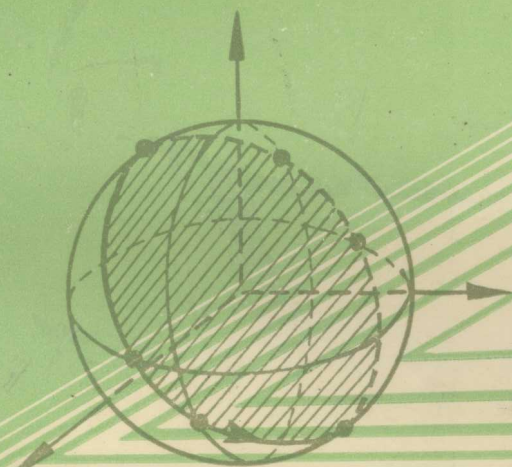


高等学校教学用书

高等数学习题课讲义

秦建国 娄梅枝 主编



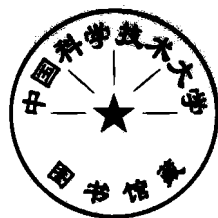
GAODENGSHUXUEXITIKEJIANGYI

中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

高等数学学习题课讲义

秦建国 娄梅枝 主编



中国矿业大学出版社

(苏)新登字第010号

内 容 提 要

全书共有十三章,内容包括微积分和线性代数。每章包括若干讲,每一讲内分为:教学目的与要求、概念题、基础题、综合题、课堂练习题五部分。

本书可作为理工院校、师范院校、教育学院、电大类学生使用,也可供大、中专院校数学教师上课参考。

责任编辑:马跃龙

责任校对:关湘雯

高等学校教学用书

高等数学习题课讲义

秦建国 姜梅枝 主编

中国矿业大学出版社出版

新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 $1/32$ 印张10.875 字数270千字

1992年11月第一版 1992年11月第一次印刷

印数:1—7500册

ISBN 7-81021-767-4

O·42

定价:4.70元

《高等数学习题课讲义》

编 委 会

主 编 秦建国 娄梅枝

副主编 马尔迈 王显军 叶璋礼

毕成良 冷学斌 徐如新

康志荣 黄庭章

(排名不分先后)

前 言

本书根据国家教委制定的高等工院校、师范院校“高等数学”教学大纲，以同济大学编《高等数学》教材为底本，参考其它教材、指导书等编写的。其特点是可供上课用并参与教学过程，知识性、科学性、趣味性相结合，对教学内容、习题进行分类讲解，给学生一个把握该课程的标准。

本书可供高等工院校、师范院校、教育学院、电大等学生使用，也可供大、中专院校教师上课参考。

参加本书编写的还有（按姓氏笔画排列）：王彩凤、叶汉源、刘玉霞、刘海军、刘晓军、朱如恒、陈书勤、杜春雨、杨荃馨、张文质、高吉全、黄淑林、傅洪兰、嵯清亮、端木连喜、谭达材。

本书在编写过程中，参考了同济大学编《高等数学》等有关书籍，在此向原作者表示感谢。对于朱裕彪、杨节英副教授的关怀和指导，在此表示衷心感谢。

限于编者水平，教材中一定存在不妥之处，希望广大同行及读者提出批评和指正。

编 者

1992年4月

目 录

前 言	(1)
第一章 函数与极限	(1)
第一讲 函数 初等函数	(1)
第二讲 数列的极限 函数的极限	(8)
第三讲 无穷小与无穷大 极限运算法则 极限存在准则 两个重要极限 无穷小的比较	(17)
第四讲 函数的连续性与间断点 连续函数的运算与初等 函数的连续性 闭区间上连续函数的性质	(26)
第二章 导数与微分	(35)
第五讲 导数概念 函数的和差积商的求导法则 反函数 的导数 复合函数的求导法则 初等函数的求导 问题 双曲函数与反双曲函数的导数	(35)
第六讲 高阶导数 隐函数的导数 由参数方程所确定的 函数的导数 相关变化率 函数的微分 微分在 近似计算中的应用	(42)
第三章 中值定理与导数的应用	(50)
第七讲 中值定理 罗必塔法则 泰勒公式	(50)
第八讲 函数单调性的判定法 函数的极值及其求法 最 大值、最小值问题 曲线的凹凸与拐点 函数图 形的描绘 曲率 方程的近似解	(58)
第四章 不定积分	(66)
第九讲 不定积分的概念与性质 换元积分法	(66)
第十讲 分部积分法 几种特殊类型函数的 积分 积分表的使用	(79)

第五章 定积分	(95)
第十一讲 定积分概念 定积分的性质 中值定理 微积分基本公式.....	(95)
第十二讲 定积分的换元法 定积分的分部积分法 定积分的近似计算 广义积分.....	(102)
第六章 定积分的应用	(112)
第十三讲 定积分的元素法 平面图形的面积、体积 平面曲线的弧长 功 水压力和引力 平均值.....	(112)
第七章 空间解析几何与向量代数	(119)
第十四讲 空间直角坐标系 向量及其加减法 向量与数的乘法 向量的坐标 数量积 向量积.....	(119)
第十五讲 平面及其方程 空间直线及其方程.....	(125)
第十六讲 曲面及其方程 空间曲线及其方程 二次曲面.....	(138)
第八章 多元函数微分法及其应用	(151)
第十七讲 多元函数的基本概念 偏导数 全微分及其应用.....	(151)
第十八讲 多元复合函数的求导法则 隐函数求导公式.....	(161)
第十九讲 微分法在几何上的应用 方向导数与梯度.....	(173)
第二十讲 多元函数的极值及其求法.....	(182)
第九章 重积分	(191)
第二十一讲 二重积分的概念与性质 二重积分的计算法 二重积分的应用.....	(191)
第二十二讲 三重积分概念及其计算法 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分.....	(203)
第十章 曲线积分与曲面积分	(214)
第二十三讲 对弧长的曲线积分 对坐标的曲线积分 格林公式及其应用.....	(214)
第二十四讲 对面积的曲面积分 对坐标的曲面积分.....	(223)
第二十五讲 高斯公式 通量与散度 斯托克斯公式	

环流量与旋度	(234)
第十一章 无穷级数	(242)
第二十六讲 常数项级数的概念和性质 常数项级数的审敛法	(242)
第二十七讲 幂级数 函数展开成幂级数 函数的幂级数展开式的应用	(254)
第二十八讲 傅立叶级数 正弦级数和余弦级数 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数	(269)
第十二章 微分方程	(280)
第二十九讲 微分方程的基本概念 可分离变量的微分方程 齐次方程 一阶线性微分方程 全微分方程	(280)
第三十讲 可降阶的高阶微分方程 高阶线性微分方程	(290)
第三十一讲 常系数线性微分方程	(300)
工程数学 《线性代数》	(310)
第三十二讲 行列式 矩阵	(310)
第三十三讲 向量组的线性相关性和矩阵的秩 线性方程组 二次型	(322)

第一章 函数与极限

函数是《高等数学》研究的对象，伴随该课程的始终；极限是《高等数学》研究函数的最重要手段，在数学分析中处于十分重要的地位，因此深刻理解函数、极限概念是十分必要的。

第一讲 函数 初等函数

一 目的与要求

明确函数、复合函数、反函数等概念、会求初等函数的定义域，掌握函数的各种表示法。

必作题 习题 1—1, 1(2)、(4), 2, 3(1), (2), 4(4)、(5), 5, 6, 9(2)、(3)、(5)、(6), 10, 11(1)、(2), 12(2)、(3), 14(1)、(2)、(3), 15(1)、(2)。习题 1—2, 1, 2, 3, 4, 5, 6(3)、(5), 7(1)、(3), 8(2)、(3), 9(2)、(4), 11, 13(1), 14, 15。

选作题 习题 1—1, 7, 8, 11(3), 13, 14(4)、(5), 15(3)。习题 1—2, 10, 16, 17。

二 概念题

例1 填空题

(1) $|x-a| < \delta \Leftrightarrow a-\delta < x < \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $U(\hat{a}, g) = \{x | 0 < |x-a| < \underline{\hspace{2cm}}\}$ 。

$$(3) y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \text{ 称为 } \underline{\hspace{2cm}} \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

(4) 函数一般用四种方法表示,这四种方法是 _____。

(5) 设 $f(x)$ 在 I 上,有定义,如果对于任意两点 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 I 上是 _____。

(6) $\operatorname{tg} x$ 的周期是 _____。

(7) $y = \arccos(x^2)$ 可以看作由 $y = \arccos u$ 及 $u = \underline{\hspace{2cm}}$ 复合而成的。

(8) 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用 _____ 式子表示的函数, 称为初等函数。

例2 判断题

(1) 若对任意函数 $g(x)$, 满足 $[g(x)] = g[f(x)]$, 则 $f(x)$ 等于常数。()。

取 $f(x) = x$ 验证之。

(2) $f(x)$ 为偶函数就不可能是奇函数。()。

(3) $f(x)$ 为周期函数, 必有最小正周期。()。

(4) $f(x)$ 有界, $\sqrt[n]{f(x)}$ 也有界。()。

(5) 定义域相同而解析式不同的两个函数必不相等。()。

(6) 只要 $f(x)$ 在 R 上严格单调递增, 则必存在一点 $x_0 \in R$, 使得 $f(x_0) > 0$ 。()。

例3 选择题

(1) 下述各组函数哪一组是相同的? _____

a. $\ln(x^2 - 4)$ 与 $\ln(x+2) + \ln(x-2)$;

b. $f(x) = \frac{1}{[x]}$ 与 $g(v) = \frac{1}{[v]}$;

c. $\frac{x}{x}$ 与 1.

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域为_____

a. $-3 \leq x \leq 4$;

b. $-2 \leq x \leq 3$;

c. $x \geq 4$ 及 $x \leq -3$;

d. $3 \leq x \leq 4$ 及 $-3 \leq x \leq -2$;

(3) 下列函数中是初等函数_____。

a. $y = a^{x+1+x}$;

b. $y = \frac{1}{2}(e^{x^2} + e^{-x^2})$;

c. $y = \log_{\sqrt{3}} \sin x$;

d. $y = |x|$.

三 基础题

例4 求 $f(x) = [\sqrt{25-x^2}]^{-1} + \ln(\sin x)$ 的定义域。

解 要使函数 $f(x)$ 有意义就必须

$$\begin{cases} \sqrt{25-x^2} \neq 0 \\ 25-x^2 \geq 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

解得

$$-5 < x < -\pi \text{ 及 } 0 < x < \pi$$

注意 通常求函数定义域有如下原则:

(1) 偶次根式函数, 根号下被开方数的值非负;

(2) 分式函数, 其分母的值不为零;

(3) 对数函数的真数值必须是正数;

(4) $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域是原函数 $y = f(x)$ 的值域;

(5) 具有物理、几何等实际意义的函数, 它的定义域总是解

析表示的该函数定义域的子集，该子集由实际意义决定。

例5 已知 $f\left(\sin \frac{1}{2}x\right) = \cos x + 1$ ，求 $f\left(\cos \frac{1}{2}x\right)$ 。

解 $f\left(\sin \frac{1}{2}x\right) = \cos x + 1 = 2 - 2\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2$

令 $t = \sin \frac{x}{2}$ ，则 $f(t) = 2 - 2t^2$

$\therefore f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 2 - 2\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \cos x$

注意 设法用 $\sin \frac{x}{2}$ 来表示 $\cos x + 1$ ，然后用 $t = \sin \frac{x}{2}$ ，从而写出 $f(x)$ 的具体表达式，由此不难写出 $f[g(x)]$ 的表达式。

例6 证明：函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的。

证明 对任意 $M > 0$ ，为使 $\frac{1}{x^2} > M$ 只须 $x^2 < \frac{1}{M}$ ，或 $x < \frac{1}{\sqrt{M}}$ 。因为 x 可以任意接近于零，故可使其满足上述不等式，如

取 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{1+M}}$ ，则 $x_0 \in (0, 1)$ ， $\frac{1}{x_0^2} = M + 1 > M$ ，由定义、函

数 $y = \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, 1)$ 内无界。

注意 此题的关键是找 $x_0 \in (0, 1)$ ，使得 $\frac{1}{x_0^2} > M$ 通常的做法是，从不等式 $f(x) > P$ ，逆推，得出 x_0 的取值范围，再视具体情况而最后选取 x_0 ，还有一点值得指出，那就是 x_0 不是唯一的，

此例中也可取 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{M+2}}$ 等。

例7 介绍两个函数: (1) “对任意 $x \in R$, 对应的 y 是不超过 x 的最大整数”。显然, 对任意 $x \in R$, 都对应唯一的一个 y , 这是一个函数, 表示为 $y = [x]$, 如: $[1.6] = 1, [9] = 9, [0] = 0, [-e] = -3$ 等等。

其图形为图1-1。

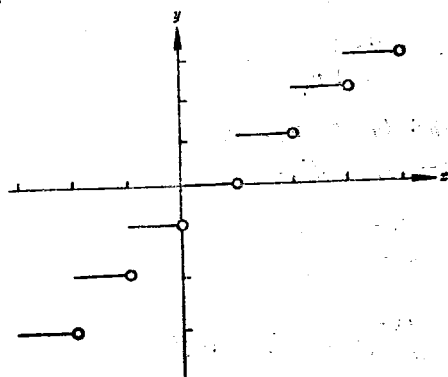


图1-1

(2) “对任意 $x \in R$, 对应的 $y = x - [x]$ ”这是一个函数, 表示为 $y = \{x\}$ 如 $\{2.5\} = 2.5 - [2.5] = 0.5, \{5\} = 5 - [5] = 0$ 等等。

其图形为图1-2。

例8 将下列复合函数“分解”为基本初等函数。

(1) $y = a^{\sin(3x^2-1)}$

(2) $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)]$

解 (1) $y = a^u, u = \sin v, v = 3x^2 - 1$

(2) $y = \ln u, u = v^2, v = \ln w, w = z^3, z = \ln x$

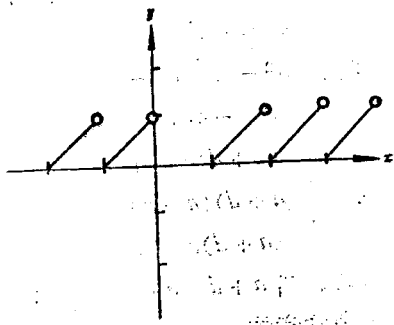


图1-2

四 综合题

例9 求 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) 的反函数, 又问当 a 、 b 、 c 、 d 满足什么条件时, 反函数与直接函数相同?

解 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, 得

$$cxy + dy = ax + b, \text{ 或}$$

$$(a - cy)x = dy - b$$

$$\therefore x = \frac{dy - b}{a - cy}$$

即 $y = \frac{dx - b}{a - cx}$ 为所求反函数。

欲知 a 、 b 、 c 、 d 满足什么条件时, 该反函数与直接函数相等, 令

$$\frac{dx - b}{a - cx} = \frac{ax + b}{cx + d}$$

整理得

$$-dcx^2 - (d^2 - bc)x + bd = acx^2 - (a^2 - bc)x - ab$$

$$\text{即 } \begin{cases} ac = -dc \\ d^2 - bc = a^2 - bc \\ bd = -ab \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} (a+d)c = 0 \\ (a+d)(a-d) = 0 \\ (a+d)b = 0 \end{cases}$$

这就是说, 当 $a+d=0$ 或 $b=c=a-d=0$ 时反函数与直接函数相等, 但须注意的是, $b=c=a-d=0$ 时, $a=d \neq 0$, 否则, $b=c=$

$a=d \neq 0$ 有 $ad-bc=0$ 。

例10 求 $y = \sin^2 x$ 的周期。

解 根据周期函数的定义, 若 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数, 则有 $f(x+l) = f(x)$ (l 为满足这个方程的最小正数)

$$\therefore \sin^2(x+l) - \sin^2 x = 0$$

$$[\sin(x+l) + \sin x][\sin(x+l) - \sin x] = 0$$

$$\sin \frac{2x+l}{2} \cos \frac{l}{2} \cos \frac{2x+l}{2} \sin \frac{l}{2} = 0$$

由此得出 $\sin \frac{2x+l}{2} = 0$ (1)

$$\cos \frac{l}{2} = 0$$
 (2)

$$\cos \frac{2x+l}{2} = 0$$
 (3)

$$\sin \frac{l}{2} = 0$$
 (4)

在(1)(3)两个方程中, l 与 x 有关, 因此不能由这两个方程求出 l 。
由(4)可求出 $l = 2\pi$, 由(2)可求出 $l = \pi$, 因此 $y = \sin^2 x$ 是周期为 π 的周期函数。

评注 判断一个函数是否为周期函数和求周期函数的周期的步骤为

(1) 列出方程 $f(x+l) = f(x)$;

(2) 由上述方程解出 l ;

(3) 若 $l > 0$ 且为满足方程的最小值时, $f(x)$ 是周期函数, 且函数的周期为 l ;

若 $l \leq 0$, 函数周期不存在;

若 l 与 x 有关, 函数周期也不存在。

例11 由 $y = e^x$ 的图形, 作 $y_1 = e^{1-x}$ 的图形。

解法一 由于 $y = e^{1-x} = e^{-(x-1)}$ ，所以可以按如下步骤作 y_1 的图形。

第一，先作 $y_{11} = e^{-x}$ 的图形，只要将 $y = e^x$ 的图形绕 y 轴旋转 180° 即可得到 $y_{11} = e^{-x}$ 的图形；

第二，再由 $y = e^{-x}$ 的图形沿 x 轴正方向平行移动 1 个单位即可得到 $y_1 = e^{-(x-1)} = e^{1-x}$ 的图形(如图 1—3(a))。

法二 先作 $y_{12} = e^{x+1}$ 的图形，只要将 $y = e^x$ 的图形沿 x 轴负方向平行移动 1 个单位，即可得到 y_{12} 的图形

再将 $y_{12} = e^{x+1}$ 的图形绕 y 轴旋转 180° ，就得到 $y = e^{-x+1} = e^{1-x}$ 的图形(图 1—3(b))。

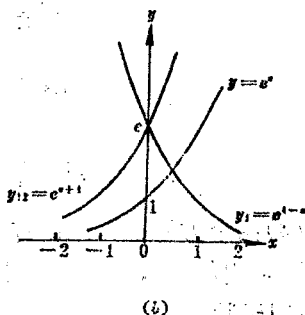
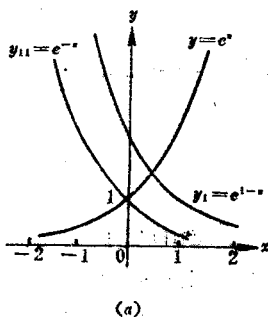


图 1—3

第二讲 数列的极限 函数的极限

一 目的与要求

深刻理解数列极限，函数极限等概念，会用“ $\epsilon-N$ ”，“ $\epsilon-\delta$ ”的极限定义证明一些简单的极限。

必作题 习题 1—3，1，2，3 (1)、(2)、(3)，5，习题 1—4，1 (1)、(2)、(4)，2，4，5，6。

