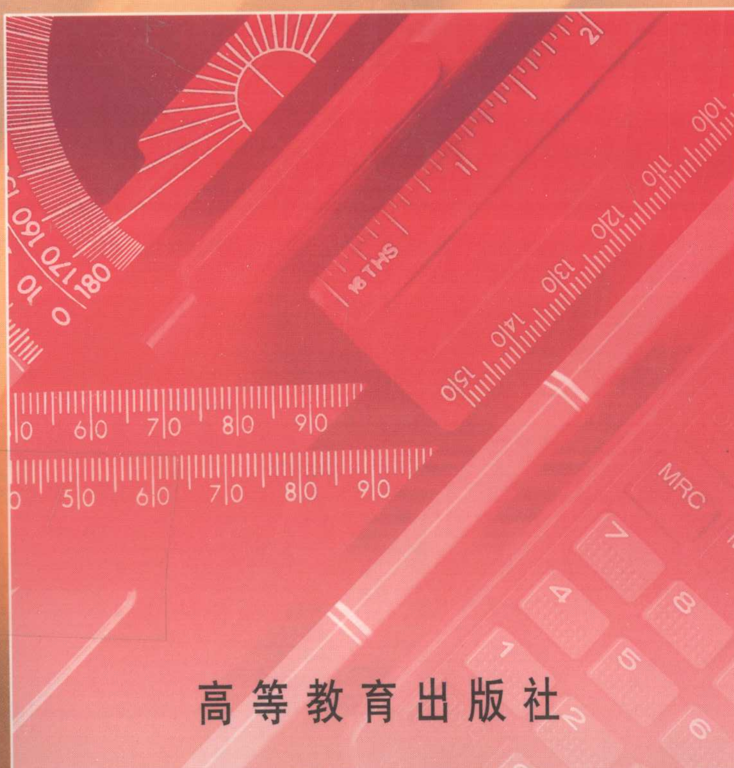
全国成人高等教育规划教材

高等数学

（大专使用）

下册

教育部高等教育司 组编



高等教育出版社

013
68

全国成人高等教育规划教材

大专使用

高等数学

下册

教育部高等教育司 组编

主编 李心灿

副主编 徐 兵 蔡燧林

编委(以姓氏笔画为序)

计慕然 刘浩荣 刘 晓

吴 满 杨万禄 张魁元

金桂堂 龚冬保 谢 鹏

高等教育出版社

内容提要

本书按照教育部1998年颁布的全国成人高等教育“工学专科高等数学课程教学基本要求”编写.分上、下两册出版.上册分6章,内容包括函数,极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用.下册分5章,内容包括向量代数、空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程初步.节末有习题,章末有复习题.其特点是:内容符合基本要求;例题、习题丰富,与正文密切配合;结合成人特点,注意培养应用意识,概念清晰,注意几何直观与物理解说;文字流畅,便于自学.

与此教材配套的,还有一本《高等数学学习辅导书》.

目　　录

第七章　空间解析几何与向量代数

解析几何是用代数方法研究几何图形的学科.若仅限于研究平面上的几何图形,则称为平面解析几何;若仅限于研究三维空间的几何图形,则称为空间解析几何.

解析几何的实质是建立点与实数对间的关系,把代数方程与曲线、曲面对应起来,从而能用代数方法研究几何图形.

借助于解析几何,几何概念可以用代数表示,几何目标可以通过代数达到.反过来,借助于解析几何能给代数语言以几何解释,使人们能直观地掌握代数语言的意义,并启发人们提出新的结论.这两方面构成了解析几何的基本问题.也可以更明确地说,解析几何的基本问题为:

(1) 已知点的几何轨迹,如何建立它的代数方程?

(2) 已给代数方程,如何确定它的几何轨迹?

§7.1　空间直角坐标系

由平面解析几何学可知,笛卡儿试图建立起一种通用的数学,使算术、代数和几何统一起来.他给出平面上点与实数对(x,y)间的关系,进而将方程与曲线对应起来,将"形"与"数"统一起来.这种能用代数方法研究几何图形的理论是以坐标法为基础的.同样,空间的"形"与"数"联系的媒介是空间直角坐标系.

一、空间直角坐标系

下面先来介绍空间直角坐标系.

所谓空间直角坐标系是指：给定一点 O，过该点引出过这点三条互相垂直的数轴 Ox，Oy，Oz（它们通常具有相同的长度单位）. 常称 O 为坐标原点；分别称 Ox，Oy，Oz 三个轴为 x 轴（或横轴），y 轴（或纵轴），z 轴（或竖轴）. 常记这个坐标系为 $Oxyz$.

如果将一只手的大拇指、食指、中指表为两两垂直的形态，令它们依次表示 Ox，Oy，Oz 轴. 若用的是右手，则称所表示的这个坐标系 $Oxyz$ 为右手系，否则称为左手系. 今后若不加声明，所给坐标系皆为右手坐标系. 通常右手坐标系如图 7.1 所示.

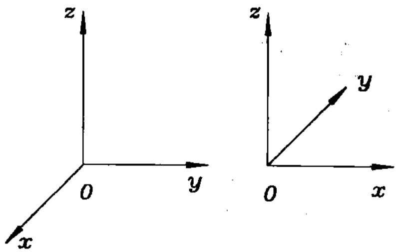


图 7.1

三个坐标轴 Ox，Oy，Oz 两两决定三个互相垂直平面，统称之为坐标平面，由 Ox，Oy 轴组成的坐标平面记为 Oxy. 由 Ox，Oz 轴组成的坐标平面记为 Ozx. 由 Oy，Oz 轴组成的平面记为 Oyz.

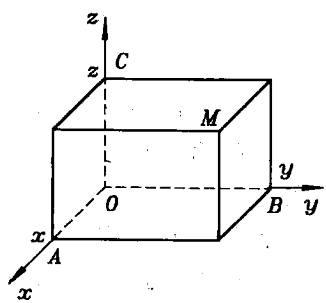


图 7.2

设 M 为空间一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，并与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 A，B，C. 设 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，则点 M 唯一决定了一组有序的三个数 x，y，z. 反过来，在三个坐标轴上依次给定三个点 A，B，C，且 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，分别过点 A，B，C 作三个平面依次垂直

于 Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴，则这三个平面相交于一点，即一组有序的三个数 x, y, z 唯一决定了空间一点.于是空间的点 M 与一组有序的三个数 x, y, z 建立了一一对应关系.常称这组数 x, y, z 为点 M 的坐标，并称 x 为 M 的横坐标，y 为 M 的纵坐标，z 为 M 的竖坐标，常记为 $M(x, y, z)$.如图 7.2 所示.

三个坐标平面将空间分为八个部分，称其每个部分为卦限，这八个卦限用下述方法规定其顺序，如图 7.3 所示：

第一卦限　$x>0, y>0, z>0$;

第二卦限　$x<0, y>0, z>0$;

第三卦限　$x<0, y<0, z>0$;

第四卦限　$x>0, y<0, z>0$;

第五卦限　$x>0, y>0, z<0$;

第六卦限　$x<0, y>0, z<0$;

第七卦限　$x<0, y<0, z<0$;

第八卦限　$x>0, y<0, z<0$.

有必要指出，位于坐标平面或坐标轴上的点，我们约定它不属于任何卦限.这些点的坐标有以下特性：

原点的三个坐标都是 0，即坐标为 $(0,0,0)$.

在 x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$.

在 y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$.

在 z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$.

在 Oxy 平面上的点的坐标为 $(x, y, 0)$.

在 Oyz 平面上的点的坐标为 $(0, y, z)$.

在 Ozx 平面上的点的坐标为 $(x, 0, z)$.

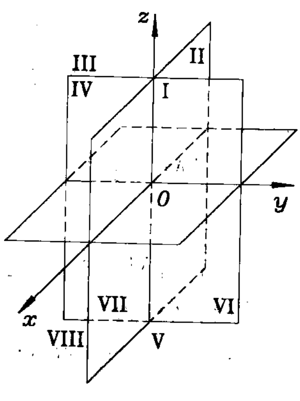


图 7.3

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2,$

z_2)为空间两点.过点 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体,如图 7.4 所示.由勾股定理可得

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2.\end{aligned}$$

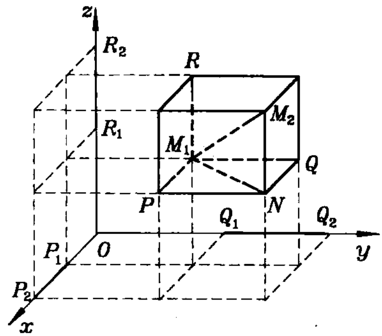


图 7.4

注意到

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$
$$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$
$$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

可知

$$|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

因而

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1)$$

上式(1)又称为 M_1, M_2 两点间的距离公式.

例 1 已知两点 $M_1(-1,0,2), M_2(0,3,-1)$,求此两点间的距离.

解 由空间两点间的距离公式(1),有

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{[0-(-1)]^2+(3-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{19}.$$

例 2 在 y 轴上求一点 M，使其到两点 $M_1(2,0,-1)$ 与 $M_2(1,-1,3)$ 的距离相等.

解 由于点 M 在 y 轴上，可设其坐标为 $(0,y,0)$，由题意有

$$|MM_1|=|MM_2|,$$

即 $$\sqrt{(0-2)^2+(y-0)^2+(0+1)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(y+1)^2+(0-3)^2}.$$

解此方程得 $y=-3$. 因此所求点为 $M(0,-3,0)$.

例 3 试判定以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形 ABC 的几何特性.

解 由空间两点间距离公式(1)有

$$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49,$$
$$|AC|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49,$$
$$|BC|^2=(2-10)^2+[4-(-1)]^2+(3-6)^2=98.$$

由于 $|AB|^2=|AC|^2$，可知 $AB=AC$，因而 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 又由于 $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$，可知 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

故知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

习题 7.1

1. 指出下列各点在空间中的哪一个卦限？

(1) $(-1,3,2)$；(2) $(3,3,-1)$；(3) $(-5,-2,-2)$；(4) $(-5,1,-1)$.

2. 若空间点 $M(x,y,z)$ 的坐标满足条件：$xyz<0$，问 M 点可能在空间中的哪几个卦限？

3. 求点 $M(a,b,c)$ 分别关于(1) Ozx 面，(2) x 轴，(3) 原点对称点的坐标.

4. 设 $A(-3,x,2)$ 与 $B(1,-2,4)$ 两点间的距离为 $\sqrt{29}$，试求 x.

5. 证明：$A(-3,2,-7)$，$B(2,2,-3)$，$C(-3,6,-2)$ 是一个等腰三角形的三个顶点.

6. 证明：$A(1,2,3)$，$B(3,1,5)$，$C(2,4,3)$是一个直角三角形的三个顶点.

§7.2 向量的概念与线性运算

一、向量的概念

向量是用代数方法研究几何图形的基本工具.在力学、物理学等问题中所遇到的量，可以分为两大类：其中一类在取定一个单位以后完全可以用数值来决定，比如质量、温度、时间、面积、体积等，常称这种量为数量.另一类量不仅有大小，而且有方向，比如力、速度、加速度等等，常称这类量为**向量**.

可以把向量用具有一定长度和方向的线段来表示.这种有确定长度和确定方向的线段常称为有向线段.称这个确定的长度为向量的大小，向量的大又称为向量的模；称这个确定的方向为向量的方向.

模为1的向量称为**单位向量**.

特别定义模为零的向量为**零向量**，记为$\mathbf{0}$.零向量的方向可以看作是任意的.

若A为向量的始点，B为终点，常记为$\overrightarrow{AB}$.通常也用小写黑体字$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$等表示向量.

若向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的模相等，且它们的方向也相同，则称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相等，记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

与向量$\boldsymbol{a}$的模相等，而方向相反的向量，称为$\boldsymbol{a}$的**负向量**，记为$-\boldsymbol{a}$.

由向量相等的定义可以看出，它有两个要素：两个向量的模相等，方向相同(与向量的始点与终点无关!).通常称与始点与终点无关的向量为**自由向量**.下面所研究的向量除特殊声明外，概指自由向量.

仿照力、加速度的合成法则，可以定义向量的线性运算.

二、向量的加法

由物理学可以知道:如果有两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 作用在某物的同一点上.则合力 $\boldsymbol{F}$ 的方向是如图 7.5 所示的以 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 为邻边的平行四边形的,对角线的方向.$\boldsymbol{F}$ 的大小为该对角线之长.

仿此可以定义向量的加法.设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为不位于同一条直线上的两个向量.将它们的始点移到同一点 O,并记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$.以$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形$OACB$,如图 7.6(a)所示.则称$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量.记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

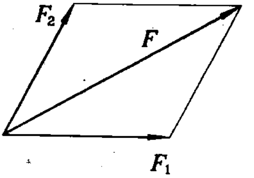


图 7.5

上述用平行四边形对角线确定两个向量和的方法,常称为向量加法的平行四边形法则.

注意图 7.6(a)中$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,可以简化向量的求和:自 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A,作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,连接 OC,则向量$\overrightarrow{OC}$即为$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量.如图 7.6 (b)所示.这种求和常称为向量加法的三角形法则.

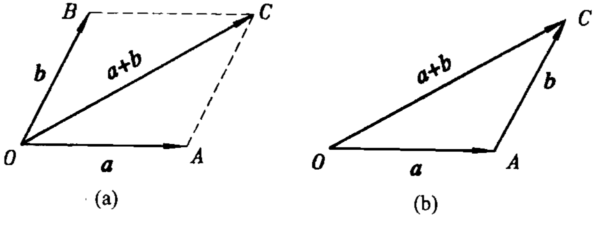


图 7.6

向量加法的三角形法则可以推广到任意有限多个向量之和的问题中去.若给定了向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}$,则从任一点 O 引出向量 $\boldsymbol{a}$,然后从 $\boldsymbol{a}$ 的终点引出$\boldsymbol{b}$,…,从 $\boldsymbol{d}$ 的终点引出$\boldsymbol{e}$.则以点 O 为始点,以上述向量折线中 $\boldsymbol{e}$ 的终点为终点的向量记为$\boldsymbol{s}$,则 $\boldsymbol{s}$ 为上述向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}$ 之和,记为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e},$$

如图 7.7 所示.

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反时,可称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行. 此时 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之和可依三角形法则确定. 即当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时,定义其和向量与这两个向量方向相同,其模为这两个向量模的和. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时,定义其和向量的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中模较大向量的方向相同,而和向量的模等于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中较大的模与较小的模之差.

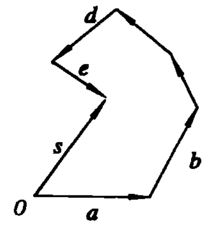


图 7.7

三、向量的减法

定义 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 利用上面求向量和的平行四边形法则可以求出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 如图 7.8 所示. 作出 $\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形 $OAC'B'$,其对角线 $\overrightarrow{OC'}$ 即为所求,注意 $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{BA}$,为简化运算,可以定义为:

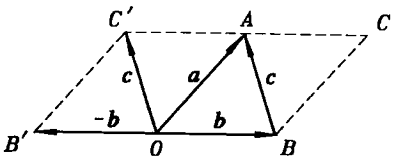


图 7.8

将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的始点移到点 O,记 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 则由 $\overrightarrow{OB}$ 的终点 B 到 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 的向量 $\overrightarrow{BA}$ 即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,称之为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差.

上述简化运算求向量之差的方法常称为向量减法的三角形法则.

四、向量与数的乘法

若给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和数量 λ,则定义 $\lambda\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{a}\lambda$)为向量与数的乘积,它表示一个向量:

(1) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模等于 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍($|\lambda|$ 为 λ 的绝对值);常记

$|\boldsymbol{a}|$为 $\boldsymbol{a}$ 的模,因此有$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.注意$|\lambda|$表示数 λ 的绝对值,$|\boldsymbol{a}|$表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的模.

(2) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同.

当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.

特别,当 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$时,则 $\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.常记为 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

可以验证

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$
$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a},$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

习题 7.2

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{a}$.求 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$.

2. 设 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 是一个正六边形,并设 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{A_1A_2},\boldsymbol{v}=\overrightarrow{A_1A_6}$,试用 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 表出$\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_2A_3},\overrightarrow{A_3A_4},\cdots,\overrightarrow{A_6A_1}$.

3. 根据向量加法的平行四边形法则说明$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,并指出等号何时成立.

4. 设 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c},\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

5. 已知$\triangle ABC$ 两边的向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$,D 是 BC 边上的中点,试用$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$表示中线向量$\overrightarrow{AD}$.

§7.3 向量的代数表示

一、向量的坐标表示式

为了能将向量作为研究几何图形的工具,需要将向量运算用代数表示.因此先建立空间直角坐标系,若将向量的始点移到坐标原点 O,则这个向量完全由其终点所确定.反过来,任给空间一点

M，总可以唯一确定一个向量$\overrightarrow{OM}$，因此可以说，空间的点与始点在原点的向量有一一对应关系，通常向量$\overrightarrow{OM}$可称为点M对点O的向径，设点M的坐标为(x,y,z)，即

$$OA=x,\ OB=y,\ OC=z,$$

如图 7.9 所示.

由向量的加法法则可知

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

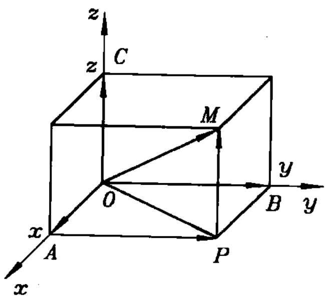


图 7.9

如果在x轴、y轴、z轴上分别取三个以坐标轴正向为其方向的单位向量，并依次记为$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称其为基本单位向量.由向量的数与向量乘法运算可知

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}.$$

称它们为向量$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的分向量.可以记为

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

常称(2)式为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式或向量在坐标轴上的分解.为了方便，也常记为

$$\overrightarrow{OM}=(x,y,z). \tag{3}$$

二、向量在轴上的投影

若给定一轴u及轴外一点A.过点A引出与轴u垂直的平面π，设轴u与平面π的交点为A'，如图 7.10 所示.则称A'为点A在轴u上的投影.

若给定向量$\overrightarrow{AB}$及轴u，设A';B'分别为点A,B在轴u上的投影，则称$A'B'$为向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影，如图 7.11 所示，常记作

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'.$$

若轴u_1与u_2相交于点O，将其中任一轴绕点O在两轴所决定的平面上旋转，使其正向与另一轴正向重合所确定的角度，定义为这两轴的夹角.由于旋转方向有逆时针与顺时针两种可能，因

此夹角可有两个.通常规定二轴间夹角限定在 0 与 π 之间,且不分轴的顺序.

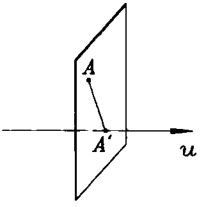


图 7.10

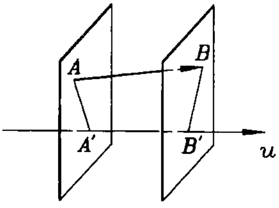


图 7.11

若轴 u_1 与 u_2 不相交,可在空间任取一点 O,自点 O 引出分别与轴 u_1,u_2 有相同方向的轴 u_1' 与 u_2'.定义 u_1' 与 u_2' 之间的夹角为 u_1 与 u_2 的夹角.

若给定空间轴 u 与向量 $\boldsymbol{a}$,则任意引出一轴 u',使其方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,则定义轴 u 与 u' 间的夹角为向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 u 间的夹角.

相仿,给定两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$.任意引出两轴 u_1,u_2,使它们的方向分别与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的方向相同,则定义 u_1 与 u_2 间的夹角即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角.常记为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

向量在轴上的投影有以下性质:

性质 1 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$

其中 φ 为轴 u 与$\overrightarrow{AB}$间的夹角.

性质 2 有限个向量的和在任何给定轴上的投影等于各向量在该轴上投影之和.即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{e})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{e}.$$

三、向量线性运算的代数表示

由上述两段可知,若向量$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$,则可知向量$\overrightarrow{OM}$在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 x,y,z.因此又称向量$\overrightarrow{OM}$在三条坐标轴上的投影 x,y,z 为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标.

利用向量的坐标及投影的性质,可以将向量的线性运算代数化.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,即

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-z_2)\boldsymbol{k}, \tag{5}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}. \tag{6}$$

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$,$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

解 由于 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,可知

$$2\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},3\boldsymbol{b}=9\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}&=(2+9)\boldsymbol{i}+(-2+3)\boldsymbol{j}+(4-3)\boldsymbol{k}\\&=11\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\\2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}&=(2-9)\boldsymbol{i}+(-2-3)\boldsymbol{j}+(4-(-3))\boldsymbol{k}\\&=-7\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

四、向量的模与方向余弦的代数表示

由§7.1可知若点 M 的坐标为 (x,y,z),则 $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,因而可知

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

即向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模等于其坐标平方和的算术平方根.

描述向量的方向,常用该向量与各坐标轴之间的夹角的余弦来表示.设向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向间夹角分别为 α,β,γ.则由几何知识可知(如图 7.9 所示)

$$OA=|OM|\cos\alpha,OB=|OM|\cos\beta$$

$$OC=|OM|\cos\gamma$$

即 $$\cos\alpha=\frac{OA}{|OM|},\ \cos\beta=\frac{OB}{|OM|},\ \cos\gamma=\frac{OC}{|OM|}.$$