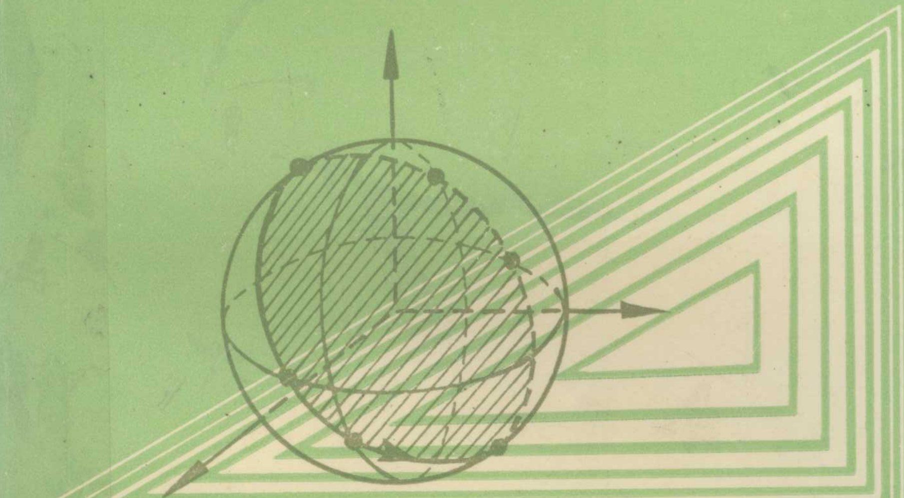
高等学校教学用书

高等数学习题课讲义

秦建国　娄梅枝　主编



GAODENGSHUXUEXITIKEJIANGYI

中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

高等数学习题课讲义

秦建国 娄梅枝 主编

中国矿业大学出版社

（苏）新登字第010号

内 容 提 要

全书共有十三章，内容包括微积分和线性代数。每章包括若干讲，每一讲内分为：教学目的与要求、概念题、基础题、综合题、课堂练习题五部分。

本书可供高等工科院校、师范院校、教育学院、电大类学生使用，也可供大、中专院校数学教师上课参考。

责任编辑：马跃龙
责任校对：关湘雯

高等学校教学用书
高等数学习题课讲义
秦建国 娄梅枝 主编

中国矿业大学出版社出版
新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷
开本850×1168毫米1/32 印张10.875 字数270千字
1992年11月第一版 1992年11月第一次印刷
印数：1—7500册

ISBN 7-81021-767-4

O·42 定价：4.70元

《高等数学习题课讲义》

编 委 会

前　　言

本书根据国家教委制定的高等工科院校、师范院校“高等数学”教学大纲，以同济大学编《高等数学》教材为底本，参考其它教材、指导书等编写的。其特点是可供上课用并参与教学过程，知识性、科学性、趣味性相结合，对教学内容、习题进行分类讲解，给学生一个把握该课程的标准。

本书可供高等工科院校、师范院校、教育学院、电大等学生使用，也可供大、中专院校教师上课参考。

参加本书编写的还有（按姓氏笔画排列）：王彩凤、叶汉源、刘玉霞、刘海军、刘晓军、朱如恒、陈书勤、杜春雨、杨荃馨、张文质、高吉全、黄淑林、傅洪兰、禚清亮、端木连喜、谭达材。

本书在编写过程中，参考了同济大学编《高等数学》等有关书籍，在此向原作者表示感谢。对于朱裕彪、杨节英副教授的关怀和指导，在此表示衷心感谢。

限于编者水平，教材中一定存在不妥之处，希望广大同行及读者提出批评和指正。

编　者

1992年4月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是《高等数学》研究的对象，伴随该课程的始终；极限是《高等数学》研究函数的最重要手段，在数学分析中处于十分重要的地位，因此深刻理解函数、极限概念是十分必要的。

第一讲　函数　初等函数

一　目的与要求

明确函数、复合函数、反函数等概念、会求初等函数的定义域，掌握函数的各种表示法。

必作题　习题1—1，1(2)、(4)，2，3(1)，(2)，4(4)、(5)，5，6，9(2)、(3)、(5)、(6)，10，11(1)、(2)，12(2)、(3)，14(1)、(2)、(3)，15(1)、(2)。习题1—2，1，2，3，4，5，6(3)、(5)，7(1)、(3)，8(2)、(3)，9(2)、(4)11，13(1)，14，15。

选作题　习题1—1，7，8，11(3)，13，14(4)、(5)，15(3)。习题1—2，10，16，17。

二　概念题

例1　填空题

(1) $|x-a|<\delta<=>a-\delta<x<$ ______。

(2) $U(\hat{a},g)=\{x|0<|x-a|<$ ______ $\}$。

（3）$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & 当x>0\\ 0 & 当x=0\\ -1 & 当x<0\end{cases}$ 称为________。

（4）函数一般用四种方法表示，这四种方法是________、________、________、________。

（5）设$f(x)$在I上有定义，如果对于任意两点x_1、$x_2\in I$，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$，则$f(x)$在I上是________。

（6）$\operatorname{tg}x$的周期是________。

（7）$y=\arccos(x^2)$可以看作由$y=\arccos u$及$u=$________复合而成的。

（8）由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用________式子表示的函数，称为初等函数。

例2　判断题

（1）若对任意函数$g(x)$，满足$f[g(x)]=g[f(x)]$，则$f(x)$等于常数。（　　）。

取$f(x)=x$验证之。

（2）$f(x)$为偶函数就不可能是奇函数。（　　）。

（3）$f(x)$为周期函数，必有最小正周期。（　　）。

（4）$f(x)$有界，$\sqrt[3]{f(x)}$也有界。（　　）

（5）定义域相同而解析式不同的两个函数必不相等。（　　）

（6）只要$f(x)$在R上严格单调递增，则必存在一点$x_0\in R$，使得$f(x_0)>0$。（　　）

例3　选择题

（1）下述各组函数哪一组是相同的？________

a．$\ln(x^2-4)$与$\ln(x+2)+\ln(x-2)$；

b. $f(x)=\dfrac{1}{[x]}$与$g(v)=\dfrac{1}{[v]}$;

c. $\dfrac{x}{x}$与1

(2) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域为____

a. $-3\leqslant x\leqslant 4$;　　b. $-2\leqslant x\leqslant 3$;

c. $x\geqslant 4$及$x\leqslant -3$;　　d. $3\leqslant x\leqslant 4$及$-3\leqslant x\leqslant -2$;

(3) 下列函数中是初等函数____。

a. $y=a^{x\ln x}$;　　b. $y=\dfrac{1}{2}(e^{ax}+e^{-ax})$

c. $y=\log_{\sqrt{3}}\sin x$;　　d. $y=|x|$。

三 基础题

例4 求$f(x)=[\sqrt{25-x^2}]^{-1}+\ln(\sin x)$的定义域。

解 要使函数$f(x)$有意义就必须

$$\begin{cases}\sqrt{25-x^2}\neq 0\\ 25-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases}$$

解得

$$-5<x<-\pi \text{ 及 } 0<x<\pi$$

注意 通常求函数定义域有如下原则:

(1) 偶次根式函数,根号下被开方数的值非负;

(2) 分式函数,其分母的值不为零;

(3) 对数函数的真数值必须是正数;

(4) $y=f(x)$的反函数$y=f^{-1}(x)$的定义域是原函数$y=f(x)$的值域;

(5) 具有物理、几何等实际意义的函数,它的定义域总是解

析表示的该函数定义域的子集，该子集由实际意义决定。

例5　已知 $f\left(\sin\frac{1}{2}x\right)=\cos x+1$，求$f\left(\cos\frac{1}{2}x\right)$。

解　$f\left(\sin\frac{1}{2}x\right)=\cos x+1=2-2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$

令 $t=\sin\frac{x}{2}$，则$f(t)=2-2t^2$

$\therefore\ f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2=1-\cos x$

注意　设法用 $\sin\frac{x}{2}$来表示$\cos+1$，然后用$t=\sin\frac{x}{2}$，从而写出$f(x)$的具体表达式，由此不难写出$f[g(x)]$的表达式。

例6　证明：函数 $y=\frac{1}{x^2}$在$(0,1)$ 内是无界的。

证明　对任意 $M>0$，为使$\frac{1}{x^2}>M$ 只须 $x^2<\frac{1}{M}$，或 $x<\frac{1}{\sqrt{M}}$。因为 x可以任意接近于零，故可使其满足上述不等式，如取$x_0=\frac{1}{\sqrt{1+M}}$，则$x_0\in(0,1)$，$\frac{1}{x_0^2}=M+1>M$，由定义、函数 $y=\frac{1}{x^2}$在$(0,1)$ 内无界。

注意　此题的关键是找 $x_0\in(0,1)$，使得$\frac{1}{x_0^2}>M$通常的做法是，从不等式 $f(x)>P$，逆推，得出 x_0的取值范围，再视具体情况而最后选取 x_0，还有一点值得指出，那就是 x_0 不是唯一的，此例中也可取，$x_0=\frac{1}{\sqrt{M+2}}$等。

例7 介绍两个函数：(1)“对任意$x\in R$,对应的y是不超过x的最大整数”。显然，对任意$x\in R$，都对应唯一一个y，这是一个函数，表示为$y=[x]$，如：$[1.6]=1$，$[9]=9$，$[0]=0$，$[-e]=-3$等等。

其图形为图1—1。

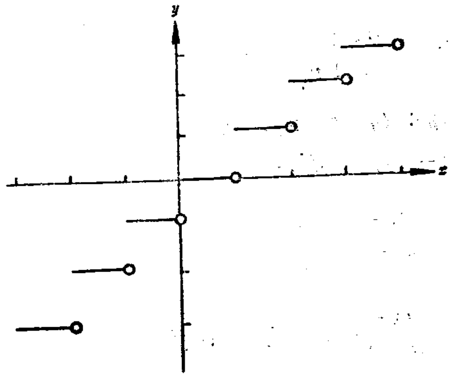


图 1—1

（2）“对任意$x\in R$，对应的$y=x-[x]$”这是一个函数，表示为$y=\{x\}$如$\{2.5\}=2.5-[2.5]=0.5$，$\{5\}=5-[5]=0$等等。

其图形为图1—2。

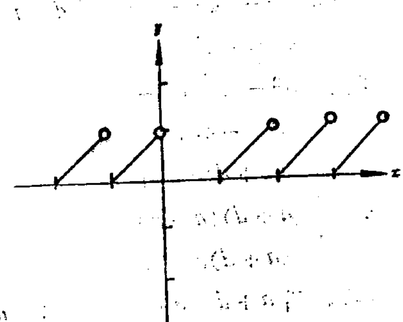


图1—2

例8 将下列复合函数“分解”为基本初等函数。

（1）$y=a^{\sin(3x^2-1)}$

（2）$y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$

解 （1）$y=a^u$，$u=\sin v$，$v=3x^2-1$

（2）$y=\ln u$，$u=v^2$，$v=\ln w$，$w=z^3$，$z=\ln x$

四　综合题

例9　求 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ 的反函数，又问当a、b、c、d满足什么条件时，反函数与直接函数相同？

解　由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，得

$$cxy+dy=ax+b，\text{或}$$

$$(a-cy)x=dy-b$$

$$\therefore\quad x=\frac{dy-b}{a-cy}$$

即　$y=\dfrac{dx-b}{a-cx}$为所求反函数。

欲知a、b、c、d满足什么条件时，该反函数与直接函数相等，[illegible]

[illegible]

$$\frac{dx-b}{a-cx}=\frac{ax+b}{cx+d}$$

整理得

$$-dcx^2-(d^2-bc)x+bd=acx^2-(a^2-bc)x-ab$$

即 $\begin{cases} ac=-dc \\ d^2-bc=a^2-bc \\ bd=-ab \end{cases}$

或 $\begin{cases} (a+d)c=0 \\ (a+d)(a-d)=0 \\ (a+d)b=0 \end{cases}$

这就是说，当 $a+d=0$ 或 $b=c=a-d=0$ 时反函数与直接函数相等，但须注意的是，$b=c=a-d=0$时，$a=d\neq 0$，否则，$b=c=$

$a=d\neq 0$有$ad-bc=0$。

例10 求$y=\sin^2 x$的周期。

解 根据周期函数的定义，若$f(x)$是以l为周期的周期函数，则有$f(x+l)=f(x)$（l为满足这个方程的最小正数）

$$\because \sin^2(x+l)-\sin^2 x=0$$

$$[\sin(x+l)+\sin x][\sin(x+l)-\sin x]=0$$

$$\sin\frac{2x+l}{2}\cos\frac{l}{2}\cos\frac{2x+l}{2}\sin\frac{l}{2}=0$$

由此得出
$$\sin\frac{2x+l}{2}=0 \quad (1)$$

$$\cos\frac{l}{2}=0 \quad (2)$$

$$\cos\frac{2x+l}{2}=0 \quad (3)$$

$$\sin\frac{l}{2}=0 \quad (4)$$

在(1)(3)两个方程中，l与x有关，因此不能由这两个方程求出l。由(4)可求出$l=2\pi$，由(2)可求出$l=\pi$，因此$y=\sin^2 x$是周期为π的周期函数。

评注 判断一个函数是否为周期函数和求周期函数的周期的步骤为

（1）列出方程$f(x+l)-f(x)=0$；

（2）由上述方程解出l；

（3）若$l>0$且为满足方程的最小值时，$f(x)$是周期函数，且函数的周期为l；

若$l\leqslant 0$，函数周期不存在；

若l与x有关，函数周期也不存在。

例11 由$y=e^x$的图形，作$y_1=e^{1-x}$的图形。

解　法一　由于$y=e^{1-x}=e^{-(x-1)}$，所以可以按如下步骤作y_1的图形。

第一，先作$y_{11}=e^{-x}$的图形，只要将$y=e^x$的图形绕y轴旋转180°即可得到$y_{11}=e^{-x}$的图形；

第二，再由$y=e^{-x}$的图形沿x轴正方向平行移动1个单位即可得到$y_1=e^{-(x-1)}=e^{1-x}$的图形(如图1—3(a))。

法二　先作$y_{12}=e^{x+1}$的图形，只要将$y=e^x$的图形沿x轴负方向平行移动1个单位，即可得到y_{12}的图形

再将$y_{12}=e^{x+1}$的图形绕y轴旋转180°，就得到$y=e^{-x+1}=e^{1-x}$的图形(图1—3(b))。

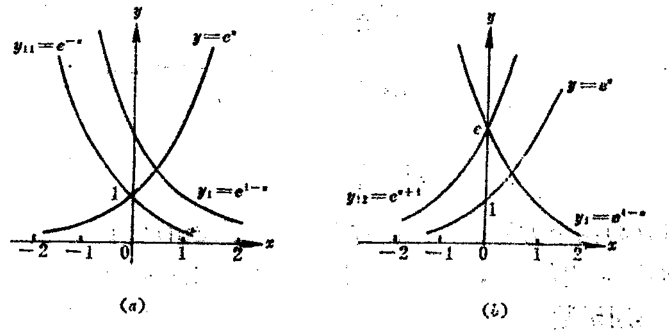


图1—3

第二讲　数列的极限　函数的极限

一　目的与要求

深刻理解数列极限，函数极限等概念，会用“$\varepsilon—N$”，“$\varepsilon—\delta$”的极限定义证明一些简单的极限。

必作题　习题1—3，1，2，3(1)、(2)、(3)，5；习题1—4，1(1)、(2)、(4)，2，4，5，6。

选作题 习题1—3，3(4)，4，6；习题1—4，3，7。

二 概念题

例1 填空题

(1) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，则$a$______$b$。

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则存在正数$M$，使得一切$x_n$都满足$|x_n|$______$M$。

(3) 设A是$f(x)$当$x\to a$时的左极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}$______$f(x)=A$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$，$f(n)$趋于$A$既可以是大于$A$趋于$A$，也可以是小于$A$趋于$A$；既可以时而大于$A$时而小于$A$趋于$A$，也可以是时而等于时而不等于地趋于$A$。试就上述四种情况分别举例说明之。______，______，______，______。

例2 判断题

(1) 设$a<0$，而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则存在$N$，当$n>N$时，$x_n<0$ (　　)

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$ (A为常数)，则存在$\delta>0$ 使当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>0$。 (　　)

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在$\delta>0$，$M>0$，使得$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)|\leqslant M$。 (　　)

(4) $f(x)$在x_0有无定义不影响$f(x)$在x_0有极限。(　　)

例3 选择题

设$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，则任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当______时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立。