JICHU SHUXUE

基础数学

主　编　杨万全
副主编　回　春　杨　光

東北林業大學出版社

基础数学

主　编　杨万全
副主编　回　春　杨　光

东北林业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

基础数学/杨万全主编．—哈尔滨：东北林业大学出版社，2009.6
ISBN 978－7－81131－475－5

Ⅰ．基…　Ⅱ．杨…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 104853 号

责任编辑：杨秋华
封面设计：彭　宇

NEFUP

基础数学
Jichu Shuxue
主编　杨万全
副主编　回春　杨光

东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路 26 号）
哈尔滨骅飞印务有限公司印装
开本787×960　1/16　印张12.75　字数224千字
2009 年 6 月第 1 版　2009 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—1 000 册
ISBN 978-7-81131-475-5
定价：30.00 元

《基础数学》编写人员

主　编　杨万全
副主编　回　春　杨　光
参　编　吴海燕
主　审　顾凤岐

前　言

高等数学是高职高专院校各专业必修的一门重要的公共基础课，它不仅是学生学习后续专业课程的基础和工具，也对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学知识解决实际问题的能力都有着非常重要的作用．为适应高等职业技术教育改革的需要，本教材根据教育部制定的“高职高专数学教学的基本要求”，遵循“以必需，够用为度”的原则，将重点放在“掌握概念，强化应用，培养技能”上．教学内容符合学科要求，知识结构合理．

在编写过程中，努力体现高等职业技术教育特点，以实际例子为引例，导入概念、性质和定理，并加强了直观描述和几何解释，使抽象的概念形象化．同时，让学生体会到数学是来源于实际，又能指导实际的一种思维创造．淡化理论推导，逐步渗透数学建模的思想，注重应用意识与创新思维能力的培养．

在每章的后面介绍了与微积分发展有关的数学家的生平故事，使学生在学习数学知识的同时了解到微积分的发展史，增强了数学课上的人文氛围，加强数学文化的熏陶．

本教材的教学时数为 80～100 之间，教师可根据自己学校的教学情况，对书中的内容进行适当的增减．

本教材由大兴安岭职业学院杨万全负责提出全书编写的总体思路，并编写第一章至第五章；大兴安岭职业学院杨光负责编写第六章至第八章；大兴安岭职业学院回春负责编写第九章至第十一章；大兴安岭职业学院吴海燕负责编制全书习题，绘制书中的所有图形及编写每章后面的数学家的故事．

本教材由东北林业大学顾凤岐教授任主审，并对本书的编写提出了宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢．

由于我们的水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大师生、读者批评指正．

编　者

2009 年 3 月

内容提要

本书是根据高职高专教育的培养目标,并结合编者多年来讲授"高等数学"课所积累的教学经验编写而成. 全书共分11章,内容包括函数;极限与连续;导数与微分;中值定理与导数的应用;不定积分;定积分及其应用;多元函数微分学;二重积分;无穷级数;随机事件与概率.

本书可作为高职经济类、管理类、生物类等专科学生及高专师范类的学习教材,也可作为成人教育教材.

目　录

第一章　函　数

函数是近代数学的基本概念之一，是客观世界中变量之间依存关系的反映，高等数学就是以函数为主要研究对象的一门学科. 本章我们将首先回顾和拓展函数的概念，为以后的学习奠定必要的基础.

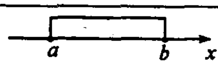
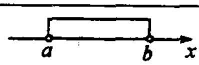
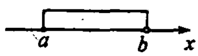
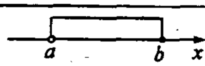
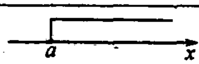
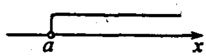
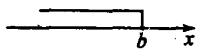
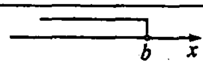
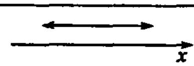
第一节　函数及相关概念

一、区间与邻域

1. 区间

区间是数集的一种表示形式，它是介于两个实数 a,b $(a<b)$ 之间的实数构成的集合；是在中学已经熟悉的基本概念；是高等数学中使用较多的实数集。它有以下的表现形式，如表 1－1 所示.

表 1－1

分类	定义	名称	符号	数轴表示
有限区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
	$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	左闭右开区间	$[a,b)$	
	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	左开右闭区间	$(a,b]$	
无限区间	$\{x\mid x\geqslant a\}$		$[a,+\infty)$	
	$\{x\mid x>a\}$		$(a,+\infty)$	
	$\{x\mid x\leqslant b\}$		$(-\infty,b]$	
	$\{x\mid x<b\}$		$(-\infty,b)$	
	$\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$		$(-\infty,+\infty)$	

其中：a 和 b 叫做区间的端点，有限区间的左右端点的距离 $b-a$ 叫做区间的长度.

2. 邻域

邻域是以 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域.

设 a 和 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个 δ 邻域,点 a 叫做邻域的中心,δ 叫做邻域的半径,长度为 2δ 的开区间,此邻域也可记为:

$$|x-a|<\delta,\quad \text{即}:a-\delta<x<a+\delta.$$

二、函数概念

定义 1.1 设 D 是一个给定的数集,如果对于 D 中任意给定的一个元素 x,按照某种对应法则 f,都有确定的实数 y 与之相对应,这种对应关系称为函数关系,或称为函数,记作:

$$y=f(x)\quad x\in D$$

其中,x 称为自变量;数集 D 称为函数的定义域;y 称为因变数,与 x 的值相对应的 y 值称为函数值,函数值的集合称为值域,记作:

$$\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

在函数的定义中,如果在定义域内任取一个数值时,对应的 y 值是唯一的,称 y 是 x 的单值函数,$x\to y$ 的对应法则 f 称为单值对应;否则,称为多值函数. $x\to y$的对应法则称为 f 多值对应. 例如,反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$就是单值函数;而$y=\pm\sqrt{1-x^2}$就是多值函数. 凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数.

三、函数的表示法

函数的表示方法常用的有:解析法、列表法、图像法三种.

1. 解析法

用数学表达式表示函数的方法,如 $y=x^2+1$. 解析法的优点是便于进行理论推导和计算函数性态的研究.

在实际应用中,用解析法表示函数时,有时由于变量之间的函数关系较为复杂,需用几个式子表示,此时不能把它理解为是几个函数,而应该理解为由几个式子表示的一个函数. 这样的函数称为分段函数. 分段函数的定义域是函数的各个定义域区间的并集.

例如,函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}\quad \text{的定义域是 } D=(-\infty,+\infty).$$

例 1 已知函数$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geqslant 0\\2x^2+4 & x<0\end{cases}$，求：$f(-1)$，$f(1)$，$f(x-1)$.

解 $f(-1)=2(-1)^2+4=6$;

$f(1)=1+1=2$;

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+1 & x-1\geqslant 0\\2(x-1)^2+4 & x-1<0\end{cases}$$

即 $f(x-1)==\begin{cases}x & x\geqslant 1\\2x^2-4x+6 & x>1\end{cases}$.

例 2 已知$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\in(0,+\infty)\\1 & x=0\\-x+1 & x\in(-\infty,0)\end{cases}$，求：$f(-1)$,$f(0)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$.

解 因为$-1\in(-\infty,0)$，所以，$f(-1)=(-x+1)|_{x=-1}=-(-1)+1=2$;

$f(0=1)$;

因为$\frac{1}{2}\in(0,+\infty)$，所以$f(\frac{1}{2})=x^2+1\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{4}{5}$.

例 3 已知$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\x+1 & x>1\end{cases}$，求：$f(0)$,$f(1)$,$f(2)$,$f(a)$.

解 $f(0)=\sqrt{0}=0$;$f(1)=\sqrt{1}=2$;$f(2)=2+1=3$;

$$f(a)=\begin{cases}2\sqrt{a} & 0\leqslant a\leqslant 1\\a+1 & a>1\end{cases}.$$

例 4 设$\varphi(x)=\frac{|x+1|}{x^2-1}$，求：$\varphi(0)$,$\varphi(a)$.

分析：此函数带有绝对值，对$\varphi(a)$的结果要根据a的情况进行讨论.

解 $\varphi(0)=\frac{|0+1|}{0^2-1}=\frac{1}{-1}=-1$;

$$\varphi(a)=\frac{|a+1|}{a^2-1}=\begin{cases}\frac{1}{a-1} & a>-1\text{ 且 }a\neq 1\\-\frac{1}{a-1} & a<-1.\end{cases}$$

2. 列表法

以表格形式表示函数的方法，如三角函数表、对数表等，都是以这种方法表示的函数. 列表法的优点是可以直接查到表中所列出的函数值.

3. 图像法

以图形表示函数的方法.这种方法在工程技术上应用较普遍,图像法的优点是形象直观,可以看到函数的变化趋势.

第二节 某些函数的重要性质

一、函数的单调性

函数的单调性也叫函数的增减性.函数的单调性是对某个区间而言的,它是一个局部概念.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I(I\subseteq D)$ 上有定义,若对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的(又称增函数);反之,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的(又称减函数).

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,\infty)$ 上是单调增加的,在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,若函数 $f(x)$ 在区间 I 内单调,则称区间 I 是函数 $f(x)$ 的单调区间.

二、函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义,若用 $-x$ 换 $x(x\in D$ 且 $-x\in D)$,函数值不变,即

$$f(-x)=f(x)$$

则函数 $f(x)$ 为区间 D 上的偶函数.如果满足

$$f(-x)=-f(x)$$

则函数 $f(x)$ 为区间 D 上的奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例如,函数 $y=\cos x$ 及 $y=x^2$ 都是偶函数,而函数 $y=\sin x$ 及 $y=x^3$ 都是奇函数,但是函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 和 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 都是既非偶函数又非奇函数.

三、函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I(I\subseteq D)$ 上有定义,若存在一个正数 M,使得对于一切 $x\in I$,恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数$f(x)$在区间I上是有界的，或称$f(x)$是I上的有界函数. M称为$f(x)$在区间I上的一个界,显然,有界函数的界不是唯一的.

例如,函数$y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内,恒有$|\sin x|\leqslant 1$,1是它的一个界,而集合$\{y \mid y\geqslant 1\}$中的每个元素都可以作为它的界. 函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$上是无界的,而在区间$(1,2)$上是有界的.

四、函数的周期性

设函数$y=f(x)$在区间$I(I\subseteq D)$上有定义,若存在一个不为零的常数L,使得对于任一的$x\in I$,恒有

$$f(x+L)=f(x) \quad (x+L\in I)$$

则称$f(x)$为区间I上的周期函数,L称为$f(x)$的周期. 通常所说的周期是指函数的最小正周期.

例如,函数$y=\sin x$,$y=\cos x$是以2π为周期的周期函数;$y=\tan x$,$y=\cot x$是以π为周期的周期函数.

第三节　函数的运算(反函数与复合函数)

函数之间可以进行加、减、乘、除等代数运算,也可以进行复合运算和反函数运算,通过这些初等运算将会得到新的有用的函数.

一、复合函数

定义1.2　设y是变数u的函数$y=f(u)$,u是x的函数$u=g(x)$,如果对于函数$u=g(x)$定义域的每一个x对应的u都能使函数$y=f(u)$有意义,那么,y就是x的函数,这个函数称为$y=f(u)$,$u=g(x)$的复合函数,记为$y=f(g(x))$. u称为复合函数$y=f(g(x))$的中间变数.

例1　指出下列函数的复合过程.

(1)$y=\sin^2 x$;　(2)$y=e^{x^2+1}$;　(3)$y=\log\tan\dfrac{x}{2}$.

解　(1)$y=\sin^2 x$是由$y=u^2$,$u=\sin x$复合而成的,u为中间变数;

(2)$y=e^{x^2+1}$是由$y=e^u$及$u=x^2+1$复合而成的,u为中间变数;

(3)$y=\log\tan\dfrac{x}{2}$可以看作由三个简单函数$y=\lg u$,$u=\tan\mu$,$\mu=\dfrac{x}{2}$复

合而成，μ、u 为中间变数．

把一个复杂的函数分解为若干个简单函数的复合，这是在实际运算中经常使用，应该十分注意.

例 2 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求：$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f(x^2)$，$f(\ln x)$ 的定义域.

解 由题意得：在函数 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 中，由 $0<\frac{1}{x}<1$，得 $x>1$，所以 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域为 $x>1$；

在函数中 $f(x^2)$，由 $0<x^2<1$，得 $-1<x<1$ 且 $x\neq0$，所以 $f(x^2)$，的定义域为 $-1<x<1$ 且 $x\neq0$；

在函数 $f(\ln x)$ 中，由 $0<\ln x<1$，得 $1<x<\mathrm{e}$，所以 $f(\ln x)$，的定义域为 $1<x<\mathrm{e}$.

二、反函数

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域为 C. 根据这个函数中 x，y 的关系，我们用 y 把 x 表示出来，得到 $x=\varphi(y)$. 对于数集 C 中的任何一个数 y，通过 $x=\varphi(y)$，x 在 D 中都有唯一的值和它相对应，那么 $x=\varphi(y)$，就表示 x 是自变量 y 的函数. 这个函数 $x=\varphi(y)\ (y\in C)$ 叫做函数 $y=f(x)\ (x\in D)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，常以 x 表示自变量，y 表示因变量. 于是 $x=f^{-1}(y)$，按习惯表示为 $y=f^{-1}x$.

例 3 求函数 $y=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\ (x\in R)$ 的反函数.

解 由 $y=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ 可解得 $x=\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$，交换 x，y 的位置，即得所求的反函数 $y=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ 或 $y=\ln x-\ln(1-x)$，其定义域为 $(0,1)$.

注：(1) 只有从定义域到值域上一一对应所确定的函数才有反函数. 例如 $(y=\sin x)\ (x\in R)$ 没有反函数，而 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 有反函数是反正弦函数 $y=\arcsin x\ (-1\leqslant x\leqslant1)$.

(2) 反函数的定义域和值域分别是原函数的值域和定义域. 因此反函数的定义域不能由其解析式来求，而应该求原函数的值域. 例如 $y=2^x\quad x\in[1,2]$ 的反函数是 $y=\log_2 x$ 的定义域应为 $x\in[2,4]$ 而不是 $(0,+\infty)$.

(3) 互为反函数的两个函数具有相同的单调性，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称. 例如 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 互为反函数且都为增函数.

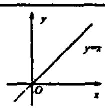
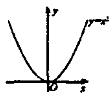
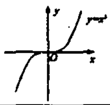
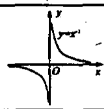
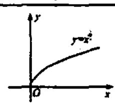
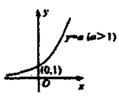
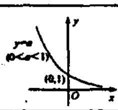
第四节　初等函数

一、基本初等函数

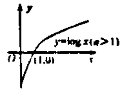
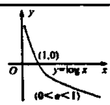
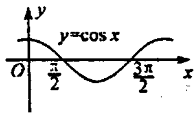
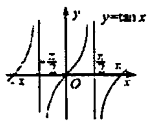
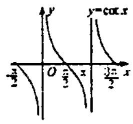
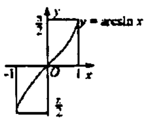
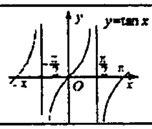
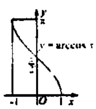
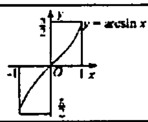
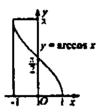
定义 1.4　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

基本初等函数应用非常广泛，这些函数在初等数学中已做过较详细的介绍. 我们必须熟记它们的定义域、图像和性质，见表 1－2.

表 1－2

	函数	定义域与值域	图像	性质
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 增函数
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$是减函数 在$[0,+\infty)$是增函数
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 增函数
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)$ $\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)$ $\cup(0,+\infty)$		奇函数 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 内分别是减函数
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调递增
指数函数	函数	定义域与值域	图像	性质
	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		增函数
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		减函数

续表 1－2

对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		增函数
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		减函数
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π 有界，在区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in Z)$ 是增函数 在区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in Z)$ 是减函数
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在区间 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ $(k\in Z)$ 是减函数 在区间 $[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi]$ $(k\in Z)$ 是增函数
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi+(k\in Z)$ $\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，无界，在区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in Z)$ 是增函数
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，无界，在区间 $(k\pi,2k\pi+\pi)$ $(k\in Z)$ 是减函数
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$		奇函数，有界，增函数
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界，减函数
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，有界，增函数
	$y=\mathrm{arc\ cot}x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		有界，减函数