沙 峯 杨延龄 杨益民 编著

工科数学

学习指导

高等数学·线性代数·概率论与数理统计

中国建材工业出版社

工科数学学习指导

高等数学·线性代数·概率论与数理统计

沙　峯　杨延龄　杨益民　编著

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科数学学习指导:高等数学·线性代数·概率论与数理统计/沙峯,杨延龄,杨益民编著. ——北京:中国建材工业出版社,2010.4

ISBN 978-7-80227-654-3

Ⅰ.①工… Ⅱ.①沙…②杨…③杨… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料②线性代数—高等学校—教学参考资料③概率论—高等学校—教学参考资料④数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13②O151.2③O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 038856 号

内容简介

该书按照"全国硕士研究生统一考试数学考试大纲"一、二编写而成,同时参照工科数学教学基本要求,全书分为高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个部分。按照考试大纲要求三部分内容分别为八章、六章、六章,各章以典型例题为主体构成一些基本单元,每个基本单元包括三部分:解题思路、详解、习题。

该书可作为正在学习工科数学的本科学生及准备报考硕士研究生考生的参考书。

工科数学学习指导

沙 峯 杨延龄 杨益民 编著

出版发行:中国建材工业出版社
地 址:北京市西城区车公庄大街6号
邮 编:100044
经 销:全国各地新华书店
印 刷:北京鑫正大印刷有限公司
开 本:787mm×960mm 1/16
印 张:16.25
字 数:307千字
版 次:2010年4月第1版
印 次:2010年4月第1次
书 号:ISBN 978-7-80227-654-3
定 价:**30.00**元

本社网址:www.jccbs.com.cn

本书如出现印装质量问题,由我社发行部负责调换。联系电话:(010)88386906

前　言

大学工科数学由高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门课组成。

本书按照“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”一、二编写，同时参照工科数学教学基本要求。可以作为正在学习工科数学的本科学生以及准备报考研究生的考生的参考书。

全书分为高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个部分。按大纲要求，这三部分分别由八章、六章、六章组成。各章以典型例题为主体构成一些基本单元，每个基本单元包括三部分：解题思路、详解、习题。

第一部分是例题和解题思路。这些例题主要选自研究生入学考试试题，试题用五位编码，前两位是年，中间一位是科，后两位是小题的编号。个别试题根据大纲的最新要求作了适当的修改，还有些题目选自文科试题。例题解题思路包括该题用到的理论知识，方法与技巧，容易出现的错误，有时还包括总结性的内容，便于读者对知识与方法的系统掌握。

第二部分是比较详细的解答，便于读者学习。对于典型问题予以详细分类。先按照问题的所求分成几个大类。对于每个大类，再按照已知分成几个小类。每类精选若干例题，予以详尽解答，基本上涵盖了所有常见的典型问题。掌握了这些问题的解法，也就基本上理解了这门学科的主要思想、内容与方法。在这里，主要用一个方法解一种问题，个别题目一题多解。

第三部分是习题。与例题相配合，每个例题配有一到四个习题。供读者检验自己对概念的理解，以及对方法的掌握。有些习题具有一定难度。如果一时不能解决，也不要放弃。经过反复思考，最终找到解决方法，此时收获最大。而，且这也正是学习的乐趣所在。因此，虽然习题后附有答案与提示，也不要急于查看。一个基本单元中的例题与习题的解法基本相同，即当读者学习了例题之后，应可以比较顺利地解习题。

本书由北京工商大学应用数学系沙峯、杨延龄、杨益民编写。因水平有限，谬误难免，请读者批评指正。

在编写过程中我们得到了学校有关部门与中国建材工业出版社的大力支持。在此表示感谢。

作者

2010 年 2 月

目　　录

一　高 等 数 学

二　线性代数

三　概率论与数理统计

一　高等数学

第一章　极限论

一　函数

【例 1.1】　(88110)设函数$f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且$\varphi(x)\geqslant 0$,求$\varphi(x)$及其定义域.

【解题思路】　这是一个复合函数问题.可以设$u=\varphi(x)$,从题目条件分析u和x的关系,找出答案.

【解】　复合函数.

令$u=\varphi(x)$,则$f[\varphi(x)]=f(u)=e^{u^2}$.于是由题设得到$e^{u^2}=1-x$.

解这个方程得到$u=\pm\sqrt{\ln(1-x)}$.又因为$u=\varphi(x)\geqslant 0$,所以舍去负号,得到$u=\sqrt{\ln(1-x)}$.为了使得开方运算有意义,要求$x\leqslant 0$.

于是$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,$(x\leqslant 0)$.

习题

(a)(90103)设函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则函数$f[f(x)]=$________.

(b)(92207)设函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$,则________.

(A)$f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$.

(B)$f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$.

(C)$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$.

(D)$f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$.

二 计算极限

【例 1.2】 (97211)求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【解题思路】 自变量趋于无穷大时的极限,可用换元法,将自变量变成趋于零;也可用有理化的方法,比较最高次项,当次数相等时,极限为最高次项系数的比值.

【解 1】 四则运算与换元法.

换元 $t=-\dfrac{1}{x}$,则当 $x\to-\infty$ 时,$t\to0^+$.

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{4\left(-\dfrac{1}{t}\right)^2-\dfrac{1}{t}-1}-\dfrac{1}{t}+1}{\sqrt{\left(-\dfrac{1}{t}\right)^2+\sin\left(-\dfrac{1}{t}\right)}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{4-t-t^2}-1+t}{\sqrt{1-t^2\sin\dfrac{1}{t}}}=1.$$

【解 2】 有理化.

$$\text{原式}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}\left(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}\right)}=1.$$

习题

(a)(93212)求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$.

(b)(93111)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

【例 1.3】 (00111)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【解题思路】 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$. $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$.

【解】 左右极限.

因为

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

所以,原式 $=1$.

习题

(a)(91205)极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$ ________.

(b)(92106)设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$,则________.

(A) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.　　(B) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$.

(C) $f(x)\to\infty$.　　(D) $f(x)$ 不存在极限也不趋向于 ∞.

【例 1.4】 (95211)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

【解题思路】 等价无穷小代换是求 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限的一个简便而有效的技巧,即使在有洛必达法则与泰勒公式等更加细致的工具之后,等价无穷小代换仍然是非常有价值的技巧.运用等价无穷小代换方法求极限,首先要熟知一些常用的无穷小等价关系,如

$x\to0$ 时,$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,

$a^x-1\sim x\ln a(a>0)$,$(1+x)^k-1\sim kx$,$\sqrt[k]{1+x}-1\sim x/k$ 等.

【解】 等价无穷小代换.

当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,当 $x\to0^+$ 时,$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{x}{2}$,因此,

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}.$$

习题

(a)(96204)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$ ________.

(b)(97101)极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

(c)(06101)极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

【例 1.5】 (09215)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

【解题思路】 在使用洛必达法则求极限的过程中,注意利用无穷小量的等价代换,有理化,变量代换,部分取极限等技巧进行化简.

【解】 洛必达法则,积与商的极限.

当$x\to 0$时,$\sin x\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,$\tan x\sim x$,因此,

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{4x(1+\tan x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan^2 x}{4x}=\frac{1}{4}.$$

习题

(a)(99211)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

(b)(07211)极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$________.

(c)(08315)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【例 1.6】 (99101)极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$________.

【解题思路】 洛必达法则,"$\infty-\infty$"型未定式,一般先通分,在使用洛必达法则求极限的过程中,应注意利用无穷小量的等价代换,有理化,变量代换,部分取极限等技巧进行化简.

【解】 洛必达法则,差的极限.

当$x\to 0$时,$\tan x\sim x$,所以,

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

习题

(a)(87211)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

(b)(94101)求极限 $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

【例 1.7】 (03101)极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ ________.

【解题思路】 1^∞ 型未定式 $\lim f(x)^{g(x)}$ 的极限,

(1)利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,将原极限写成 $\lim f(x)^{g(x)}=\lim(1+f(x)-1)^{g(x)}$ 的形式,其中 $\lim(f(x)-1)=0$.

(2)直接用公式 $\lim f(x)^{g(x)}(1^\infty)=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$,计算 $\lim g(x)\ln f(x)$ 或 $\lim(f(x)-1)g(x)$ 可得极限.

求极限的过程中,注意结合无穷小量的等价代换,有理化,变量代换,部分取极限等技巧进行.

【解 1】 等价无穷小代换.

当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$. 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

所以,$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

【解 2】 幂指函数.

当 $x\to0$ 时,$\ln(1+x^2)\sim x^2$,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,有

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2/2}{x^2}=-1/2.$$

因此,原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$.

习题

(a)(91111)求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

(b)(94213)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$.

(c)(04215)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

三 已知极限

【例 1.8】 (09101)当$x\to 0$时,函数$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小,则________.

(A)$a=1,b=-\frac{1}{6}$.　　(B)$a=1,b=\frac{1}{6}$.

(C)$a=-1,b=-\frac{1}{6}$.　　(D)$a=-1,b=\frac{1}{6}$.

【解题思路】 已知极限求参数常用有理函数极限的结论,等价无穷小,高阶无穷小,洛必达法则,泰勒公式等工具;另外,常用下面的推理

已知$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$,

(1)若$g(x)\to 0$,则$f(x)\to 0$;

(2)若$f(x)\to 0$,且$A\neq 0$,则$g(x)\to 0$.

在做已知极限时,用等价无穷小代换或者泰勒展开是没有问题的.但是如果用洛必达法则,则有一个逻辑问题:函数的比的极限存在,一般不能保证导数的比的极限存在.解决方法是换一个写法:先证明导数的比的极限存在,再用洛必达法则,得到函数的比的极限(已知)与其相等.

【解】 泰勒展开.

将$\sin ax$在$x=0$处展开,得$\sin ax=ax-\frac{1}{3!}(ax)^3+o(x^3)$.代入已知条件,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-ax+\frac{1}{6}(ax)^3+o(x^3)}{-bx^3}=1,$$

当且仅当$a=1$时,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}(x)^3+o(x^3)}{-bx^3}=-\frac{1}{6b}=1,$$

于是,$a=1,b=-\frac{1}{6}$.故选(A).

习题

(a)(00209)若极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则$\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为________.

(A)0.　　(B)6.　　(C)36.　　(D)∞.

(b)(05205)当$x\to 0$时，函数$\alpha(x)=kx^2$与$\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$是等价无穷小，则常数$k=$________.

(c)(06215)试确定常数A,B,C的值，使得$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中$o(x^3)$是当$x\to 0$时比$x^3$高阶的无穷小.

【例1.9】　(07102)(07206)曲线$y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的渐近线的条数为________.

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

【解题思路】　先考虑是否有水平渐近线，若无水平渐近线应进一步考虑是否存在斜渐近线，先通过$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}$求斜率$k$，再通过$\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)$求截距$b$，得斜渐近线$y=kx+b$；而是否存在铅直渐近线，应看函数是否存在无定义点.

【解】　渐近线.

当$x\to-\infty$时，极限$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$，故存在水平渐近线$y=0$.

在$x=0$处，$y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$无定义，且$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$，可见$x=0$为铅直渐近线.

又因为$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{e^x}{1+e^x}\right]=1$，

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln\frac{1+e^x}{e^x}\right]=0$$

所以有斜渐近线$y=x$. 故选(D).

习题

(a)(91106)曲线$y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$________.

(A)没有渐近线.　　(B)仅有水平渐近线.

(C)仅有铅直渐近线.　　(D)既有水平渐近线，又有铅直渐近线.

(b)(94209)曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$的渐近线有________.

(A)1 条.　　(B)2 条.　　(C)3 条.　　(D)4 条.

(c)(05202)曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$的斜渐近线方程为________.

四　判定极限

【例 1.10】 (98206)设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是________.

(A)若 x_n 发散,则 y_n 必发散.

(B)若 x_n 无界,则 y_n 必有界.

(C)若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小.

(D)若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

【解题思路】 可利用运算或举反例排除.

【解 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{\dfrac{1}{x_n}}=0$,若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,故选(D).

【解 2】 若取 $x_n=(-1)^n$,$y_n=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,$x_n$ 发散,但 y_n 收敛.可排除(A).

若取 $x_n=\begin{cases}n, & n\text{ 是偶数}\\0, & n\text{ 是奇数}\end{cases}$,$y_n=\begin{cases}n, & n\text{ 是奇数}\\0, & n\text{ 是偶数}\end{cases}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,但 x_n,y_n 均无界,可排除(B).

若取 $x_n=0$,$y_n=n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,但 x_n 有界,y_n 不是无穷小,可排除(C).

故选(D).

习题

(a)(99209)"对于任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的________.

(A)充分但非必要条件.　　(B)必要但非充分条件.

(C)充分必要条件.　　(D)既非充分也非必要条件.

(b)(03108)(03207)设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有________.

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

【例 1.11】　(93206)当 $x\to0$ 时，函数 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是________.

(A)无穷小量.　　(B)无穷大量.

(C)有界但非无穷小量.　　(D)无界但非无穷大量.

【解题思路】　当 $x\to0$ 时，显然 $\frac{1}{x^2}\to\infty$，但是 $\sin\frac{1}{x}$ 在 -1 和 1 之间不断地摆动，并且不断地重复函数值零. 因此不难排除(A)、(B)、(C)三个选项.

【解】　无穷大量.

令 $x_n=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}(n=1,2,\cdots)$，则当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to0$. $f(x_n)=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\to\infty$.

所以当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 不是无穷小，也不是有界量.

又令 $z_n=\frac{1}{n\pi}(n=1,2,\cdots)$，则当 $n\to\infty$ 时，$z_n\to0$. $f(z_n)=0$. 因此当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 不是无穷大.

于是当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 无界但非无穷大量. 故选(D).

习题

(a)(87207)函数 $f(x)=x\sin x$ ________.

(A)在 $(-\infty,+\infty)$ 有界.　　(B)当 $x\to\infty$ 时为无穷大.

(C)在 $(-\infty,+\infty)$ 无界.　　(D)当 $x\to\infty$ 时有极限.

【例 1.12】　(06116)(06218)设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$

(1)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

(2)计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【解题思路】　判定极限存在的准则有夹逼定理，单调有界收敛定理. 两者是数列收敛的充分条件.

【解】　极限存在准则.

(1)首先，由 $0<x_1<\pi$，可知 $0<x_2=\sin x_1\leqslant1<\pi$. 故