高等学校教材

大学文科数学

主编 张 彪 雷 强

哈爾濱工業大學出版社

高等学校教材

大学文科数学

张彪　雷强　主编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书是为高等学校文科专业本科生编写的一本数学教材。全书共分6章,包括函数与极限,微分学,积分学,二元函数微积分学,线性代数,概率论。根据文科的特点,书中突出对数学基本思想的理解,强调基本计算,淡化数学技巧和理论推导,便于提高文科学生的数学素质。

本书可作为高等学校文科专业本科一年级新生数学课教材。

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/张彪主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.8

ISBN 978-7-5603-2940-6

Ⅰ.大… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第154460号

责任编辑　张永芹
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　肇东粮食印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张13.25　字数218千字
版　　次　2009年9月第1版　2009年9月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2940-6
定　　价　22.80元

前　言

素质教育的推广使得在大学文科类学生中开设数学课已经成为普遍现象。

文科生学习数学很有必要。美国数学家、数学史家 M·克莱因曾经这样描述:“音乐能激发和抚慰情怀,绘画使人赏心悦目,诗歌能动人心弦,哲学使人获得智慧,科技可以改善物质生活,但数学却能提供以上的一切。”其精辟的阐述生动地表明了数学教育的价值所在。数学知识中所蕴含的思想方法是许多其他学科都无法比拟的。文科学生学习一些高等数学,掌握一些常用的数学技能,不但能够满足日常应用的需要,更能够培养他们的理性思维方式,对其今后的发展大有裨益。通过数学基本知识和基本技能的学习,有利于提高文科学生的量化意识、量化能力、逻辑思维和逻辑推理能力,有利于培养学生严谨、求实的态度,有利于其自身素质的提高。从纷繁复杂的事物中找出一般规律和一般方法,并将之创造性地用于各种具体问题的解决,取得更多更为科学严谨、水平更高的研究成果,这是文科中开展数学培养的主要目标。同时,随着时代的发展,数学已深入到几乎所有的领域,是我们分析解决问题的普遍性工具。当前,在语言、历史、经济和教育等这样的学科中,也产生了像“数理语言学”、“计量经济学”、“教育统计学”等以数学为工具研究语言、历史、经济和教育的新学科。数学已成为这些学科中有机的一部分。不学习数学就无法对该学科有真正的理解。

同时,我们的文科学生在今后的工作中不可避免地要涉及对各种事物和现象进行数量分析或数学思考的问题。特别是数学作为先进思想方法的源泉,文科学生需要吸收一些常见的重要思想方法,帮助他们分析解决实际问题。因此,文科学生必须学习一些必要的数学知识。基于这种认识,我们编写了这本文科数学教材。

本书是为大学国际经济与贸易、哲学、新闻、社会学、法学、中文、外语等文科专业学生编写的大学数学教材。

本教材编写中,我们在保留传统高等数学教材结构严谨、逻辑清晰、系统完整等风格的基础上,积极吸收近年来高校教材改革的成功经验,并将我们教学中的有益探索融入教材,努力做到难易适中、例证适当,便于文科学生掌握所学内容。

由于我们水平有限,书中的疏漏和不足之处难免,恳请各位专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

2009 年 7 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

函数是微积分的研究对象，而极限是研究函数的主要工具，是微积分的理论基础，以后将要介绍的函数的连续性、导数、定积分等重要概念都是通过极限来定义的．本章将逐次介绍函数、极限以及函数的连续性．

1.1　函　数

1.1.1　函数的概念

1．常量与变量

数学是研究数量关系和空间形式的一门科学．我们在观察各种自然现象或研究实际问题时会遇到许多不同类型的量，例如，时间、面积、温度、速度等．这些量在度量单位选定之后，度量结果所取的数值均可用实数表示．在考察的过程中，数值保持不变的量称为常量，习惯用英文字母表的前几个字母 a,b,c 等表示；数值变化的量称为变量，习惯用英文字母表的后几个字母 x,y,z 等表示．例如，自由落体在下落过程中，下落时间和下落距离是变量，而落体质量是常量．

一般说来，常量是表示相对静止的事物的某种量；变量则是表示运动的事物的某种量．当然，常量与变量的区分不是绝对的，如果条件变了，常量可以转化为变量，变量也可能转化为常量．例如，对不同的地区，重力加速度 g 就不再是常量．又如，有时虽然已知某一量是变量，但如果它的变化微小到可以忽略不计时，就可以将它当作常量来处理，这样可使问题得以简化．

2．数集与区间

以数为元素的集合叫数集，常用大写英文字母 A,B,C 等表示．数集 A 中的每一个数 x 称为数集 A 的一个元素，并用记号 $x \in A$ 表示，读作 x 属于 A．

例如，方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的根组成一个数集，它只包含两个元素 -1 和 2；正整数的全体 $1,2,3,\cdots$ 组成一个数集；满足不等式 $-1 < x < 2$ 的一切实数 x 也组成一个数集．

全体实数构成的数集叫实数集，习惯用 $\mathbf{R}$ 表示．今后常常用到区间这一概念，它是 $\mathbf{R}$ 的一类子集．

设 $a,b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$，以 a,b 为端点的有限区间有

开区间:$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$;

闭区间:$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;

半开区间:$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$; $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

在数轴上它们都表示一个线段,其中开区间(a,b)不包含 a,b 两点,闭区间$[a,b]$包含 a,b 两点,半开区间$[a,b)$包含点 a 但不包含点 b,而半开区间$(a,b]$不包含点 a 但包含点 b.这几种区间的长度均规定为 $b-a$.

此外,还有五种无穷区间

$(a,+\infty) = \{x \mid x > a\}$;

$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$;

$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$;

$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}$;

$(-\infty,+\infty) = \mathbf{R}$.

上述各种区间统称为区间,在没有必要指明哪种区间时,常用大写字母 I 表示.

设 $\delta > 0$,称开区间

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

为点 x_0 的 δ 邻域.它是以 x_0 为中心,长为 2δ 的开区间(图 1.1).有时,我们不关心 δ 的大小,常用"邻域"或"x_0 附近"代替 x_0 的 δ 邻域.

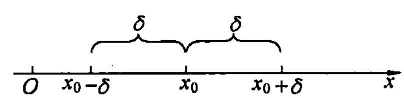

图 1.1

称集合

$$(x_0 - \delta, 0) \cup (0, x_0 + \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

为点 x_0 的去心 δ 邻域.

3. 函数的定义

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

【例 1】 圆的面积公式为 $S = \pi r^2$,此公式表示变量 S 与变量 r 之间数值的对应关系,对于每一个变量 $r \in (0,+\infty)$,通过公式 $S = \pi r^2$ 总有一个确定的 S 的值与它对应.

【例 2】 自由落体的下落距离 h 和时间 t 之间有依赖关系:$h = \frac{1}{2}gt^2$,若以 T 表示物体降落到地面所需的时间,则对于每一个变量 $t \in [0,T]$,通过公式 $h = \frac{1}{2}gt^2$ 总有一个完全确定的 h 值与它对应.

通过以上两个例子可以看出,虽然它们所反映的客观事实和实际意义各不相同,但它们却有一个共性:一个过程中的两个变量之间存在着一定的对应规律,对于一个变量在一定范围内所取的每一个数值,另一个变量就有完全确定的值与之

对应.

现在,我们就以这个共同的本质为基础,抽象出数学中的一个重要概念——函数.

定义 1.1　若在变量 x 与 y 之间存在着一种对应规律,使得变量 x 在其可取值的数集 X 中每取一个值时,变量 y 均有确定的值与它相对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x), \quad x \in X$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量.

自变量 x 可取值的数集 X 称为函数的定义域;所有函数值构成的集合 Y 称为函数的值域.

函数概念中有两个要素:其一是对应规律,即函数关系;其二是定义域.由此可知函数 $y = \ln x^2$ 与 $y = 2\ln x$ 是两个不同的函数.

【例 3】　确定 $y = \sqrt{25 - x^2} + \arctan \dfrac{1}{x}$ 的定义域.

解　因为负数不能开平方,所以有 $25 - x^2 \geqslant 0$ 等价于 $|x| \leqslant 5$;又因零不能做分母,所以 $x \neq 0$.故所求的定义域是集合 $[-5,0) \cup (0,5]$.

若在定义域的不同部分上用不同的式子来表达一个函数关系,则这样的函数称为分段函数.例如,$y = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ 1 + x, & x \leqslant 1 \end{cases}$.

1.1.2　函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称(即当 $x \in X$ 时,必有 $-x \in X$),若对任何 $x \in X$,都有

$$f(-x) = -f(x)$$

则称 $y = f(x)$ 为奇函数;若对任何 $x \in X$,都有

$$f(-x) = f(x)$$

则称 $y = f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

2. 函数的周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 X,若存在常数 $T \neq 0$,对任何 $x \in X$,都有 $x \pm T \in X$ 且

$$f(x + T) = f(x)$$

则称 $y = f(x)$ 为周期函数,并称常数 T 为它的一个周期.

例如,大家所熟悉的三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ 都是

周期函数.前两个函数周期为 2π,后两个函数周期为 π.

一个周期函数的周期有无穷多个,例如,常数 $2k\pi(k \in \mathbf{Z}, k \neq 0)$ 都是 $y = \sin x$ 的周期,2π 是它的最小正周期.一个周期函数,若有最小正周期 T_0,则说 T_0 为此函数的基本周期.此外,并不是每个周期函数都有基本周期.

【例 4】 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

是一个周期函数.因为任何非零有理数都是它的周期,所以它无基本周期.

3. 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义,$x_1 < x_2$ 是区间 I 上任意两点,若恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(单调减少).若上述不等式中总不出现等号,则称 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调增加(严格单调减少).

在定义域上,单调增加或单调减少的函数统称为单调函数;严格单调增加或严格单调减少的函数统称为严格单调函数.

例如,在 $(-\infty, 0]$ 上,$y = x^2$ 是严格单调减少的;在 $[0, +\infty)$ 上,$y = x^2$ 是严格单调增加的,所以 $y = x^2$ 不是单调函数.而 $y = x^3$ 是严格单调增加的函数.

4. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义,若存在常数 A(或 B),使得对任何 $x \in I$,都有

$$f(x) \leqslant A \quad (f(x) \geqslant B)$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上有上(下)界.若存在常数 $M > 0$,使得对任何 $x \in I$,都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界,否则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

在定义域上有界的函数叫有界函数.

例如,$y = \sin x$ 是有界函数;$y = 1/x$ 是无界函数,但它在区间 $(0, +\infty)$ 上是有下界的,在 $(1, +\infty)$ 上是有界的.

1.1.3　反函数与隐函数

1. 反函数

一个函数中的自变量 x 与因变量 y 的地位并不是固定的,有时根据研究问题的角度不同,也可以让二者互换地位.例如,当我们考虑圆的面积 S 与圆的半径 r 之间的函数关系有两种表示方法:一是通过 r 来表示 S,此时 r 是自变量,S 是因变量,二者的函数关系是 $S = \pi r^2$;二是通过 S 来表示 r,此时 S 是自变量,r 是因变量,

二者的函数关系是 $r = \sqrt{S/\pi}$. 像这样同一个事物中的两个变量，只是由于自变量和因变量转换地位而构成的两个函数，互称为反函数.

一般来说，设已给 y 是 x 的函数 $y = f(x)$，若将 y 当作自变量，x 当作因变量，则由 $y = f(x)$ 所确定的函数

$$x = \varphi(y)$$

叫函数 $y = f(x)$ 的反函数；同样的，$y = f(x)$ 也叫 $x = \varphi(y)$ 的反函数. 显然它们的图形是同一条曲线.

由于照顾到人们已经习惯用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以也常将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 改记为 $y = \varphi(x)$. 这样 $y = \varphi(x)$ 与 $y = f(x)$ 互为反函数，中学中已经证明过，它们的图形关于直线 $y = x$ 对称(图 1.2).

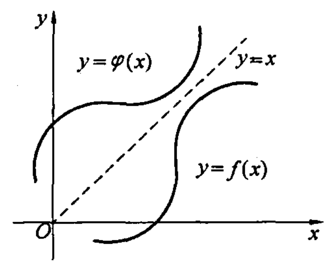

图 1.2

2. 隐函数

若变量 x 与 y 之间的函数关系是由包含 x, y 的一个方程

$$F(x, y) = 0$$

给出，则称 y 是 x 的隐函数. 相应地，把由自变量的算式表示出因变量的函数叫显函数.

例如，由方程 $x^2 + 4y^2 = 1, \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y - xy = 0$ 所确定的函数都是隐函数；而 $y = x^2, y = \ln(1 + x + x^2)$ 都是显函数.

1.1.4　初等函数

1. 基本初等函数及其图形

(1) 常数函数

形如

$$y = C \quad (C \text{ 为常数})$$

的函数叫常数函数，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，图形为平行于 x 轴截距为 C 的直线.

(2) 幂函数

形如

$$y = x^{\mu}$$

的函数叫幂函数，其定义域与 μ 的取值有关. 例如，μ 为正整数时，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，μ 为负整数时，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，$\mu = 1/3$ 时，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，$\mu = 1/2$ 时，定义域为 $[0, +\infty)$，μ 为正无理数时，定义域为 $[0, +\infty)$，等等.

所有的幂函数都在 $(0, +\infty)$ 上有定义. 它们的图形都通过点 $(1,1)$. 在 $(0,$

$+\infty$) 上,$\mu>0$ 的幂函数都是单调增加的;$\mu<0$ 的幂函数都是单调减少的. $\mu>0$ 和 $\mu<0$ 时的图形分别如图 1.3 和图 1.4 所示.

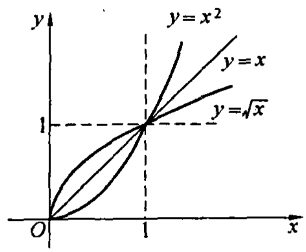

图 1.3

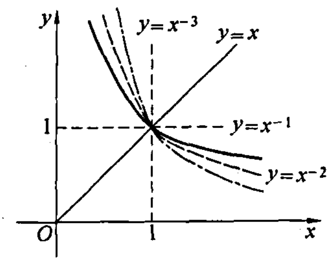

图 1.4

(3) 指数函数

形如

$$y=a^x \quad (a>0, a\neq 1)$$

的函数叫指数函数,其定义域为$(-\infty,+\infty)$. 它们的图形都通过点$(0,1)$. 当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减小,如图 1.5 所示. 函数 $y=a^x$ 与 $y=(1/a)^x$ 的图形关于 y 轴对称.

以无理数 $e=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$ 为底的指数函数 $y=e^x$ 是最常见的指数函数.

(4) 对数函数

形如

$$y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$$

的函数叫对数函数,其定义域为$(0,+\infty)$. 它们的图形都通过点$(1,0)$. 当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减小,如图 1.6 所示.

以 10 为底的对数叫常用对数,简记为 $\lg x$;以 e 为底的对数叫自然对数,简记为 $\ln x$.

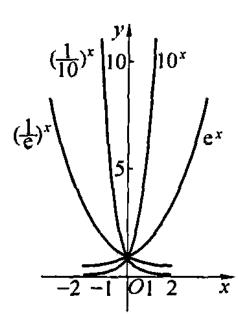

图 1.5

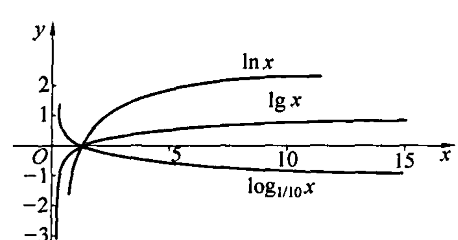

图 1.6

(5) 三角函数

三角函数包括：正弦函数 $y = \sin x$，余弦函数 $y = \cos x$，正切函数 $y = \tan x$，余切函数 $y = \cot x$，正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$. 它们都是周期函数，正弦函数和余弦函数的周期是 2π，正切函数和余切函数的周期是 π，正割函数和余割函数的周期也是 2π. 正弦函数和余弦函数是有界函数，其他三角函数是无界函数. 正弦函数和余弦函数的图形如图 1.7 所示，正切函数和余切函数的图形如图 1.8 所示.

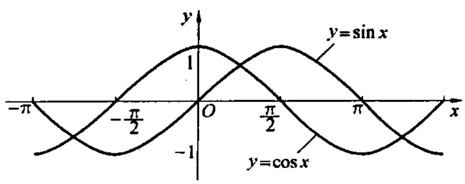

图 1.7

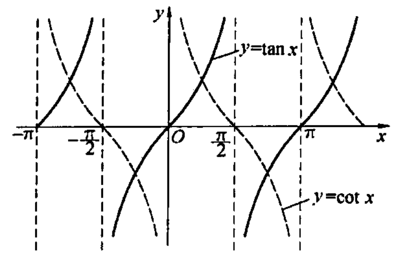

图 1.8

(6) 反三角函数

三角函数的反函数叫反三角函数. 常用的反三角函数有：反正弦函数 $y = \arcsin x$，反余弦函数 $y = \arccos x$，反正切函数 $y = \arctan x$ 和反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$. 反正弦函数和反余弦函数的定义域都是 $[-1,1]$，值域分别是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $[0,\pi]$；反正切函数和反余切函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，值域分别是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $(0,\pi)$. 它们的图形如图 1.9 和图 1.10 所示. 反正弦函数和反正切函数是单调增加的；反余弦函数和反余切函数是单调减少的，它们都是有界函数.

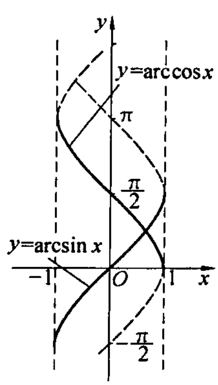

图 1.9

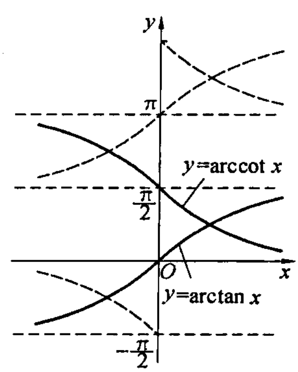

图 1.10

2.复合函数与初等函数

(1) 复合函数

定义 1.2　如果 y 是 u 的函数 $y = f(u), u \in U$,而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, $x \in X$,且 $D = \{x \mid x \in X, 且\ \varphi(x) \in U\} \neq \varnothing$,则函数

$$y = f(\varphi(x)), x \in D$$

称为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合成的复合函数,把 u 叫中间变量.

例如,$y = \cos\sqrt{x}$ 是由 $y = \cos u$ 和 $u = \sqrt{x}$ 复合而成的;$y = \sqrt{\ln(1 + x^2)}$ 是由 $y = \sqrt{u}, u = \ln v$ 和 $v = 1 + x^2$ 复合而成的.

"复合"是构成函数的重要形式,但不是任何两个函数都可以复合,比如 $y = \arcsin u$ 和 $u = x^2 + 2$ 就不能复合,因为后者的值域与前者的定义域的交集是空集,即 $D = \varnothing$.

(2) 初等函数

定义 1.3　由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合所得到的,并能用一个式子表示的函数叫初等函数.

例如,函数 $y = x\ln x + e^{\sin x}, y = \dfrac{\tan x + x^2}{\sqrt[3]{\arcsin x}}, y = \dfrac{2}{x} - \lg(e^{-2x} + \sqrt{1 + x^2})$ 都是初等函数.

初等函数是我们常见的函数,但它只是一小类函数,像狄利克雷函数和某些分段函数就不是初等函数.学过微积分后,可知道还有大量的非初等函数存在.

习题 1.1

1.求下列函数的定义域:

(1) $y = \dfrac{1}{|x| - x}$;　　(2) $y = \sqrt{x^2 - x}$;

(3) $y = \dfrac{1}{1 - x} + \ln x$;　　(4) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$.

2.计算下列各题:

(1) 设 $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x + 1}$,求 $f(2), f(-2), f(0), f(a + b)(a + b \neq -1)$;

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$,求 $f(1), f(\frac{\pi}{4}), f(-2), f(-\frac{\pi}{4})$;

(3) 设 $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$,求 $f(x - 1), f(\frac{1}{x^2}), f(f(x) - 1)$.

3.下述函数 $f(x), g(x)$ 是否相等?为什么?

(1) $f(x) = 1, g(x) = \dfrac{x}{x}$;　　(2) $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$.

4.指出下列函数中哪些是奇函数、偶函数、非奇非偶函数:

(1)$y = 2^x - 2^{-x}$;　　(2)$y = |\sin x|$;

(3)$y = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$;　　(4)$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

5. 指出下列函数中哪些是周期函数,并对周期函数指出其周期:

(1)$y = |\sin x|$;　　(2)$y = \cos \pi x$;

(3)$y = \arcsin x$;　　(4)$y = x\cos x$.

6. 指出下列函数的单调区间及有界性:

(1)$y = \dfrac{1}{x}$;　　(2)$y = \arctan x$;

(3)$y = |x| - x$;　　(4)$y = \sqrt{1 - x^2}$.

7. 求下列函数的反函数及其定义域:

(1)$y = 3x - 2$;　　(2)$y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$;

(3)$y = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$;　　(4)$y = \sqrt{\pi + 4\arcsin x}$.

8. 分解下列复合函数:

(1)$y = \sqrt{2 + x^2}$;　　(2)$y = \sin 2x$;

(3)$y = \dfrac{1}{\cos(x - 1)}$;　　(4)$y = \ln\ln(x - 3)$;

(5)$y = \sin\dfrac{1}{x - 1}$;　　(6)$y = 2^{\arctan\sqrt{x}}$.

1.2　极限

1.2.1　数列的极限

按一定次序排列的无穷多个数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$$

称为无穷数列,简称数列,可简记为$\{x_n\}$.数列中的每个数叫数列的项,具有代表性的第 n 项x_n叫数列的通项或一般项.从函数的观点来看,数列就是一个以自然数全体为定义域的函数,而通项可以看作是此函数当自变量取自然数 n 时对应的函数值,即 $x_n = f(n)$,相继令 $n = 1,2,\cdots$ 所得到的一串函数值便是原来的数列.

下面是一些数列的例子:

(1)$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$;

(3)$1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n},\cdots$;

(4) $1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$;

(5) $0.9,0.5,0.99,0.95,0.999,0.995,\cdots$.

这些数列变化情况各异，随着 n 的无限变大(记为 $n\to\infty$)，数列(1)无限制地变大下去；数列(2)逐项变小，无限制地接近于0；数列(3)的项正负相间，无限制地接近于0；数列(4)的项在 -1 和1两个数上来回跳动；数列(5)忽大忽小，但总趋势无限接近于1. 从变化趋势上看，数列分为两大类：一类是当 $n\to\infty$ 时，x_n 无限制地接近某一常数，如(2)，(3)，(5)；另一类是当 $n\to\infty$ 时，x_n 不趋于任何确定的数，如(1)，(4). 前者称为有极限的数列或收敛的数列，后者称为无极限的数列或发散的数列.

若随着 n 的无限变大，x_n 就无限地接近某一常数 A，则说数列 $\{x_n\}$ 有极限或收敛，并称 A 为数列的极限. 这里我们使用了"n 无限变大"及"无限地接近某一常数 A"，这些描述性语言只是可以理解却含糊不清. 为此，必须有一个便于进行定量分析的严密的定义.

定义 1.4　设有数列 $\{x_n\}$，A 是一个常数，若对任意一个正数 ε，总能找到相应的某个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-A|<\varepsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，并称 A 是数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷大时的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A$$

或简记为

$$x_n\to A(n\to\infty)$$

定义用 ε 和 N 分别对"无限接近"和"无限变大"的含义给予精确地刻画. 习惯上，称之为"$\varepsilon-N$"语言.

几点说明：

(1) 数列极限是数列 $\{x_n\}$ 变化的最终趋势，所以，任意改变数列中的有限项不影响它的极限值；

(2) 定义中 ε 的任意(小)性是十分必要的，否则 $|x_n-A|<\varepsilon$ 就表达不出 x_n 无限接近于 A 的含义；

(3) N 与给定的 ε 有关，一般来说，ε 越小，N 将越大，它标示变化的进程.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的几何解释：将常数 A 及数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 表示在数轴上，并在数轴上作开区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$，不管正数 ε 如何小，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，所有的点 x_n 都落在开区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 内，而落在这个区间之外的点至多只有 N 个(图 1.11).

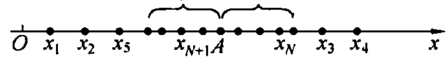

图 1.11

【例 1】　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

证明　对任意 $\varepsilon>0$,欲使

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立,只须 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$($[x]$ 是取整函数,表示小于或等于 x 的最大整数),则当 $n>N$ 时,便有

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

由定义 1.4,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

1.2.2　函数的极限

前面我们讨论了一种特殊的函数 $x_n=f(n)$ 的极限,即数列的极限问题.这种函数的自变量 n 只是依次取自然数 $1,2,\cdots,n,\cdots$,所以其自变量只有一种变化方式:$n\to\infty$.下面我们要对一般函数 $y=f(x)$ 建立极限概念.

研究函数极限时,自变量的变化可分为以下两种情形:

(1) 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限制地增大即趋于无穷大(记作 $x\to\infty$)时,对应的函数值 $f(x)$ 的变化情况;

(2) 自变量 x 无限接近于某常数 x_0(记作 $x\to x_0$)时,对应的函数值 $f(x)$ 的变化情况.

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时有定义,如果在 $x\to\infty$ 的过程中,对应的函数值 $f(x)$ 无限制地接近于确定的常数 A,则说函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时有极限或收敛,并称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.下面给出其精确定义(用"$\varepsilon-X$"语言来定量描述极限定义).

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某个正数时有定义,A 是一个常数,若对任意一个正数 ε,总能找到相应的某个正数 X,使得当 $|x|>X$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时收敛于 A,并称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

或简记为

$$f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的几何解释：任意给定一正数 ε，在坐标平面上作直线 $y = A+\varepsilon$ 和 $y = A-\varepsilon$ 形成一个以 $y = A$ 为中心线宽为 2ε 的条形区域，不论 ε 多么小，即形成的条形区域多么窄，总可以找到正数 X，当曲线上的点 $(x, f(x))$ 的横坐标 x 落在区间 $(-\infty, -X) \cup (X, +\infty)$ 上时，相应的函数 $y = f(x)$ 的图形全部位于上述条形区域内. ε 越小，条形区域越窄而相应的 X 一般越大，它是与 ε 有关的正数(图 1.12).

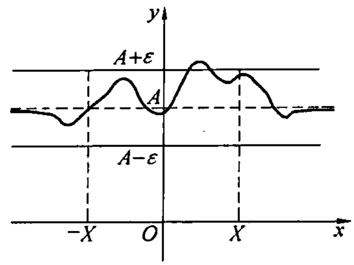

图 1.12

如果在定义 1.5 中，限制 x 只取正值(或只取负值)，则有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad (\text{或} \lim_{x\to-\infty} f(x) = A)$$

其中 $x\to+\infty$ 表示 $x>0$ 时 $|x|$ 无限制地增大，即 x 沿 x 轴的正方向向右无限变远；$x\to-\infty$ 表示 $x<0$ 时 $|x|$ 无限制地增大，即 x 沿 x 轴的负方向向左无限变远. 称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的极限.

【例 2】 试证 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0$.

证明 对任意的 $\varepsilon>0$，欲使

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}} - 0\right| < \varepsilon$$

由于

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}} - 0\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

所以只须 $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$，即 $x > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$. 取 $X = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$，则当 $x > X$ 时，便有

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}} - 0\right| < \varepsilon$$

由定义 1.5，有 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0$.

注意到 $x\to\infty$ 意味着同时考虑 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$，可以得到下面的定理.

定理 1.1 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

证明从略.

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域有定义，如果在 $x\to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限制地接近于确定的常数 A，则说函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时有极限或收敛，并称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 下面给出其精确定义(用"$\varepsilon-\delta$"语言来定