐标分别为 $(-3,2)$、$(1,-2)$，则点 P_2 的坐标为____________.

解一 设 P_2 的坐标为 (x,y)，则

$$\begin{cases} 1=\dfrac{-3+\dfrac{3}{2}x}{1+\dfrac{3}{2}} \\ -2=\dfrac{2+\dfrac{3}{2}y}{1+\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$ 解之得 $$\begin{cases} x=\dfrac{11}{3}, \\ y=-\dfrac{14}{3}. \end{cases}$$

解二 设 P_2 的坐标为 (x,y).

$\because \dfrac{P_1P}{PP_2}=\dfrac{3}{2}$，$\therefore \dfrac{P_1P_2}{P_2P}=-\dfrac{5}{2}$，

代入分点公式，得

$$x=\frac{-3-\dfrac{5}{2}\times 1}{1-\dfrac{5}{2}}=\frac{11}{3}.\quad y=\frac{2-\dfrac{5}{2}\times(-2)}{1-\dfrac{5}{2}}=-\frac{14}{3}.$$

说明 定比分点公式的灵活应用，一开始就应抓紧，它的应用很广泛，在学习参数之后，还有意想不到的效果．希读者随着学习的深入不断予以反复领会．

例 4 试求以 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$ 为顶点的四边形是平行四边形（A、B、C、D 的顺序是逆时针的）的充要条件．、

解一 四边形 $ABCD$（A、B、C、D 的顺序是逆时针的）为平行四边形的充要条件是对角线互相平分．

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{x_1+x_3}{2}=\dfrac{x_2+x_4}{2} \\ \dfrac{y_1+y_3}{2}=\dfrac{y_2+y_4}{2} \end{cases};\quad 即 \begin{cases} x_1+x_3=x_2+x_4, \\ y_1+y_3=y_2+y_4. \end{cases}$$

故所求的充要条件是 $\begin{cases} x_1+x_3=x_2+x_4 \\ y_1+y_3=y_2+y_4. \end{cases}$

解二 四边形 $ABCD$（A、B、C、D 的顺序是逆时针的）为平行四边形的充要条件是两双对边分别相等．

$$\therefore \quad \begin{cases} x_1-x_2=x_4-x_3, \\ y_1-y_2=y_4-y_3; \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x_1+x_3=x_2+x_4 \\ y_1+y_3=y_2+y_4. \end{cases}$$

说明 本题解法较多，殊途同归，作为一题多解的练习颇有教益．

例 5 设 M、A、B、C 为同一直线上任意四点，求证：$\dfrac{AM^2}{AB \cdot AC}+\dfrac{BM^2}{BC \cdot BA}+\dfrac{CM^2}{CA \cdot CB}=1.$

分析 由于 AB、AC、BC…等等都是有向线段的数量，为使它们转化为相应的诸点坐标的代数式，应建立恰当的直线坐标系，为了计算的简化，宜考虑取 M 点为原点．

证明 取 M 点为原点，M、A、B、C 所在直线为数轴，建立直线坐标系．设 A、B、C 的坐标分别为 x_1, x_2, x_3. 则 $AB=x_2-x_1$、$AC=x_3-x_1$、$BC=x_3-x_2$、$BA=x_1-x_2$、$CA=x_1-x_3$、$CB=x_2-x_3$、$MA=x_1$、$MB=x_2$、$MC=x_3$.

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & \frac{AM^2}{AB \cdot AC}+\frac{BM^2}{BC \cdot BA}+\frac{CM^2}{CA \cdot CB} \\
&= \frac{(-x_1)^2}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}+\frac{(-x_2)^2}{(x_3-x_2)(x_1-x_2)} \\
&\quad +\frac{(-x_3)^2}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)} \\
&= -\frac{x_1^2(x_2-x_3)+x_2^2(x_3-x_1)+x_3^2(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)} \\
&= \frac{x_1x_2^2-x_1^2x_2+x_1^2x_3-x_2^2x_3-x_3^2(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)} \\
&= \frac{x_1x_2(x_2-x_1)+x_3(x_1^2-x_2^2)-x_3^2(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}
\end{aligned}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)(x_3x_1+x_3x_2-x_1^2-x_3^2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)[x_3(x_2-x_3)-x_1(x_2-x_3)]}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}$$

$$=1.$$

说明 通过坐标系的建立，把几何问题转化为代数问题，应用代数运算，使问题顺利解决．这是解析几何的基本思维方法．下列例 6～8 都是这一思维方法的应用．

例 6 设 A_1、A'_1、A_2、A_3 为平面上任意四点，且 O 为 $A_1A'_1$ 的中点，求证：

$$|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A'_1|^2\geqslant|OA_1|^2+|OA_2|^2+|OA_3|^2.$$

分析 为了便于确定这四点坐标，可取 O 为原点，直线 $A_1A'_1$ 为 x 轴，建立直角坐标系后，可将问题转化为代数不等式来证明．

证明 取 O 为原点，$A_1A'_1$ 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系如图 1—3. 设诸点坐标分别为 $A_1(x_1,0)$、$A_2(x_2,y_2)$、$A_3(x_3,y_3)$、$A'_1(-x_1,0)$，则

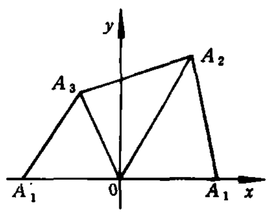

图 1—3

$$|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A'_1|^2-|OA_1|^2-|OA_2|^2-|OA_3|^2$$

$$=(x_2-x_1)^2+y_2^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_3+x_1)^2+y_3^2-x_1^2-x_2^2-y_2^2-x_3^2-y_3^2$$

$$=(x_3+x_1)^2-2x_1x_2-2x_2x_3+x_2^2+(y_2-y_3)^2$$

$$=(x_3+x_1-x_2)^2+(y_2-y_3)^2\geqslant 0.$$

$\therefore\quad |A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A'_1|^2$

$\geqslant |OA_1|^2+|OA_2|^2+|OA_3|^2.$

当且仅当 $x_1+x_3=x_2$ 且 $y_2=y_3$ 时，即 A_1A_3 的中点与 OA_2 的中点重合，亦即 $OA_1A_2A_3$ 是平行四边形时，等号成立．

例 7 $\triangle ABC$ 中，AT 为 $\angle A$ 的内角平分线，D、E 分别在 AB、AC 上，且 $|BD|=|CE|$，BC，DE 的中点分别为 M、N，求证：$MN/\!/AT$.

分析 为了便于确定 A、B、C、D、E、M、N 的坐标，注意到 B、C、D、E 分别在 AB、AC 上，故可取 A 为原点．$\angle A$ 的内、外角平分线互相垂直，可取它们为坐标轴，以 $\angle BAC=2\theta$，$|AB|=2m$，$|AC|=2n$，$|BD|=|CE|=2l$ 为参数，不难求出诸点的坐标，只要证明 $y_M=y_N$ 即可获证．

证明 取 A 为原点，AT 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系如图 1－4，

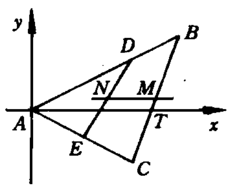

图 1－4

设 $\angle BAC=2\theta$，

$|AB|=2m$，$|AC|=2n$，$|BD|=|CE|=2l$，则诸点坐标分别为

$A(0,0)$、$B(2m\cos\theta,2m\sin\theta)$、$C(2n\cos\theta,-2n\sin\theta)$、$D(2(m-l)\cos\theta,2(m-l)\sin\theta)$、$E(2(n-l)\cos\theta,-2(n-l)\sin\theta)$. M，N 两点的纵坐标分别为

$$y_m=\frac{1}{2}(y_B+y_C)=(m-n)\sin\theta,$$

$$y_N=\frac{1}{2}(y_D+y_E)=(m-n)\sin\theta,$$

$\because\quad y_m=y_N$，AT 为 x 轴.

$\therefore\quad MN/\!/AT$.

说明 用解析法解几何问题，首先要选择恰当的坐标系，一般为了便于确定关键点的坐标，常利用图形中互相垂直的直线为坐标轴，或选择特殊点为原点来建立恰当的坐标系，为了计算的方便，选参数时，不局限于线段的长度，而是线段长度与角度并用，运用三角知识，常可收代数，三角结合之妙．运用参数的个数不宜过多，能使所给图形确定即可．

例 8 设圆 O 的半径为单位长度，定点 A 到圆心 O 的距离为 2 个单位长度，B 为圆 O 上的动点，以 AB 为一边作正三角形 ABC，(A，B，C 的顺序是顺时针的)，试求四边形 $OACB$ 的面积的最大值．

分析 为确定四边形 $OACB$ 的面积 S（这里是最值问题的目标函数），应选择恰当的坐标系与适当的自变量（这在最值问题中也称为设计变量）．使 S 便于计算．

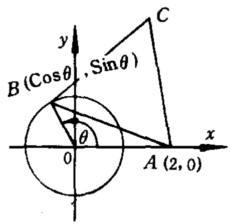

图 1－5

解 取 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系如图 1－5，取 $\angle AOB=\theta$ 为自变量，则 A，B 的坐标为 $A(2,0)$，$B(\cos\theta,\sin\theta)$，则

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\theta=\sin\theta,$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2=\frac{\sqrt{3}}{4}[(\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}[5-4\cos\theta]$$

$\because$ 四边形 $OACB$ 的面积$=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ABC}$.