SHUXUEJIETICELUEJINBIAN

数学解题策略精编

徐利治题

上海科技教育出版社

數学解題策略精編

徐利治题

殷堰工 编著

上海科技教育出版社

（沪）新登字116号

数学解题策略精编

殷堰工　编著

上海科技教育出版社出版发行
（上海冠生园路 393 号）
各地新华书店经销　海安人民印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 9　字数 200000
1994年7月第1版　1994年7月第1次印刷
印数 1—5200

ISBN 7-5428-0833-8
G·782

定价：7.60元

前 言

美国著名数学家哈尔莫斯说过:“问题是数学的心脏”。随着数学教育家G.波利亚的《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》三部经典著作的问世，一个探索解题思路和方法的热潮迅速席卷全球。毋容置疑，学习和研究数学，离不开解题。数学教育发展到今天，又为解题理论赋予了新要求，提供了新依据。美国数学家贝克发表权威文章指出:“解题教学——当前数学教学的新动向”;国内的许多有识之士则强调“解题教学是数学教学的中心”这一鲜明观点。国内外学者都把解题教学、培养能力放到了中学数学教学改革这一战略的高度上。近年来，这方面的书刊文章屡屡可见，出现了前所未有的喜人景象。作为数学教育战线上的一员，笔者自1983年参加工作以来，致力于数学解题方法与技巧乃至策略的研究，小有收获，曾编写出版了两本小册子。然掩卷沉思，总感意犹未尽，扪心自问，似觉“人云我亦云”的成分多了些，不安之情时刻萦绕着我。

一个深秋的夜晚，明月当空，独坐案头，我苦苦思索着，忽发异想，决定把自己近几年已发表的上百篇文章进行筛选，编就一部具有自己风格的解题方法与技巧的书。秋去春来，经过筛选又筛选，修改再修改，几易其稿，勉力使这部解题方法和技巧的书能上升到解题策略和思想，以形成自己的特色，终于在今年暑期前脱稿。捧着厚厚的手稿，我是喜忧参半。喜者毕竟迈出了实现设想的第一步，忧的是第二步，出版！当今各行各业追求利润，讲究

经济效益，出书谈何容易。令人感动的是上海科技教育出版社从中学数学教学改革的需要出发，本着大面积提高中学数学教学质量的宗旨，毅然将拙作列入出版计划，使拙作得以面世，庆幸之余，特赘数言。

特别需要提及的是华东师范大学数学系张奠宙教授在百忙中仔细审阅了原稿，提出了许多有益的建议并欣然为本书作序，使本书增色不少。借此机会，谨向他以及许多给我以无私帮助的同仁、有关书籍的著者(见参考书目)、报刊杂志中文章的作者表示最诚挚的谢意。同时，我还要感谢国内数学方法论的首创者，我的老师、著名数学家徐利治教授为本书的书名题了字。

如果本书能予读者有所裨益，作者幸甚。由于水平有限，错失恐所难免，敬希读者不吝指正。

作　者

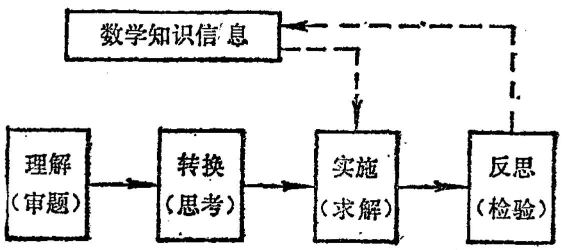
1992年5月

于苏州教育学院

目　　录

绪　论

学习数学，离不开解题，这是众所公认的。那么，什么叫解题？前苏联数学家C.A.雅诺夫斯卡娅指出：“解题就是把题归结为已经解过的题”。这句话可以认为是：“解题就是从已知到未知的转化。”著名数学教育家G.波利亚则在其著作《怎样解题》中把它归结为“一张表”，其实质可用“理解、转换、实施、反思”八个字来概括，我们用框图来表示的话，就是：



在这个框图中，数学知识信息是取得成功的重要一环。这里所指的数学知识信息是解题所需的数学概念、法则、定理、公式以及解题的基本方法等。

如果我们从思维活动的过程来研究解题，那么按德国心理学家K．邓克尔提出的“范围渐趋缩小的汇综的模式”，其心理活动可分为以下三个层次：

1．一般的解决：确定解决问题的大致范围，明确解题的总体方向；

2．功能的解决：按可能的方向缩小范围，寻找符合方向，发挥解决功能的解题途径；

3．特殊的解决：进一步缩小功能解决的途径，具体化为特殊方向，即解题的运算程序或推理步骤等过程。

这三个层次是逐渐递进的，我们也可以用框图使之明了化，即：

运用一般逻辑方法阶段 → 运用基本的数学方法阶段 → 运用具体的解题方法和技巧

这个框图的实质是数学解题的思维结构图，是解题程序化的一种表现形式。

谈解题，研究解题是为了学习和研究数学的需要。那么，解题的重要性是否光凭口头上说说“离不开”三个字就可包揽了呢？这显然是不够的，我们必须从理论和实践上对其重要性予以论述。要说明这一点，应当在解题的功能上进行研讨。我以为，解题主要体现以下五大功能：

1．教育功能：通过对数学问题的求解，可以形成正确的思维方法，建立起科学的解题观，进而形成和树立科学的世界观，学到科学的方法论。

2．选择功能：针对不同的数学问题所提供的信息，需要解题者从中挑选，去伪存真，迅速地作出决断。信息选得不好，便会事倍功半，费时费力。

3．组织功能：解题方法很多，当一种方法受阻时，可能另一种方法较合适，这就需要解题者精心合理地组织，使各种方法发挥其应有的作用。每个数学问题的求解过程是表现解题者组织能力的一大标志。

4．优化功能：同一个数学问题，答案虽然只有一个，但其处

理的策略却不尽相同。优美的解法令人神往，常为解题者所悉心追求，这就有个优解的问题。成熟的解题者往往展现出标新立异、简洁明了的解法，这就是解题的优化功能之深刻体现。

5．发展功能：加里宁曾说过："数学是锻炼思维的体操"。解题也是培养良好科学思维素质的有效手段之一。因为解题是一项智力活动，发展智力、培养能力，解题是主要途径之一。

解题的五大功能决定了解题的重要性，G．波利亚的断言"掌握数学就是意味着解题"，更是深刻地说明了这一点。

善于解题，就是善于根据数学问题拟定其解答计划并使计划得以顺利地实施。拟定计划在很大程度上来讲是制定解题的策略。下面就此作一阐述。

一、解数学题的几种思维策略

从思维的角度来看，解数学题的策略应当在辩证法的指导下进行研究，这里提供几条常用的思维策略。

1．欲擒故纵

为了解决问题的需要，有时往往需要退一下，退是为了更好的进，这就是所谓的欲擒故纵。

例1　在$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle A$，求证：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+b}{a+b+c}$.

分析　此题的已知条件似乎用不上，或者说，看不出与结论的关系。不妨从结论退退看：

$$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a+b+c}\Longleftrightarrow\frac{-a}{-b}$$

$$=\frac{a+b}{a+b+c}\Longleftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{a+c}.$$

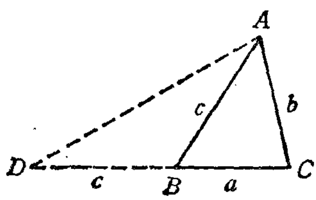


图 0—1

这就告诉我们，只要证a、b、b、$(a+c)$分别是以b为公共边的

一对相似三角形的对应边就可以了。由此作图0—1即可。

例2 求证：正 n 面体 ($n=4,8,12,20$) 内任一点到各个面的距离之和是一定值。

分析 这是一道抽象程度较高的题目，先将其退到平面的情况就是

基本题1：正 n 边形内任一点到各边的距离之和是一定值。

由于这里的“正 n 边形”还是比较抽象，再将它退到最简单的正多边形——正三角形。就是下面的

基本题2：正三角形内任一点到三边的距离之和是一定值。

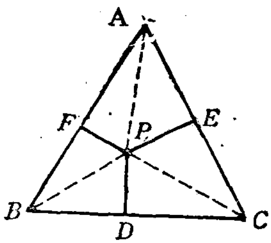


图 0—2

这是众所周知的一道题目。

证明 如图0—2，设 P 为正 $\triangle ABC$ 内任一点，P 到三边的距离为 PD、PE、PF．正 $\triangle ABC$ 的面积为 S，边長为 a，连接 PA、PB、PC．

$\therefore S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}=S$，

$$\therefore \frac{1}{2}PD\cdot a+\frac{1}{2}PE\cdot a+\frac{1}{2}PF\cdot a=S.$$

故 $PD+PE+PF=\dfrac{2S}{a}$ 为定值。

仿照“基本题2”的证明，可得“基本题1”的证明(略)。

把“基本题1”的证明过程“移”过来，即可得到原题的证明。

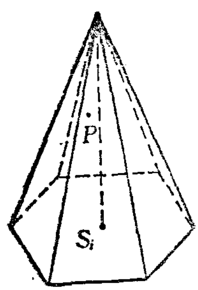


图 0—3

证明 如图0—3，设 P 为凸正 n 面体内任一点，正 n 面体的体积为 V．将 P 和正 n 面体各顶点相连接，则此 n 面体可分成以 P 为公共顶点，正 n 面体的各个面为

底面的 n 个棱锥。设这 n 个棱锥的体积分别为$V_1, V_2, \cdots, V_n$. 各面的面积为 S:

$$\because \quad V_1+V_2+\cdots+V_n=V,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3}Sh_1+\frac{1}{3}Sh_2+\cdots+\frac{1}{3}Sh_n=V.$$

故
$$h_1+h_2+\cdots+h_n=\frac{3V}{S}\text{为定值。}$$

例 2 的解法体现出:"表面上是退实际上是准备进"的思想,这一思想在中学数学中的渗透为消元法、数学归纳法等。

2. 抛砖引玉

为了解题的需要,用一些特殊的数、式、图形进行试探,从中获得解题的思路。这就是所谓的抛砖引玉。

例3 设 P 为定角$\angle AOB$平分线上的一定点,以OP为弦任作一圆交OA、OB于C、D. 求证:$OC+OD$为定值。

分析　问题的难点在于定值的具体内容,题中未作明确的交待。所以弄清定值数量指标是第一步要做的工作。为此,考察命题的特殊情形。由于弦的特殊位置是直径,从而作以 OP 为直径的圆,在OA、OB上截得线段OE、OF,注意到立于直径上的圆周角是直角,则$PE\perp OA$, $PF\perp OB$.

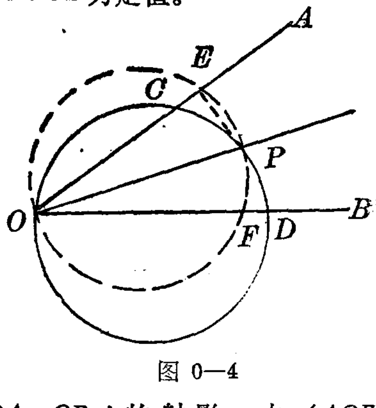


图 0—4

由此可知,OE、OF分别是OP在OA、OB上的射影,由$\angle AOP=\angle BOP=\frac{1}{2}\angle AOB$,及$\angle AOB$是定角、$P$是定点知,$OE$、$OF$是定长。于是命题如果成立,题中的定值就是$OP$在$OA$、$OB$上的射影之和(如图0—4)。至此,解题思路也就明朗化了。

证明 略。

例4 已知$x_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，且$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，求证：$1\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqslant\sqrt{n}$.

分析 先从特殊情形入手，探求证明方法。

若$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$，且$x_1+x_2=1$，能否得出$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leqslant\sqrt{2}$呢？

由 $2\sqrt{x_1 x_2}\leqslant x_1+x_2=1 \Longrightarrow 0\leqslant 2\sqrt{x_1 x_2}\leqslant 1$，

故 $1\leqslant x_1+x_2+2\sqrt{x_1 x_2}\leqslant 2 \Longrightarrow 1\leqslant (\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2\leqslant 2$

$$\Longrightarrow 1\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leqslant\sqrt{2}.$$

由此得到启迪，只要将证明特殊情形时所用的二项式平方公式改为多项式平方公式，一般性问题即可解决。

证明 $\because\quad 0\leqslant 2\sqrt{x_i x_j}\leqslant x_i+x_j\ (i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$，

$$\therefore\quad 0\leqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sqrt{x_i x_j}\leqslant(n-1)\sum_{k=1}^{n}x_k=n-1.$$

故 $$1\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\sqrt{x_i x_j}\leqslant n,$$

即 $$1\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\right)^2\leqslant n,$$

亦即 $$1\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\leqslant\sqrt{n}.$$

上述方法体现了矛盾的普遍性寓于矛盾的特殊性之中，通过某种共性的挖掘，可以找到具有一般性的结论。在中学数学解题中，得助于这一思想方法的例子颇多，不再赘述。

3．反客为主

在解题中，有时常常出现从主元素直接入手比较困难，而将副元素与主元素位置颠倒，反客为主，反而相当奏效。

例5 解方程 $x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$（这里 a 是给定的常数）。

分析 这是一个高次方程，且系数中含有参数a，直接入手颇为棘手，为此需要另辟蹊径。从方程的结构来看，整个方程只

涉及 x 和 a 两个参数，x 是 4 次，a 是 2 次。显然，对方程来说，次数越低越容易解。因此考虑是否能以 a 作为主元素，反客为主。

解 方程 $x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$ 变形为 $a^2-2(x^2-5x-1)a+(x^4-10x^3+22x^2+12x)=0$.

视此方程是关于 a 的二次方程，则易解出。

$a=x^2-6x$ 和 $a=x^2-4x-2$.

由此即得原方程的解为 $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+a}$，$x_{3,4}=2\pm\sqrt{6+a}$.

例6 图0—5中有 24 个格子，问能否在这24个格子中放18个牛奶瓶，每格只放一个瓶子，使每行每列均是偶数瓶。

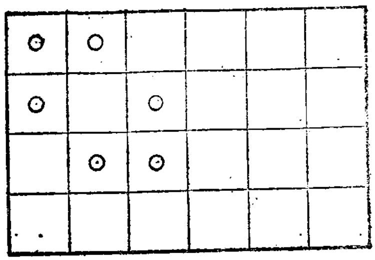


图 0—5

分析 把18个奶瓶放入24个格子中，有 6 个格子空着。使之满足条件，确实比较困难。现把问题倒过来，先考虑6个空格(把空格作为主元)，即从24个格子中找出 6 个格子，使每行每列均是偶数。这样问题就简单多了。如图0—5中用○表示空格的话，就是满足要求的一种方法

这一思想方法的实质是从反面或侧面入手，绕道迂回，最终达到解决问题的目的。中学数学中的反证法堪称这一思想渗透的典范。

4. 声东击西

当一个问题直接处理不易时，可以先去解决另外的问题，其目的在于解决原问题。

例7 求函数 $y=\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$ 的值域。

分析 本题直接求值域很困难，而如果求得函数的反函数，那么，反函数的定义域就是原函数的值域，问题即可解。

解 由$y=\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$解得$x=\dfrac{3y\pm\sqrt{y^2+8y}}{4y}$,

即原函数$y=\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$的反函数是$y=\dfrac{3x\pm\sqrt{x^2+8x}}{4x}$,

它的定义域 $$\begin{cases}x^2+8x\geqslant 0,\\ x\neq 0.\end{cases}$$

即 $$-\infty<x\leqslant -8 \text{ 及 } 0<x<+\infty;$$

从而，函数$y=\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$的值域为

$$-\infty<y\leqslant -8 \quad \text{及} \quad 0<y<+\infty.$$

例8 试求常数m的范围，使曲线$y=x^2$的所有弦都不能被直线$y=m(x-3)$垂直平分。

分析 直接解得本例不易，而“不能”垂直平分的弦的反面是“能”垂直平分的弦，就是曲线$y=x^2$上两点关于直线$y=m(x-3)$对称，求m存在的范围。

解 抛物线上两点(x_1,x_1^2)、(x_2,x_2^2)关于直线$y=m(x-3)$对称，满足

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}=m\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}-3\right),\\ \dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=\dfrac{-1}{m}.\end{cases}$$

于是 $$\begin{cases}x_1^2+x_2^2=m(x_1+x_2-6),\\ x_1+x_2=-\dfrac{1}{m}.\end{cases}$$

消去x_2得 $$2x_1^2+\frac{2}{m}x_1+\frac{1}{m_2}+6m+1=0.$$

$\because$ x_1是实数,

$$\therefore\quad \Delta=4\left(-12m^3-2m^2-\frac{1}{m^2}\right)>0,$$

即
$$(2m+1)(6m^2-2m+1)<0.$$

$$\therefore m<-\frac{1}{2}.$$

于是，当 $m<-\frac{1}{2}$ 时，抛物线上存在两点关于直线 $y=m(x-3)$ 对称。但原题要求所有弦都不能被直线垂直平分，则

$$m\geqslant-\frac{1}{2}.$$

声东击西思想在处理问题时常被采用。像数形结合、几何变换、化归等具体方法都渗透着这种重要的思想。

5．无中生有

为了解决问题，有时往往可以造出与原问题有关的模型，通过模型来解决问题。

例9 若锐角 α、β、γ 满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，则

$$\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{tg}\gamma\geqslant 2\sqrt{2}.$$

分析　直接证明结论显然十分困难。考虑到空间向量的方向余弦的平方和为1，可通过构造一长方体证明(图0—6)．

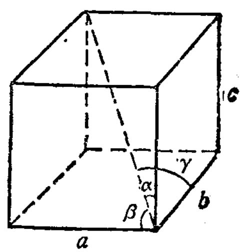


图 0—6

证明　$\because\ \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\geqslant\dfrac{\sqrt{2ab}}{c},$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}\geqslant\frac{\sqrt{2bc}}{a},$$

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}\geqslant\frac{\sqrt{2ca}}{b},$$

$$\therefore\ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\geqslant\frac{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{2bc}\cdot\sqrt{2ca}}{abc}=2\sqrt{2}.$$

例10 求证：$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

分析 这是一道国际竞赛题，注意到

$$\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)=\frac{3\pi}{7},$$

$$\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{2\pi}{7},$$

启发我们去构造两个等腰三角形（图0—7）.

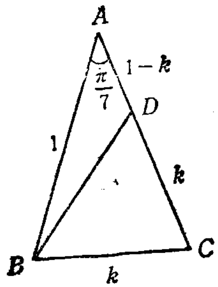


图 0—7

证明 构作两个如图0—7的等腰三角形，使$AB=AC=1$，$\angle A=\frac{\pi}{7}$，$CD=BC=k$.

在$\triangle ABC$及$\triangle BCD$中，根据余弦定理有

$$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{7}=\frac{2-k^2}{2}, & (1)\\ \cos\frac{3\pi}{7}=\frac{k}{2}, & (2)\end{cases}$$

以及

$$\begin{cases}\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{1-k}{2k}, & (3)\\ \cos\frac{3\pi}{7}=\frac{k^2+2k-1}{2k}. & (4)\end{cases}$$

由(2)、(4)易得 $k^3-k^2-2k+1=0$，于是

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{2-k^2}{2}-\frac{1-k}{2k}+\frac{k}{2}$$

$$=\frac{3k-k^3+k^2-1}{2k}$$

$$=\frac{k-(k^3-k^2-2k+1)}{2k}$$