经济数学基础

Fundamentals of Econometamathematics

任宝玲 主编

黑龙江人民出版社

经济数学基础

主　编　任宝玲

副主编　林琳　潘森　孙丽荣　于淑芳

黑龙江人民出版社

内 容 简 介

本书是高职院校经济管理类各专业经济数学基础教材。本书针对高职高专学生的特点和以应用能力培养为主的人才培养要求，以“必需、够用”为原则安排教学内容；以实用性和针对性为出发点，立足于解决经济实际问题为目的；以培养高素质的实用性人才为目标，发挥数学的教育功能，进行有关的数学素质教育，培养学生良好的数学素养。为学生今后的工作与学习奠定必要的数学基础。全书共7章，主要内容有：一元微积分、线性代数初步、概率论初步、数学软件 Mathematica 的简单应用。每节后配有习题，每章后配有综合总复习题。

本书重能力素质培养，突出实际应用，适合作为高职高专以及成人高等教育经济管理类各专业学生学习经济数学的教材，也可以作为经济管理类各个专业学生和数学爱好者的参考书和课外读物。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/任宝玲主编. 一哈尔滨：
黑龙江人民出版社，2009.5
ISBN 978-7-207-08205-3

Ⅰ.经… Ⅱ.任… Ⅲ.经济数学—高等学校—教材
Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第068219号

责任编辑： 王裕江
装帧设计： 郑 中

经济数学基础

Jingji Shuxue Jichu

主编 任宝玲

出版发行	黑龙江人民出版社
通讯地址	哈尔滨市南岗区宣庆小区1号楼
邮　　编	150008
网　　址	www.longpress.com E-mail hljrmcbs@yeah.net
印　　刷	东北林业大学印刷厂
开　　本	787×1092 毫米 1/16
印　　张	18
字　　数	420 000
版　　次	2009年5月第1版 2009年5月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-207-08205-3/O·25
定　　价	35.00元

(如发现本书有印刷质量问题，印刷厂负责调换)

本社常年法律顾问：北京市大成律师事务所哈尔滨分所律师赵学利、赵景波

前　言

数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门学科。它作为一门培养学生严密的逻辑思维、严谨的科学态度、一丝不苟的工作精神、集理论、工具和能力于一体的基础学科，在科技、经济高速发展的今天，越来越受到高校各专业的重视。数学教育，不但为本专业的学习奠定数理基础，更重要的是使学生接受数学思想，学会数学思维，提高数学素质，增强分析问题和解决问题的能力，以适应科技进步、社会经济发展对人才素质能力的要求，同时，也为学生多元化的可持续发展的学习目标奠定良好基础。

"经济数学基础"是高职高专经济类和管理类各专业的核心课程之一。该课程不仅为后续课程提供必备的数学工具，而且是培养经济管理类人才数学素养和理性思维能力的最重要途径。教材又作为学校教学内容和教学方法的知识载体，在深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才中有着举足轻重的地位。本教材是作者经过二十多年教学实践和在吸收我国"十五"期间高职高专经济管理类高等数学教改成果，又详细研究了国内外一些有关资料的基础上编写而成的。在编写过程中，根据高职高专经济管理类专业的特点和课程基本要求，充分体现了高职高专基础课教学中"以应用为目的，以必需够用为度" 原则，以"强化概念、注重应用"为依据，既考虑了人才培养的应用性，又能使学生具有一定可持续发展性。在编写思想、体系安排、内容取舍、教学方法等方面我们特别注重以下几点：

1. 增加了有关数学素质教育的内容，并注重数学思想与数学方法的阐述，注意培养学生综合素质，使之更适合于新世纪的教学要求。

2. 在教材中标有" * "的内容，可根据具体教学情况酌情选用。恰当把握教学内容的深度和广度，不过分追求理论上的严密性，适度淡化理论证明或推导，强化几何说明，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性。注意了"够用为度"的原则。

3. 注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，加强学生对数学的应用意识学习兴趣培养。遵循了"应用为主"的原则。

4. 编入了数学软件 Mathematica 的相关应用，加强用计算机及数学软件培养学生求解数学模型的能力，对培养学生用计算机解决实际问题的兴趣、能力和调动学生学习的积极性起到重要作用，同时也为学生将来的研究工作和就业奠定基础。

5. 重视练习题的配备。本书每节后都精心配备了相应的练习题；每章后配备了复习题，集中展示了教学意图，方便教学效果的检查。

6. 增加了"数学家介绍"，供读者追慕、赞赏、学习和超越这些做出卓越贡献的科学家。

本书主编单位为黑龙江农垦管理干部学院。全书由任宝玲担任主编，林琳、潘森、孙丽荣、于淑芳担任副主编。第 2、3、5、6 章由任宝玲编写，第 1 章由任宝玲、于淑芳编写，附录由林琳编写，第 4 章由孙丽荣编写，第 7 章由潘森编写。全书由任宝玲统稿、定稿。

由于水平所限，本书一定有许多缺点，恳请读者和同行专家多提宝贵意见，以便进一步修改、完善。

编者

2009 年 1 月

目　　录

第1章　函数　极限　连续

学习目标

1. 理解常量、变量以及函数概念，了解初等函数和分段函数的概念. 熟练掌握求函数的定义域，函数值的方法，掌握将复合函数分解成较简单函数的方法.

2. 知道幂函数、指数函数、对数函数和三角函数的基本特征和简单性质. 会求需求函数、供给函数、成本函数、平均成本函数、收入函数、利润函数.

3. 知道极限概念，会求简单的极限.

4. 理解连续函数的定义.

函数是经济数学的基本概念之一，是微积分研究的对象. 极限是微积分中一个非常重要的基本概念，是建立和应用微积分学各种概念与计算方法的基础，近代微积分学中的许多重要概念都是用极限作为工具来定义的. 在经济学中，研究经济变量的变化趋势，预测经济变量的未来走向，都会用到极限. 掌握极限的概念和计算方法进一步研究函数的连续性是学好经济数学的基础.

1.1　函数

1.1.1　变量与常量

在任何一个生产过程中或科学实验过程中，主要涉及这样或那样的量，像体积、质量、温度、距离等，其中有些量在过程中是变化的，而另一些量在过程中保持不变. 例如，在火车运行过程中，火车离开车站的距离不断在变，而所载货物的质量保持不变. 我们把某一过程中变化的量称为**变量**，把在过程中始终保持不变的量称为**常量**.

一个量是常量还是变量，不是绝对的，要根据过程作具体分析. 如 2008 年第一季度的人民币存款利率，可以看作一个常量，而要考虑 1998 年到 2008 年之间的人民币存款利率，它就是一个变量.

在本书中，我们通常用字母 x,y,z 等表示变量，用字母 a,b,c 等表示常量.

初等数学，就其总体来说是“常量的数学”，从现在开始，我们进入变量的数学 —— 微积分.

1.1.2　函数的概念

在同一个实际问题中，变量往往不止一个，它们的变化也不是孤立的，而是存在着确定的

依赖关系. 例如某厂每日最多生产某产品 1000 件,固定成本为 150 元,单位变动成本为 8 元,则每日的产量 x 与每日的总成本 y 之间的依赖关系为

$$y = 150 + 8x, \quad x \in [0,1000].$$

定义 1.1 在某一变化过程中,有两个变量 x,y,x 的变化范围为 D. 如果对 D 中的每一个 x,按照某个对应法则 f,有唯一的实数 y 与之对应,则称 f 是 D 上的一个**函数**,记为 $y = f(x)$,$x \in D$. 其中 D 称为**定义域**.

若对于确定的 $x_0 \in D$,通过对应法则 f 在 x_0 处的函数值,记作

$$y_0 = f(x_0) \quad 或 \quad y|_{x=x_0} = f(x_0).$$

全体函数值的集合,称为函数的**值域**.

这里,函数的定义域和对应法则是函数的两个**基本要素**. 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则,那么这两个函数就是相同的.

函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量取值的集合,它一般是数轴上的一些点的集合(区间),这种定义域称为函数的自然定义域. 另外,在实际问题中,函数的定义域是由实际意义确定的.

研究函数,借助于图形的直观形象是很有益的. 那么什么是函数的图形,函数与它的图形的关系是什么?

给定函数 $y = f(x)$,动点 $(x,y) = (x,f(x))$ 在平面上的轨迹,一般说来是一条平面曲线,叫做**函数 $y = f(x)$ 的图形**(图 1 - 1).

函数与它的图形的关系是:图形上任一点 (x,y) 的纵坐标 y 正是横坐标 x 的对应的函数值:

$$y = f(x)$$

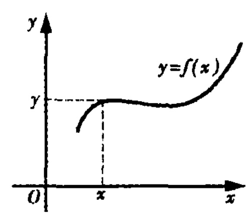

图 1 - 1

函数的图形一般是一条曲线或一些散点,它作为一个桥梁建立了分析对象与几何对象之间的密切联系. 这样可以使我们利用分析工具研究几何图形的性质;反过来又可以利用几何性质研究分析性质.

函数有下列三种表示法:

(1) **解析法**(又称公式法) 用数学式子来表示两个变量之间的对应关系.

对于表示函数的解析法,需要作以下几点说明:

① 有时一个函数不能由一个式子表示,而需要在定义域的不同部分用不同的式子来表示,这样的函数称为**分段函数**.

分段函数的定义域是由自变量所有区间段的并集构成. 例如,函数

$$y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 + x, & x > 1 \end{cases}$$

是一个分段函数,其定义域为 $D = [0, +\infty)$,

再如:符号函数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

也是一个分段函数,如图 1 - 2 所示.

② 如果因变量 y 可以表示成一个只包含自变量 x 的式子，那么我们将这样的函数称为**显函数**. 如果两个变量之间的对应关系可以由一个方程

$$F(x,y)=0$$

来确定，即当 x 的值给定后可以由此方程确定 y 的值，我们就说这个方程确定了一个函数 $y=f(x)$. 我们将这样由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=f(x)$ 称为**隐函数**. 如方程

$$x^2+y^2=a^2$$

就确定了变量 y 是变量 x 的隐函数.

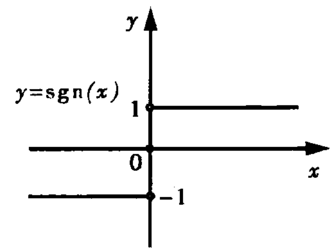

图 1－2

(2) **图示法**(又称图像法)　用平面直角坐标系中的曲线来表示两个变量之间的对应关系.

(3) **表格法**(又称列表法)　将自变量的一些值与相应的函数值列成表格表示变量之间的对应关系.

在函数的三种表示法当中，解析法是对函数的精确描述，它便于对函数进行理论分析和研究. 图示法是对函数的直观描述，通过图形可以清楚地看出函数的一些性质. 列表法常常是在实际应用问题中使用的描述方法，这是由于在许多实际问题当中，变量之间的对应关系常常难以由一个确定的解析式来表示.

例 1－1　判断下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同，为什么？

(1) $f(x)=x-1, g(x)=\sqrt{(x-1)^2}$;

(2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}, g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$.

解　(1) 由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，所以这两个函数定义域相同，但是在区间 $(-\infty,+1)$ 内，它们的对应法则不相同. 所以这两个函数不相同.

(2) 由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $[1,2)$，所以这两个函数定义域相同，并且在 $[1,2)$ 内，$\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}}$ 恒成立，从而对应法则也相同，所以这两个函数相同.

例 1－2　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$;

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\ln(2x+4)$.

解　(1) 因为 $x\neq 0$ 且 $x^2-4\geqslant 0$，解不等式得，$x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 2$，所以函数的定义域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

(2) 因为 $3-x>0$ 且 $2x+4>0$，解不等式得 $-2<x<3$，所以函数的定义域为 $(-2,3)$.

例 1－3　已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求 $f(2)$, $f(a)$, $f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$, $f(x+1)$.

解　$f(2)=\dfrac{1}{1+2^2}=\dfrac{1}{5}$, $f(a)=\dfrac{1}{1+a^2}$, $f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}$,

$$f(x+1)=\frac{1}{1+(x+1)^2}=\frac{1}{x^2+2x+2}.$$

1.1.3　函数的几种特性

1. 函数的单调性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对于 (a,b) 内任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加（或单调减少）（图 1－3、图 1－4）. 区间 (a,b) 称为函数的**单调区间**.

在定义 1.2 中，若将 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数在区间 (a,b) 内**单调不减**（或**不增**）. 在其定义域内单调增加或单调减少，以及单调不减或单调不增的函数，统称为**单调函数**.

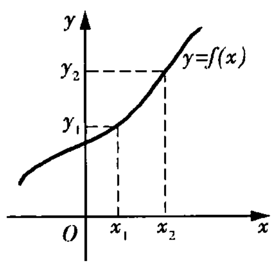

图 1－3

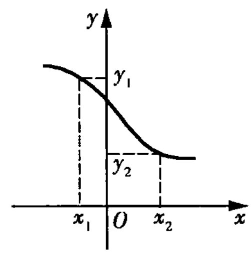

图 1－4

例 1－4　工业企业的经营需要计算成本. 用 $C(q)$ 表示成本函数，其中 q 是产品的数量，用整数表示. 但由于产品数量很大，经济学家把 $C(q)$ 的图像想像为连续曲线如图 1－5 所示. 成本函数 $C(q)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的函数.

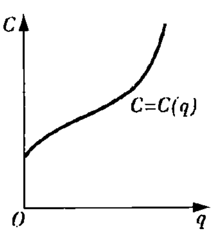

图 1－5

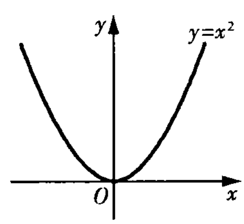

图 1－6

例 1－5　函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数（图 1－6），但是在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的函数，而在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的函数.

由此可见，函数的单调性与考虑的区间密切相关.

2. 函数的奇偶性

定义 1.3　若函数 $y=f(x)$ 对定义域 D 内任意的 x，满足 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是**偶函数**；若满足 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是**奇函数**.

例如 $y=x^2$ 就是一个偶函数，$y=x^3$ 就是一个奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称（见图 1－7），奇函数的图像关于原点 O 对称（见图 1－8）. 函

数的奇、偶性可用来作图,我们只需作出函数在 $x \geqslant 0$ 部分图形,$x \leqslant 0$ 的部分可用对称性作出.

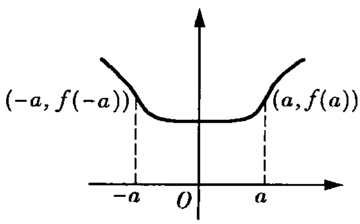

图1-7

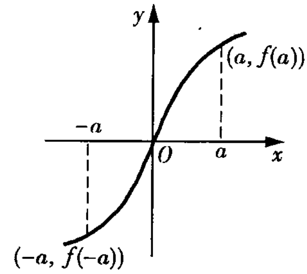

图1-8

由定义1.3可知,只有当函数 $y = f(x)$ 的定义域关于原点对称时,才有可能讨论它的奇偶性. 许多函数既不是奇函数,也不是偶函数,如 $y = x + x^2$;$y = x^{\frac{1}{2}}$.

3. 函数的周期性

定义1.4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,若存在实数 $T > 0$,使得对任意的 $x \in D$,有 $f(x + T) = f(x)$,则称 $y = f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $y = f(x)$ 的一个**周期**.

如果周期函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$,那么这种周期函数的几何特征是,当以周期 T 为长度作任何一列相连而不重叠的区间段时,函数图形在这些区间段上的形状都是相同的(如图1-9所示).

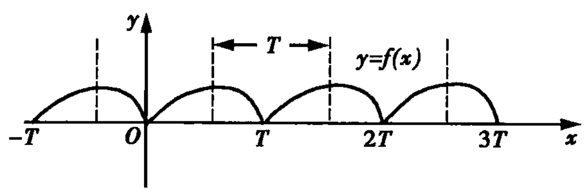

图1-9

由定义1.4还可以看出,若 T 是 $f(x)$ 的一个周期,则 $2T$,$3T$ 及 T 的任意正整数倍也是 $f(x)$ 的周期. 因此,今后在讨论周期函数的周期时只讨论它的最小正周期.

对于周期函数,我们只要知道它在一个周期上的性质,就可以知道整个函数的性质.

4. 函数的有界性

定义1.5 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 M,使得对任意的 $x \in D$,恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**,或称 $f(x)$ 为 D 上的**有界函数**.

例如,对任意实数 x,恒有 $|\sin x| \leqslant 1$,所以 $\sin x$ 为$(-\infty, +\infty)$内的有界函数.

有界函数 $y = f(x)$ 的图形必介于两条平行线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间,如图1-10所示.

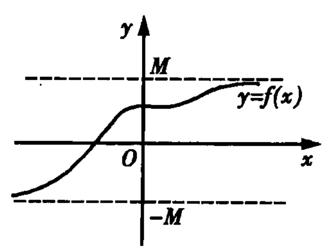

图1-10

1.1.4　反函数

定义 1.6　设函数 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个单调函数,并设它的值域是区间 $[c,d]$.

由单调性知,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

因此,对于区间 $[c,d]$ 上的每一个 y,恰有一个数 $x \in [a,b]$,使得 $f(x)=y$. 我们把这个 x 记为 $f^{-1}(y)$. 我们定义了一个函数 f^{-1},它以 $[c,d]$ 为定义域,以 $[a,b]$ 为值域:

(1) $f^{-1}(y)=x, y \in [c,d]$ 等价于

(2) $f(x)=y, x \in [a,b]$,见图 1-11

f 和 f^{-1} 的关系可用下述方式描述:在(1)中令 $y=f(x)$,可得

(3) $f^{-1}(f(x))=x, x \in [a,b]$;

在(2)中令 $x=f^{-1}(y)$,可得

(4) $f(f^{-1}(y))=y, y \in [c,d]$.

函数 f 和 f^{-1} 被称作互为**反函数**.

函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=f^{-1}(y)$.

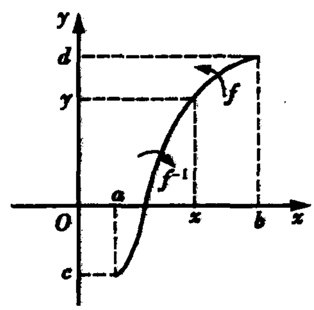

图 1-11

又,在习惯上常用字母 x 表示自变量,而用字母 y 表示因变量,这样 $y=f(x)$ 的反函数就写为

$$y=f^{-1}(x).$$

例 1-6　设函数为

$$y=ax+b,\ y=x^3,$$

则
$$x=\frac{y-b}{a},\ x=\sqrt[3]{y}.$$

改变自变量与因变量的记号,则反函数分别是

$$y=\frac{x-b}{a},\ y=\sqrt[3]{x}.$$

函数与反函数之间有密切的联系,知道了函数的性质就可引出反函数的性质,反之亦然.

设函数 $y=f(x)$ 有反函数,易见,若 (a,b) 是 f 的图形上的一点,则 (b,a) 就是 f^{-1} 的图形上的一点. 而点 (a,b) 与 (b,a) 关于直线 $y=x$ 对称. 由此我们得出:

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形与函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(见图 1-12).

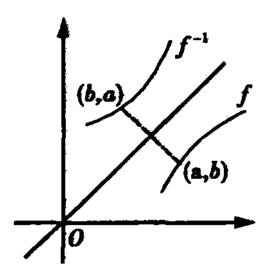

图 1-12

注:反函数的概念为我们提供了构造新函数的一个方法. 反三角函数就是借助反函数的概念从三角函数中构造出来的,而对数函数是指数函数的反函数.

1.1.5 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数叫做**基本初等函数**. 在函数的研究中,基本初等函数起着基础的作用. 下面一节所说的初等函数,就是由基本初等函数所构成的一类比较广泛的函数. 所以要研究初等函数,首先就要熟悉基本初等函数的图像和性质.

1 常数函数

$y = C$(C为常数),定义域为$(-\infty, +\infty)$,常数函数$y = C$的图形就是一条过点$(0,C)$且平行于x轴直线,如图1－13所示.

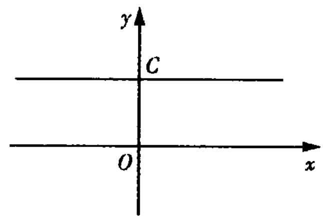

图1－13

2 幂函数

$y = x^{\alpha}$,幂函数的定义域随α的不同而不同. 当α为正整数时,定义域为$(-\infty, +\infty)$,当α为负整数时,定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,当$\alpha$为分数时,视$\alpha$的具体情况而定,几个常见幂函数的图形如图1－14和图1－15所示.

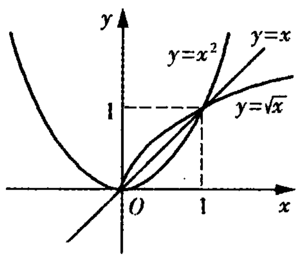

图1－14

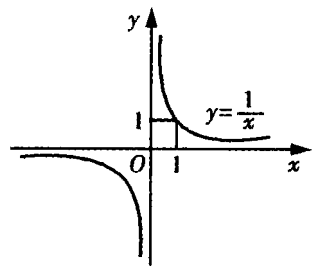

图1－15

3 指数函数

$y = a^x$,指数函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

当$a > 1$时,它单调增加;

当$0 < a < 1$时,它单调减少.

值域为$(0, +\infty)$,如图1－16所示.

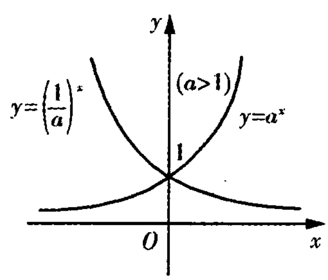

图1－16

函数$y = e^x$的底数$e = 2.71828\cdots\cdots$是我们将在极限中提到的一个重要极限值,它是一个无理数. 指数函数在实际问题中经常遇到.

4 对数函数

$y = \log_a x$,对数函数的定义域为$(0, +\infty)$.

当$a > 1$时,它单调增加;

当$0 < a < 1$时,它单调减少,值域为$(-\infty, +\infty)$,如图1－17所示.

以e为底的对数函数$y = \log_e^x$称为自然对数,简记为$y = \ln x$.

5 三角函数

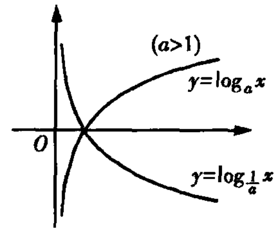

图1－17

正弦函数 $y=\sin x$ 如图1－18所示，余弦函数 $y=\cos x$ 如图1－19所示. 它们都是定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，最小正周期为 2π 的有界函数.

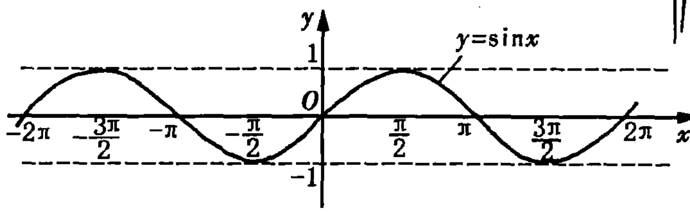

图1－18

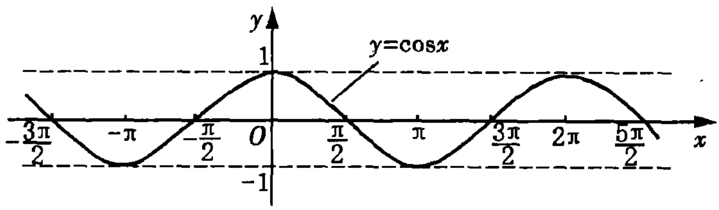

图1－19

正切数 $y=\tan x$ 如图1－20所示，定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,n\in Z\right\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$；余切函数 $y=\cot x$ 如图1－21所示，定义域为 $\{x\mid x\neq n\pi,n\in Z\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 它们都是以 π 为最小正周期的周期函数.

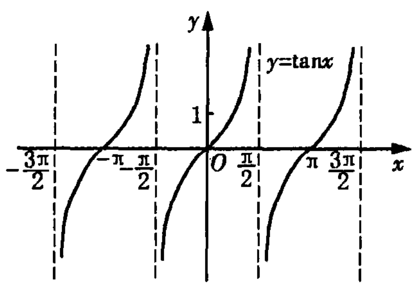

图1－20

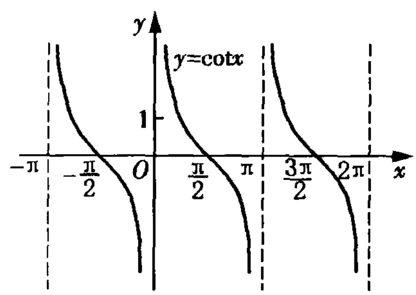

图1－21

6 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x, y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，定义域为 $[-1,1]$，如图1－22所示；

反余弦函数 $y=\arccos x, y\in[0,\pi]$，定义域为 $[-1,1]$，如图1－23所示；

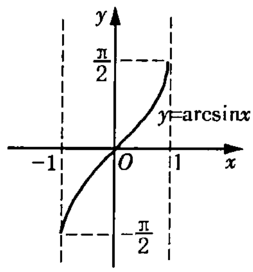

图 1－22

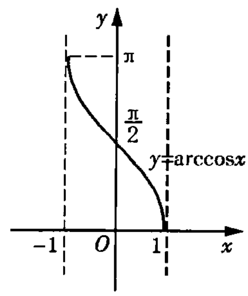

图 1－23

反正切函数 $y = \arctan x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,定义域为$(-\infty, +\infty)$,如图 1－24 所示;

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x, y \in (0, \pi)$,定义域为$(-\infty, +\infty)$,如图 1－25 所示.

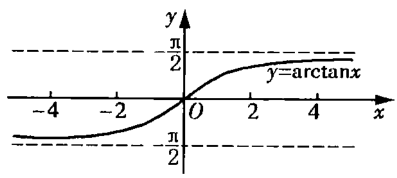

图 1－24

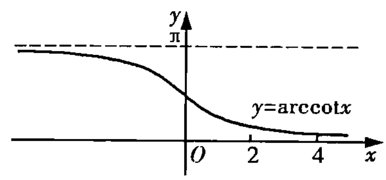

图 1－25

上述几种函数都称为基本初等函数. 在下一节中将讨论函数的复合运算及初等函数.

1.1.6 复合函数与初等函数

在现实经济活动中,我们会遇到这样的问题:一般来说,成本 C 可以看做是产量 Q 的函数 $C = f(Q)$,而产量 Q 又可以看做是时间 t 的函数 $Q = g(t)$,时间 t 通过产量 Q 间接影响成本 C,那成本 C 仍然看做是时间 t 的函数 $C = f(Q) = f[g(t)]$,C 与 t 的这种函数关系称作一种复合的函数关系.

定义 1.7 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u = g(x)$ 在 D_1 上有定义且 $g(D) \subset D_1$,则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D$$

称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的**复合函数**,其定义域为 D,变量 u 称为**中间变量**.

实际上,复合函数就是将一个函数 $u = \varphi(x)$ 带入另一个函数 $y = f(u)$ 的自变量位置得到的新的函数 $y = f[\varphi(x)]$. 复合函数的定义域就是 D 中那些使得 $y = f(\varphi(x))$ 有意义的 x 组成的集合.

并不是任意两个函数都能复合成一个复合函数.

例如,$y = \arcsin u, u = 2 + x^2$,前者的定义域为$[-1,1]$,而后者的值域为$[2, +\infty)$,因此对于所有实数 x,运算 $\arcsin(2 + x^2)$ 都没有意义,所以两者不能复合成复合函数.