高等数学

GAODENGSHUXUE

■ 主　审　周智光
■ 主　编　王永森　房　阁
■ 副主编　徐连俊

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高　等　数　学

主　审　周智光

主　编　王永森　房　阁

副主编　徐连俊

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书适用于高等职业院校及同层次的工科学员。全书共八章，内容包括一元函数的极限与连续、导数及应用、不定积分和定积分、多元函数微分学、二重积分、矩阵及其应用。每个重要知识点后都设有课堂练习，以供学生及时巩固之用。每一节后还精心选编了一些习题，并附有参考答案，使学生可以循序渐进地掌握复杂知识和综合性题目。书后设有附录，将初等数学常用公式列举出来，以备参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/王永森，房阁主编．—北京：北京理工大学出版社，2009.3
ISBN 978-7-5640-2040-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…②房…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 005046 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京国马印刷厂
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／12.75
字　　数／293 千字
版　　次／2009 年 3 月第 1 版　　2009 年 3 月第 1 次印刷
印　　数／1~4000 册　　责任校对／陈玉梅
定　　价／26.00 元　　责任印制／吴皓云

图书出现印装质量问题，本社负责调换

前　　言

随着高等职业技术教育的迅速发展，接受高等职业技术教育的学生不断增加，为适应高等职业技术教育的需要，编写了本教材。

参加编写本书的人员都是从事高等数学教育多年的一线骨干教师。由于有丰富的教学经验，我们更了解接受高等职业技术教育的学生的需求。

在编写中，我们以“拓宽知识，着眼应用，适当提高”为原则，力求内容通俗易懂，兼顾各类学生。

本书结合高等职业技术院校的学生的实际情况，做到教材结构紧凑，语言简明易懂，对基本理论和基本方法由浅入深，引导学生学会用数学的逻辑思维的方法解决问题。

为了让学生易于掌握高等数学的内容，本书从实例入手将抽象概念形象化，对部分内容配以图、表使学生理解一些定理和概念，将一些数学方法公式化，更便于学生掌握。并且每项内容都配有一定量的课堂练习，来训练学生的解决问题的能力。

本书共有八章，主要内容有函数、极限与连续、导数及导数应用、不定积分和定积分、多元函数微分学、二重积分、矩阵及其应用。每节都配有课堂练习，每节后都配有一定数量的习题，供教师和学生选用，书后附有习题答案供参考。本书的参考学时为90～120学时。

参加编写的有王永森（第六章、第七章）、房阁（第一章、第二章）、徐连俊（第五章）、石坚（第四章、第八章）、项慧慧（第三章、第六章）、周姝等。本书由王永森、房阁主编，徐连俊任副主编，周智光主审。全书由王永森、房阁负责统稿工作。

由于编者的学术水平有限及时间比较仓促，难免有不妥和疏漏之处，恳请广大师生、读者不吝赐教。

作　者

目　　录

第一章　函数的极限与连续

函数是微积分研究的主要对象，极限的概念、理论和方法是微积分研究的基本工具. 本章将在复习函数概念和性质的基础上进一步介绍复合函数、初等函数、函数的极限及连续性等内容.

第一节　初等函数

一、函数的概念

1. 函数定义

日常生活中，我们经常看到两个事物之间存在着某种联系，如购买物品的单价确定后，付款金额与购买数量之间存在着一种关系；某天的气温与所处的时间之间存在着一种关系，汽车的耗油量与所行驶的路程之间存在着一种关系，我们把上述这些关系统称为是一种函数关系.

定义1　设 D 是一个实数集，如果有一个对应法则 f，对每一个 $x\in D$，都存在唯一数值 y 和它对应，则将对应法则 f 称为定义在 D 上的一个**函数**，记作 $y=f(x)$，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的数，对应的 y 构成一个数集 M，称为函数的**值域**.

函数的定义域、对应法则称为函数的**二要素**. 在函数定义中，由定义域和对应法则确定了函数的值域，如果两个函数的定义域、对应法则完全相同，则称这两个函数是同一个函数，否则是两个不同的函数. 如 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$，因为它们的定义域与对应法则完全相同，所以是同一个函数；而 $y=1$ 与 $y=\dfrac{x}{x}$，由于定义域的不同，是两个不同的函数.

课堂练习

下列各对函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否相同？为什么？

（1）$f(x)=\dfrac{x^2}{x}$，$\varphi(x)=x$

（2）$f(x)=\lg x^2$，$\varphi(x)=2\lg x$

2. 函数值

当自变量 x 在定义域内取某一定值 x_0 时，因变量 y 按对应法则 f 得出的对应值称为函数当 $x=x_0$ 的函数值，记为 $f(x_0)$.

例1　已知 $f(x)=1+x$，$\varphi(x)=\cos 2x$，求：$f(0)$，$f(-x)$，$f[\varphi(x)]$.

解　$f(0)=1+0=1$；

$f(-x)=1+(-x)=1-x$；

$$f[\varphi(x)]=1+\varphi(x)=1+\cos 2x.$$

3. 函数的定义域

在研究函数时必须注意它的定义域. 如果是实际问题，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定. 例如，圆的面积 $A=\pi r^2$，半径 r 是表示长度的，故 $r>0$. 如果一个函数是用解析式来表示的，我们约定其定义域为使数学表达式有意义的自变量所能取的实数集合. 一般应考虑以下几个方面：

（1）分母不等于零；（2）偶次根式根号内的式子大于或等于零；

（3）$y=\tan x$ 中 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$；（4）$y=\cot x$ 中 $x\neq k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$；

（5）$y=\log_a x$ 的真数需大于零；（6）$y=\arcsin x, y=\arccos x$ 中，$|x|\leqslant 1$；

（7）表达式中含有以上六类函数式，则应取各部分定义域的交集.

例 2 已知函数 $y=\dfrac{5x+7}{\sqrt{2x-6}}$，求定义域.

解 因为偶次根号内的式子非负，分母不能为零. 有

$$2x-6>0,\quad 即\quad x>3$$

所以函数的定义域为 $x\in(3,+\infty)$.

例 3 求函数 $y=\ln(x+2)+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 因为真数必须大于零. 同时考虑反正弦函数的定义域要求，有

$$\begin{cases}x+2>0\\-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1\end{cases},\quad\begin{cases}x>-2\\-3\leqslant x\leqslant 4\end{cases},\quad -2<x\leqslant 4$$

所以函数的定义域为 $x\in(-2,4]$.

在研究函数时，经常用到邻域概念. 设 x_0 是实数轴上一点，δ 为某一正数，我们把以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的**δ 邻域**. 或简称为点 x_0 的**邻域**.

课堂练习

求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{\ln(x-3)}$ （2）$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

4. 分段函数

通常函数有三种表示法：列表法、图形法和公式法（又称解析法）

一个函数在其定义域的不同区间内，用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**. 如符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

就是一个分段函数，它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $M=\{-1,0,1\}$.

注意：上面的函数不是两个函数，而是用两个式子表示一个函数. 因此，要求定义域内某个自变量 x 的函数值时，一定要注意将此自变量代入分段函数在相应定义区间上的公式. 分段函数的定义域是各自变量取值集合的并集. 分段函数的图像在每一个区间段上与相应解析式函数的图像相同.

例 4　设
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\leqslant 0 \\ x^2 & 0<x\leqslant 1 \\ -2x+4 & x>1 \end{cases}$$

求（1）$f(-1)$，$f(1)$；

（2）函数的定义域；

（3）画出函数的图像；

解（1）$f(-1)=-1+1=0$，$f(1)=1^2=1$.

（2）函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

（3）作图如图 1.1 所示.

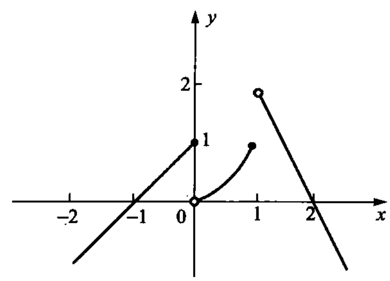


图 1.1

课堂练习

设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ 2 & x=0 \\ 3x & x>0 \end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(3)$，并作出它的图像.

5. 反函数

在研究两个变量的相互关系时，两个变量之间是互相依存，互相制约的. 在实际问题中，两个变量的地位虽有不同但又可以互相转化. 例如研究圆面积 A 与圆半径 r 之间的关系. 如果已知半径求面积，则我们有函数
$$A=f(r)=\pi r^2 \quad (r>0)$$

反过来我们要依据已知的圆的面积来确定它的半径，则必须将 A 作为自变量，将半径 r 作为因变量，即
$$r=\varphi(A)=\sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (A>0)$$

这样一来我们得到了两个函数：$A=f(r)=\pi r^2$ 及 $r=\varphi(A)=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$. 一方面，它们描述了圆的半径与面积之间的同一数量关系；另一方面，函数作为两个变量之间的对应法则 $f(\quad)$ 与 $\varphi(\quad)$ 却有不同的含义. 即：$f(\quad)$ 表示将自变量平方再乘以 π；$\varphi(\quad)$ 表示将自变量除以 π 再取算术根.

我们称 $A=f(r)$ 是 $r=\varphi(A)$ 的反函数，也可称 $r=\varphi(A)$ 是 $A=f(r)$ 的反函数. 习惯上以 x 表示自变量，y 作为因变量，则
$$y=f(x)=\pi x^2 \text{（}x\text{ 表示半径，}y\text{ 表示面积）}$$

$$y=\varphi(x)=\sqrt{\frac{x}{\pi}} \quad （x 表示面积，\ y 表示半径）$$

称 $y=\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ 是 $y=\pi x^2$ 的反函数.

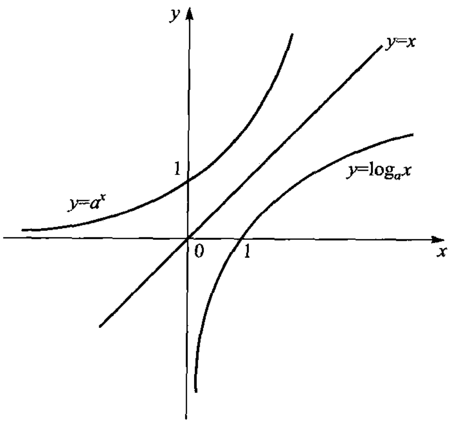


图 1.2

定义2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 y 值，都有 D 中的一个 x 值适合 $y=f(x)$. 这样由关系式 $y=f(x)$ 确定了一个以 y 为自变量，以 x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$，$y\in M$. 则称函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，习惯上以 x 为自变量，可将 $x=\varphi(y)$ 改写为 $y=\varphi(x)$，仍称 $y=\varphi(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 显然 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 互为反函数.

几何上，在同一直角坐标系中，$y=f(x)$ 与它的反函数 $x=\varphi(y)$ 表示同一曲线，但 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=\varphi(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例如，$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 它们互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1.2 所示.

二、函数的几种特性

1. 有界性

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义，如果存在正数 M，对于任意 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是**有界的**，正数 M 称为函数 $y=f(x)$ 的**界**；若不存在这样的正数 M，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是**无界的**.

从几何上看，有界函数的图形被限制在两条平行于 x 轴的直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 所确定的带形区域内（图 1.3）.

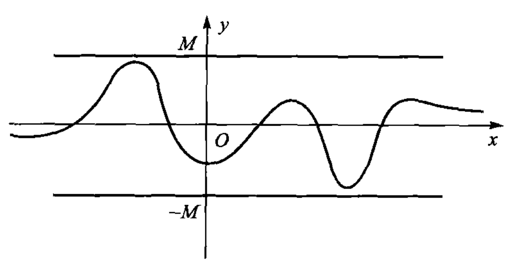


图 1.3

如：$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，$M=1$. $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界的，因为找不到这样的正数 M，使得 $|x^2|\leqslant M$ 恒成立. 而 $y=x^2$ 在 $(-8,3)$ 上是有界的，因为 $|x^2|\leqslant 8^2$，$M=8$.

2. 奇偶性

定义4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 是**奇函数**；如果对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 是**偶函数**.

在直角坐标系下，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

3. 单调性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，若 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加的**；若 $x_1<x_2$ 时，恒有

$f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少的**.

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数. 单调递增函数的图像随 x 的增大而保持上升的势头，单调递减函数的图像随 x 的增大而保持下降的势头.

4. 周期性

设 $y=f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义的函数，若存在实数 $T\neq 0$，使对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**，并称使上述等式成立的最小正数 T 为 $y=f(x)$ 的**周期**.

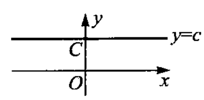
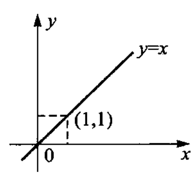
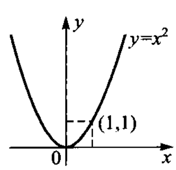
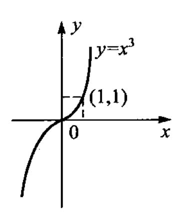
比如函数 $y=\sin x$， $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数； $y=\tan x$， $y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图像，沿 x 轴每间隔一个周期 T 就重复一次. 因此画周期函数的图像时，只需作出该函数在一个周期上的图像就可以了.

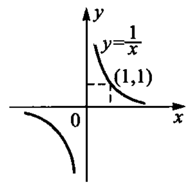
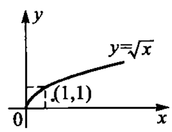
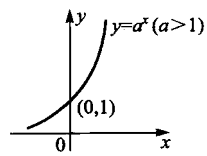
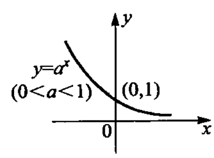
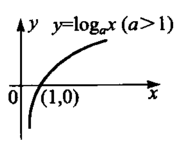
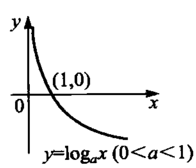
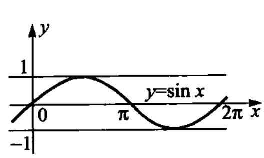
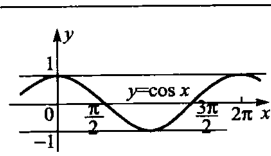
三、初等函数

中学学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**，现将其图形及性质列表见表 1.1.

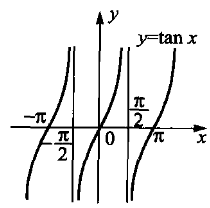
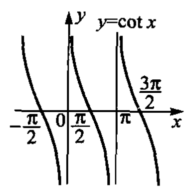
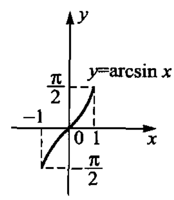
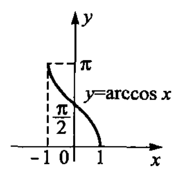
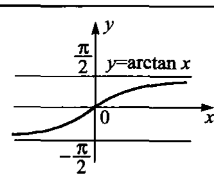
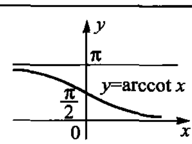
表 1.1　基本初等函数的图像和性质

		定义域和值域	图　　像	特　　性
常数函数	$y=C$	$x\in(-\infty,+\infty)$		偶函数
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数. 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加

续表

		定义域和值域	图 像	特 性
幂函数	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上分别单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ （$a>1$）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加，经过点（0，1）
	$y=a^x$ （$0<a<1$）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少，经过点（0，1）
对数函数	$y=\log_a x$ （$a>1$）	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加，经过点（1，0）
	$y=\log_a x$ （$0<a<1$）	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少，经过点（1，0）
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，有界，周期 2π，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，有界，周期 2π，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$

续表

		定义域和值域	图　像	特　性
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期π，在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期π，在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少$(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，有界，单调增加
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界，单调减少
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，有界，单调增加
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		有界，单调减少

四、复合函数

1. 复合函数

在很多实际问题中，两个变量的联系有时不是直接的．例如，简谐振动$y=f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，函数值$y$不是直接由自变量$x$来确定，而是通过$\omega x+\varphi$来确定的．如果用$u$表示$\omega x+\varphi$，则函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$就可表示成$y=A\sin u$，而$u=\omega x+\varphi$．这也说明了$y$与$x$的函数关系是通过变量$u$来确定的．

定义 6 设 y 为 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示成 x 的函数，即 $y=f[\varphi(x)]$，那么 y 就叫做 x 的**复合函数**，其中 u 叫做**中间变量**.

注意：函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应该取在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，否则复合函数将失去意义.

例如，复合函数 $y=\sqrt{u}$，$u=2+x$，由于 $y=\sqrt{u}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，所以中间变量 $u=2+x$ 的值域必须在 $[0,+\infty)$ 内，即 x 应在 $[-2,+\infty)$ 内.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成. 如：$y=\sin u$，$u=\sqrt[3]{v}$，$v=1-\mathrm{e}^x$，则得复合函数：$y=\sin\sqrt[3]{1-\mathrm{e}^x}$，这里，$u$，$v$ 都是中间变量.

利用复合函数的概念，可以把一个较复杂的函数分解成若干个简单函数（即基本初等函数，或由常数与基本初等函数经过有限次四则运算而成的函数）.

例 5 下列函数由哪些基本初等函数复合而成：

（1） $y=2^{\cos x}$　　　（2） $y=\ln(1-2x)$

（3） $y=\sin^2\dfrac{1}{x}$　　　（4） $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-2x-3}}$

解 （1） $y=2^u$，$u=\cos x$；

（2） $y=\ln u$，$u=1-2x$；

（3） $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{1}{x}$；

（4） $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+2x-3$.

注意：分析复合函数的复合结构时，应该由外至内逐步将复合函数分解成若干个基本初等函数(多项式例外)，我们形象地说：由外至内，层层剥笋.

课堂练习

下列函数由哪些基本初等函数复合而成：

（1） $y=\sqrt{x^2-3}$　　　（2） $y=\sin^2(\ln x)$

（3） $y=\mathrm{e}^{\sqrt{\cos(x+2)}}$　　　（4） $y=\dfrac{1}{\tan 3x}$

2. 初等函数

定义 7 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合而成的，且能用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

如：$y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，$y=\sqrt{1+x^2}\sin^2(3x+2)+5$ 都是初等函数，应当注意的是分段函数一般不是初等函数，如 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\leqslant 0\\ 1-2x & x>0\end{cases}$ 是由两个解析式表示的一个函数.

习题 1–1

1. 下列各对函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否相同？为什么？

（1） $f(x)=1$，$\varphi(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$

（2） $f(x)=\ln|x|$，$\varphi(x)=\ln x$

（3） $f(x)=x$，$\varphi(x)=e^{\ln x}$

2. 设 $f(x)=x^2+5$，$\varphi(x)=\sin 3x$，求：$f(-2)$，$f(-x)$，$f[f(x)]$，$f[\varphi(x)]$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ x+3 & 0\leqslant x<2\\ x^2 & x\geqslant 2\end{cases}$，求 $f(x)$ 的定义域及 $f(-1)$、$f(0)$、$f(3)$ 的值，并作出它的图像.

4. 求下列函数的定义域：

（1） $y=\dfrac{1}{1-x^2}$　　（2） $y=\sqrt{3x+2}$

（3） $y=\lg(4-x)$　　（4） $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

5. 下列函数由哪些基本初等函数复合而成：

（1） $y=\lg(2^{\cos x})$　　（2） $y=[\arccos(1-x^2)]^3$

6. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求：

（1） $f(x^2)$ 的定义域；

（2） $f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$ 的定义域.

第二节　极限的概念

一、极限概念的引入

我国春秋战国时期的《庄子·天下篇》中说：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，这就是最朴素的极限思想.

在这个过程中可以试想一下，一根棒子，每天取其一半，尽管永远取不完，可到了一定的时候，还能看得见吗？看不见意味着什么？不就是没有了吗？终极的时候，就彻底地没有了. 它的终极状态就是零. 那么我们如何去理解这个终极状态和零呢？

中国古代数学家刘徽的割圆术，就是用圆内接正多边形的周长逼近圆周长的极限思想来近似计算圆周率 π 的. 他说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可再割，则与圆合体而无所失矣!”

17 世纪 60 年代，牛顿和莱布尼兹两人分别从力学问题和几何学问题入手，在前人工作的基础上. 利用还不严密的极限方法各自独立地建立了微积分学，最后由柯西和维尔斯特拉斯完善了微积分的基础概念——极限.

用现代数学的思想来说，刘徽割圆术中所述的不可再割的情况是不存在的，无论怎么一种割法，都不可能“与圆合体而无所失”，但是，他体现出来的终极思想是无可非议的.

微分学与积分学中还有许多有关极限思想的应用问题，在后面的课程中我们还会有这方

面的阐述，在这里就不作介绍了.

二、数列的极限

例 1　观察下列数列的变化趋势：

（1）$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$

（2）$-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \cdots,\ -\frac{1}{2^n},\ \cdots$

（3）$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots$

（4）$(-1),\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^n\frac{1}{n},\ \cdots$

（5）$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots$

（6）$(-1),\ 1,\ (-1),\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$

解　观察上述数列发现：

（1）当 n 无限增大时，数列的通项 $x_n=\frac{1}{n}$ 在数轴上从 0 的右侧无限地趋近于常数 0；

（2）当 n 无限增大时，数列的通项 $x_n=-\frac{1}{2^n}$ 在数轴上从 0 的左侧无限地趋近于常数 0；

（3）当 n 无限增大时，数列的通项 $x_n=\frac{n+1}{n}$ 在数轴上从 1 的右侧无限地趋近于常数 1；

（4）当 n 无限增大时，数列的通项 $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$ 在数轴上从 0 的两侧无限地趋近于常数 0；

（5）当 n 无限增大时，数列的通项 $x_n=2n$ 也无限增大；

（6）当 n 无限增大时，n 分为奇数与偶数，数列分别趋近于 (-1) 和 1，而不趋近于一个确定的常数.

定义 1　对于无穷数列 $\{x_n\}$，如果当项数 n 无限增大时，数列 $\{x_n\}$ 的通项 x_n 无限地趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为**数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷大时的极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A\ (n\to\infty)$$

亦称数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷大时收敛于 A. 若当 n 无限增大时，数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在，亦称数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

根据数列极限的定义，例 1 中的 6 个数列，有

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2^n}\right)=0$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$；

（5）数列 $x_n=2n$ 的极限不存在；　　（6）数列 $x_n=(-1)^n$ 的极限不存在.

由此看到数列极限不存在有两种情况：

（1）$n\to\infty$ 时，$x_n\to\infty$；　　如：数列（5）.

（2）$n\to\infty$ 时，数列交错；　　如：数列（6）.

例 2　观察下列数列的极限：

（1）$x_n = q^n \quad (|q|<1)$

（2）$x_n = 5$

解　（1）$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q|<1)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5$

一般地，任何一个常数数列的极限都是这个常数本身，即

$$\lim_{n\to\infty} C = C \qquad （C 为常数）$$

在实际中，经常会遇到下列数列的极限，请熟记下列结果：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} C = C$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} n$ 不存在

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q|<1)$

课堂练习

观察下列数列的变化趋势，如果有极限，写出它们的极限值：

（1）$x_n = 1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$　　（2）$x_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$

（3）$x_n = (-1)^n n$　　（4）$x_n = 3 - \dfrac{1}{n}$

三、函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

例 3　观察下列函数的变化趋势（图 1.4，图 1.5，图 1.6）：

（1）$f(x) = \dfrac{1}{x} \quad (x\to\infty)$；

（2）$f(x) = 2^{-x} \quad (x\to+\infty)$；

（3）$f(x) = \arctan x \quad (x\to\infty)$.

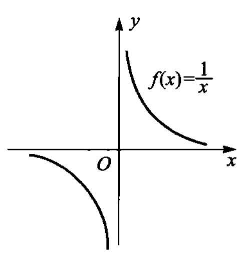


图 1.4

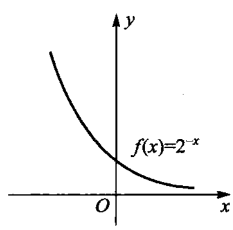


图 1.5

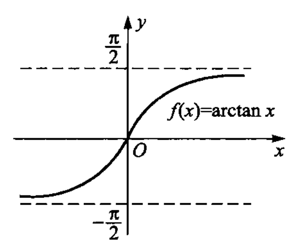


图 1.6

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>a$ 时有定义（a 为某个正实数），如果当自变量 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $y=f(x)$ 当