数学基础知识丛书

一次方程与二次方程

王厚纯　张凤韬

江苏人民出版社

数学基础知识丛书

有理数与无理数
整　　式
一次方程与二次方程
分式与根式
不等式
一次函数与二次函数
指数与对数
排列与组合
数列与极限
复　　数
直线形
圆
直线与平面
面积与体积
轨　　迹
解三角形
三角函数
直线方程
圆锥曲线
极坐标与参数方程
线性方程组与矩阵
微积分初步
逻辑代数初步
数理统计初步

书号：13100·029
定价：0.42 元

一次方程与二次方程

王厚纯　张凤韬

江苏人民出版社

一次方程与二次方程
王厚纯 张凤韬

*

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
淮海印刷厂印刷

1979年7月第1版
1979年7月第1次印刷
印数：1—100000册

书号：13100·029 定价：0.42元

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》(试行草案)精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书分一元一次方程，二元一次方程组与三元一次方程组，一元二次方程，二元二次方程组四部分，系统介绍了这些方程与方程组的概念、解法与应用。

目　录

一、一元一次方程

方程是中学数学的重要内容之一，它在三大革命运动中有着广泛的应用，也是继续学习数学与其它学科的重要工具。在应用方程解决实际问题的过程中，将遇到各种不同类型的方程，本书主要是研究一次方程(组)与二次方程(组)。

先讨论一元一次方程。

§1 一元一次方程的有关概念

1. **一元一次方程** 先看一个实际问题：

某工厂需要把浓度为98%的浓硫酸300斤，稀释成浓度为10%的稀硫酸，应加水多少斤？

这里浓硫酸的浓度、重量以及稀释后硫酸的浓度都是已知的量，稀释时应加入的水的重量是所要求的未知的量。此问题固然可用算术的方法解决，但也可循如下思路考虑：若用字母 x 表示加水的斤数，那么稀释前后硫酸溶液所含纯硫酸的斤数分别为 $300\cdot98\%$ 和 $(300+x)\cdot10\%$，由于稀释前后硫酸溶液中所含纯硫酸的重量相等，所以可得等式

$$300\cdot98\% = (300+x)\cdot10\% \tag{1}$$

在等式(1)中，300、98%、10%三数表示已知的量，叫做已知数；字母 x 表示未知的量，叫做未知数。等式(1)是一个含有未知数 x 的等式，它表明了未知数与已知数之间的

关系。于是，问题就归结为求出使这个等式两边的值相等的未知数 x 的值。

定义　含有未知数的等式，叫做方程。

例如等式(1)是一个方程，它含有未知数 x。又如，

$$-\frac{x}{7}=\frac{3}{14} \quad (2); \qquad x+y=40 \quad (3);$$

$$x^2-6x=5 \quad (4); \qquad x^2-2xy-3y^2=5 \quad (5);$$

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3} \quad (6); \qquad x-\sqrt[3]{x^3-4x-7}=1 \quad (7)$$

也都是含有未知数的等式，它们都是方程。

上述方程中，有的含有一个未知数，有的不止含有一个未知数。如方程(1)、(2)、(4)、(6)、(7)中，只含有一个未知数 x，或者说，它们是关于一个未知数 x 的方程；方程(3)、(5)中含有两个未知数 x、y，或者说，它们是关于两个未知数 x、y 的方程。

方程的未知数，又叫方程的**元**。含有一个未知数的方程叫做**一元方程**；含有两个未知数的方程，叫做**二元方程**；一般地说，含有 n 个未知数的方程，叫做 **n 元方程**。

关于未知数 x 的一元方程，可以表示为

$$f(x)=g(x)$$

其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是关于 x 的表达式。

关于未知数 x、y 的二元方程，可以表示为

$$f(x, y)=g(x, y)$$

一般地，关于未知数 x、y、……、z 的方程，可以表示为

$$f(x, y, \cdots\cdots, z)=g(x, y, \cdots\cdots, z) \quad (8)$$

初等数学里所研究的方程，按照方程左右两边的表达式

对未知数所施行的运算来分类．对于方程(8)，如果 f 与 g 都是代数式，即关于未知数所施行的是代数运算（加、减、乘、除、乘方与开方），那么方程(8)叫做**代数方程**．

如果 f 与 g 都是有理式，那么方程(8)叫做**有理方程**；如果 f 与 g 都是代数式，并且至少有一个是无理式，即包含关于未知数的开方运算，那么方程(8)叫做**无理方程**．

如果 f 与 g 都是多项式，那么方程(8)叫做**整式方程**；如果 f 与 g 都是有理式，并且至少有一个是分式，即包含关于未知数的除法运算(除式里含有未知数)，那么方程(8)叫做**分式方程**．

不难看出，有：

$$\text{代数方程}\begin{cases}\text{有理方程}\begin{cases}\text{整式方程}\\ \text{分式方程}\end{cases}\\ \text{无理方程}\end{cases}$$

例如，上述方程 (1)——(7) 全是代数方程；(1)——(6) 是有理方程，(7)是无理方程；(1)——(5) 是整式方程；(6) 是分式方程．

方程(1)、(2)有一个共同点，它们都是整式方程，并且只含一个未知数，未知数的项的最高次数是 1．

定义　含有一个未知数，且含未知数的项的最高次数是 1 的整式方程，叫做一元一次方程．

例如，方程 (1)和(2) 是一元一次方程．方程(3)虽是整式方程，且含未知数的项的最高次数是 1，但含两个未知数，所以不是一元一次方程．方程 (4) 虽是含一个未知数的整式方程，但含未知数的项的最高次数是 2，因此也不是一元一次方程．

一元一次方程的标准形式是 $ax+b=0\,(a\neq0)$，其中 ax 和

b 分别叫做一次项和常数项；a 叫一次项的系数。

2．方程的未知数的允许值（或值组）集

定义　使方程两边的表达式有意义的所有未知数的值（或值组）的集合，叫做方程的未知数的允许值（或值组）集。

若把方程的未知数看作变数，那么方程未知数的允许值集，实际上就是方程两边表达式的变数字母允许值集的公共部分（即它们的交集）。

初等数学里所研究的方程，通常要在某一数域上来讨论，即必须明确未知数的容许值和表达式中出现的数属于哪个数域。在本书中，若无特别声明，我们都是在实数域上来讨论的。

例 1　求方程　$2x^2+3=x-5$ 的未知数的允许值集。

解　方程两边表达式的变数字母 x 的允许值集都是一切实数的集合，所以这个方程的未知数的允许值集是一切实数的集合。

例 2　求方程　$\dfrac{2}{x}+1=3$ 的未知数的允许值集。

解　方程左边的表达式是分式，变数字母 x 的允许值集是除 0 以外的实数集合，右边变数字母 x 的允许值集是一切实数集合，所以此方程的未知数的允许值集是除 0 以外的一切实数的集合。

例 3　求方程 $\sqrt{x}=\dfrac{1}{x-2}$　的未知数的允许值集合。

解　方程左边是一个二次根式，变数字母 x 的允许值集是 $x\geqslant 0$ 的实数集合；右边是一分式，变数字母 x 的允许值集是 $x\neq 2$ 的实数的集合。所以，这个方程未知数的允许值集是满足 $0\leqslant x<2$ 与 $x>2$ 的一切实数的集合。

3. 方程的解与解方程

将方程的未知数的允许值集中的数代入方程两边的表达式，计算所得的结果，或者相等，或者不等。实际问题常常需要我们去寻求这样的未知数的值，能使方程的两边相等。

定义 **能使方程两边相等的未知数的值（或值组），叫做方程的解。一元方程的解，又叫做方程的根。方程的所有的解的全体叫做方程的解的集合，简称方程的解集。**

由上述定义可知：方程的每个解属于未知数的允许值（或允许值组）集。

例如，方程 $(x-2)(x-3)=0$，当 $x=2$ 时，左边 $=(2-2)(2-3)=0$，右边 $=0$，左边 $=$ 右边，所以 $x=2$ 是方程的一个解。同理，$x=3$ 是方程的另一个解。并且不难看出，2、3 以外的数不是此方程的解。因此，这个方程的解集是 2、3 两数组成的集合。

又如，方程 $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$，未知数的允许值集是 $x\neq1$ 的实数的集合。对于未知数的允许值集内的所有的数，方程两边表达式的值都相等，所以除 1 以外的任一实数都是该方程的解，即此方程的解集是不等于 1 的实数的集合。

再如，方程 $x^2+1=0$，由于对任一实数 x，$x^2+1\neq0$，即不存在这样的实数 x 能使方程两边的值相等，所以此方程无解。象这样的方程，叫做**矛盾方程**，矛盾方程的解集为空集。

由以上各例可以看出，方程的解集有下列三种情形：

(1) 方程至少有一解，但并不是每一未知数的允许值都是方程的解。即方程的解集是未知数允许值集的非空真子集；

(2) 方程的未知数的每一允许值都是方程的解，即方程

的解集与未知数的允许值集是一致的；

(3) 方程没有解，即方程的解集是空集。

所谓**解方程**，就是求方程的解集的过程，即确定方程有无解，若有解求出所有解的过程。

§2 一元一次方程的解法

1. 同解方程 在解一元一次方程时，我们总是设法在保证原方程的解不变的前提下，化复杂方程为简单方程，最后得到 $x=a$，从而求出原方程的解。

究竟怎样才能将一个复杂方程化为简单方程，且保证原方程的解不变呢？为了解决这个问题，我们先研究几个方程的同解性定理。

定义 在某一数域上，如果方程

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

的任一解，是方程

$$f_1(x)=g_1(x) \tag{2}$$

的解，反之，方程(2)的任一解也是方程(1)的解，那么这两个方程叫做在该数域上同解。这两个方程叫做同解方程。把一个方程用与其同解的方程去代替，这种变换叫做同解变换。

两个无解的方程，我们认为是同解的。

这就是说，同解的两个方程的解集相等。

例如，方程 $x-1=4$ 与方程 $2x=10$ 的解都只有"5"，所以，它们是同解的。方程 $x=x$ 与方程 $\frac{x^2}{x}=x$，前者的解集为一切实数，后者的解集为不等于零的一切实数。因此，它们在实数范围内不是同解的。

应该注意，方程的同解性是具有相对性的，它与所讨论的数域有关。例如方程$(x-1)(x^2+1)=0$与$x-1=0$，在实数域上同解.但在复数域上就不同解，前者的解为$x_1=1$，$x_2=i$，$x_3=-i$；后者的解是$x=1$。

方程的同解性定理一　如果方程的两边分别进行恒等变形，且未知数的允许值集不变，那么所得的新方程与原方程同解。

即若方程

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

的两边分别进行恒等变形，得到新方程

$$f_1(x)=g_1(x) \tag{2}$$

且两方程具有相同的未知数的允许值集，则方程(1)与方程(2)同解。

例如，在解方程$6(2x-1)-4(2x+5)=3(6x-7)-19$时，去括号得，$12x-6-8x-20=18x-21-19$。后一方程是由前一方程的两边分别进行恒等变形(去括号)而得到的，且它们的未知数的允许值集都是实数集，据此定理，它们是同解的。

证明　① 设$x=a$是方程(1)的任一解，即有

$f(a)=g(a)$。

由于方程(1)、(2)具有相同的未知数的允许值集，所以$x=a$是方程(2)的未知数的允许值集中一个数，$f_1(a)$，$g_1(a)$都是确定的值.

因为方程(2)是由方程(1)两边分别进行恒等变换而得到的，对于允许值集内一切x的值，有

$$f(x)=f_1(x),\qquad g(x)=g_1(x),$$

$$\therefore\quad f(a)=f_1(a),\qquad g(a)=g_1(a).$$

由 $f(a)=g(a)$ 可得，

$f_1(a)=g_1(a)$。

$\therefore$ $x=a$ 是方程(2)的解

② 同理可证，方程(2)的任一解也一定是方程(1)的解。

综 ①、② 所证，方程(1)与方程(2)同解。

这里应该注意定理的应用条件。例如方程 $\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=3$ 与方程 $x+2=3$，后者的左边是由前者的左边通过约分得到的，约分虽是一种恒等变形，但这里却改变了方程的未知数的允许值集，故不能由此定理去肯定这两个方程同解。事实上，$x=1$ 是后一方程的解，但不属于前一方程未知数的允许值集，所以不可能是前一方程的解。方程两端分别恒等变形，当未知数的允许值集变化时，此例是不同解的情况。有时所得新方程与原方程仍然同解。

方程的同解性定理二　如果方程的两边都加上同一个整式，那么所得的新方程与原方程同解。

即若 $w(x)$ 是一个整式，则方程

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

与方程

$$f(x)+w(x)=g(x)+w(x) \tag{2}$$

同解。

证明 ① 设 $x=a$ 是方程(1)的任意一个解，即有

$f(a)=g(a)$。

因为 $w(x)$ 是整式，所以 $w(a)$ 为一确定数值，

$\therefore$ $f(a)+w(a)=g(a)+w(a)$，

$\therefore$ $x=a$ 是方程(2)的解。

② 同理可证，若 $x=b$ 是方程(2)的任意一个解，则一定是方程(1)的解。

综 ①、②，方程(2)与方程(1)同解。

由此定理，不难得到：

推论　对于任一整式 $w(x)$，方程

$$f(x)+w(x)=g(x) \tag{1}$$

与方程

$$f(x)=g(x)-w(x) \tag{2}$$

同解。也就是说，**方程中的任一项改变符号以后，从一边移至另一边，所得新方程与原方程同解。**

事实上，方程(1)的两边同时加上“$-w(x)$”，便得到与其同解的方程

$$f(x)+w(x)-w(x)=g(x)-w(x) \tag{3}$$

方程(3)的两边施行恒等变换，便得到与其同解的方程(2)，所以方程(1)与方程(2)同解。

例如，方程 $5x=3x+10$，将“$3x$”改变符号后由右边移至左边，得 $5x-3x=10$，据推论知，此两方程同解。

根据此定理及其推论，在解方程时，可以根据需要，将某些项由一边移至另一边(移项)。

方程的同解性定理三　如果方程的两边都乘以同一个不等于零的数，那么所得的新方程与原方程同解。

即若 $m\neq 0$，方程

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

与方程

$$mf(x)=mg(x) \tag{2}$$

同解。

证明　① 设 $x=a$ 是方程(1)的任意一个解，即有

$f(a)=g(a)$，

$\therefore \quad mf(a)=mg(a),$

$\therefore \quad x=a$ 是方程(2)的解。

② 设 $x=b$ 是方程(2)的任意一个解，即有

$mf(b)=mg(b)$。

$\because \quad m\neq 0,$

$\therefore \quad f(b)=g(b)$。

$\therefore \quad x=b$ 是方程(1)的解。

由①、②，方程(1)与方程(2)同解。

例如，方程

$$2-\frac{3x-7}{4}=-\frac{x+17}{5} \tag{1}$$

两边同乘以 20，得

$$20\left(2-\frac{3x-7}{4}\right)=20\left(-\frac{x+17}{5}\right) \tag{2}$$

两边施行恒等变形，得

$$75-15x=-4x-68 \tag{3}$$

根据方程的同解定理三及同解定理一可知，方程 (1) 与方程(3)同解。

又如，方程 $3x=6$ 两边同时乘以“$\frac{1}{3}$”(即两边同除以3)并且分别施行恒等变形，得 $x=2$，据方程同解定理三、一可知，这两个方程是同解的。

方程的同解定理一、三联合应用，在解方程时，可去掉不含未知数的分母，也可根据需要与可能，简化方程中某一项的系数。

以上三个方程的同解性定理，我们是对一元方程来证明的，但对于多元方程仍然是成立的。

从以上三个方程的同解性定理的研究中，可以看出，方程

的移项变换，方程两边施行恒等变换（不改变未知数的允许值集）以及方程两边同乘以（或除以）不等于零的数的变换，都可将方程化简，且保证原方程的解不变．这就为今后解方程时，化复杂方程为简单方程，以至求出原方程的解奠定了基础．

2．一元一次方程的解法

例 1 解方程 $3(2x+5)=2(4x+3)+1$．

解 去括号，得 $6x+15=8x+6+1$．

移项，得 $6x-8x=6+1-15$．

合并同类项，得 $-2x=-8$．

两边同除以“-2”，得 $x=4$．

$\therefore$ 原方程的解是 $x=4$．

上述解方程过程的每一步，都是同解变换，所以最后得到的 $x=4$ 与原方程同解，即原方程的解就是 $x=4$．在这里，我们首先是将原方程化为 $ax=b$ 的形式，为此，必须把所有含 x 的项集中在方程的一边，常数项集中在另一边．由于原方程含有括号，移项不方便，所以又必须先去括号．

例 2 解方程 $\dfrac{x-8}{5}+\dfrac{3x}{4}=\dfrac{x+3}{2}$．

因方程中含有分数系数，为了避免繁杂的分数计算，我们可先将其化为整数系数的方程．

解 两边同乘以 20，得 $4(x-8)+5\cdot 3x=10(x+3)$．

去括号，得 $4x-32+15x=10x+30$．

移项，得 $4x+15x-10x=30+32$．

合并同类项，得 $9x=62$．

两边同除以 9，得 $x=6\dfrac{8}{9}$．

解一元一次方程的一般步骤如下：

(1) **去分母**（两边同乘以各分母的最小公倍数）；