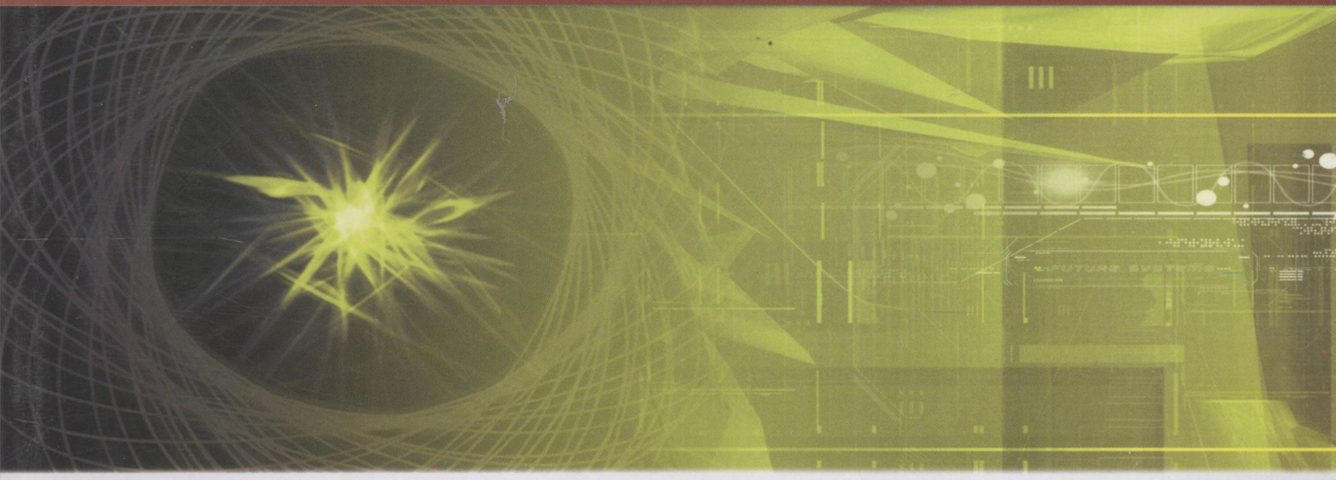

21世纪高等工科教育数学系列课程教材

高等数学 下册

（第3版）

陈庆辉　牟卫华　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪高等工科教育数学系列课程教材

高等数学 下册

（第3版）

陈庆辉　牟卫华　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材为大学工科各专业公共课教材2004年版的修订版(第3版),共4册:高等数学(上、下册)、线性代数与几何、概率论与数理统计。编者根据工科数学教改精神、多年教改课题研究和实践编写,书中融入了许多新的数学思想和方法,尤其是改正、吸收了近年教学过程中发现的问题和好的经验。本书为高等数学·下册,内容包括多元函数微积分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程,书末附有各册习题的参考答案。

本书适合作为普通高校工科各专业高等数学教材,也适合作为大专、函授、夜大、自考教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/陈庆辉,牟卫华主编. —3版.
—北京:中国铁道出版社,2010.1
(21世纪高等工科教育数学系列课程教材)
ISBN 978-7-113-10449-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈…②牟… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第235176号

书　　名: 高等数学·下册(第3版)
作　　者: 陈庆辉　牟卫华　主编

策划编辑: 李小军
责任编辑: 李小军　　　　**编辑部电话:** (010)63560056
封面制作: 李　路

出版发行: 中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街8号　　邮政编码:100054)
印　　刷: 三河市华丰印刷厂
版　　次: 2002年8月第1版　2004年8月第2版　2010年1月第3版
2010年1月第9次印刷
开　　本: 787mm×960mm　1/16　**印张:** 17.25　**字数:** 288千
印　　数: 1~4000册
书　　号: ISBN 978-7-113-10449-8/O·196
定　　价: 26.00元

前　　言

本系列教材是在原铁道部部级课题、河北省“九五”教育学科规划重点课题“面向21世纪高等工科教育数学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”的研究成果基础上，通过几年的教学实践，广泛征求意见，按照教育部关于《工科类本科数学基础课程教学基本要求》改编而成的．本版为第3版．第1、2版在多年的教学实践中受到了广大师生的欢迎和同行的肯定，其总体结构、编写思想和特色、难易程度把握等方面，经受了实践的检验．同时，实践中也发现了需要完善之处．本系列教材包括《高等数学》（上、下册）、《线性代数与几何》、《概率论与数理统计》等4册．

本书是《高等数学・下册》．编写中力求做到：渗透现代数学思想，淡化计算技巧，加强应用能力培养．内容编排上，从实际问题出发—建立数学模型—抽象出数学概念—寻求数学处理方法—解决实际问题．目的是：提高学生对数学的学习兴趣，培养数学建模意识，使学生较好地掌握高等数学方法，提高数学应用能力．

本书在编写过程中，力求突出以下几个特点：

1．突出微积分学的基本思想和基本方法，使学生在学习过程中能够整体把握和了解各部分内容之间的内在联系．例如，把微分学视为对函数的微观（局部）性质的研究，而把积分学概括为对函数的宏观（整体）性质的研究；把定积分作为一元函数积分学的主体，不定积分仅仅作为定积分的辅助工具，这样既突出了定积分与不定积分的联系，又节省了教学时数；多元函数微分学中强调“一阶微分形式不变性”，使得多元函数（尤其是各变量之间具有嵌套关系的隐函数）的偏导与微分的计算问题程式化，大大提高学生的学习效率；在定积分、重积分、曲线积分、曲面积分等积分学的应用中，采用“微元法”思想，使学生更容易理解与掌握．

2．尽可能使分析与代数相结合，相互渗透，建立新的课程体系．我们将空间解析几何部分编入《线性代数与几何》教材．在多元函数微积分学、常微分方程等内容中，充分运用向量、矩阵等代数知识，使表述更简洁．

3．尽可能采用现代数学的思维方式，广泛使用现代数学语言、术语和符号，为学生进一步学习现代数学知识奠定必要的基础．内容阐述上尽量遵循深入浅出，从具体到抽象，从特殊到一般等原则，语言上做到描述准确、通俗流畅，并具有启发性．

4．重视数学应用能力培养，淡化某些计算技巧．本书注重学生对数学概念的理解和应用，在每章末都有一节应用举例，阐述这些数学模型的建立、求解等．

5. 备有内容丰富、层次多样的习题. 为适应不同层次的教学需要，习题部分做了较大改动：删除了一部分B型题中较难或较偏的题目，将B型题、综合练习题中一些题目与A型题合在一起作为全章的练习题，这部分习题是按教材内容的先后顺序编排的，因此个别较难题目也是按内容出现的；另外，将保留的B型题或综合练习题与一些历届考研题合在一起作为全章的综合练习题，这部分内容是为满足那些对高等数学具有极强的征服欲或有考研意向的学生准备的.

书中带有“*”号的内容为选学内容.

本教材面向工科院校，适合作为土木工程、机械工程、电气自动化工程、计算机工程、交通工程、工程管理、经济管理等本科专业的教材或教学参考书，教学中与《线性代数与几何》配套使用.

本系列教材是在石家庄铁道学院领导的关心和支持下，在编委会全体成员的努力和其他老师的帮助下完成的. 在上册的修订中，王永亮、刘宝友对一些内容的编写提出了宝贵的意见和建议；在下册的修订中，孙秋杰、范瑞琴、王雅茹、崔青及陈聚峰也都提出了自己的见解. 在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，难免有错误和不当之处，敬请读者批评、指正.

编　者
2009年6月

目　录

第 4 章

在《高等数学》(上)第 1 章、第 2 章中，我们讨论了一元函数及其极限、连续概念，并作了微分法及其应用研究. 在实际问题中，我们还会大量遇到某一个变量的变化依赖于多个变量的情形，即所谓的多元函数问题，并且仍需要讨论它们的微分法及其应用问题. 这就是本章研究的主要问题.

我们将会看到，多元函数的研究会比一元函数复杂得多，但我们将尽可能地借用一元函数的结果研究它们.

研究过程多以二元函数为例，绝大多数结果可以直接推广到三元及以上函数.

本章主要介绍：

- 多元函数　极限　连续　闭区域上连续函数的性质
- 微分法

  偏导数　高阶偏导数　复合函数的偏导数、全导数

  全微分

  隐函数的偏导数
- 空间曲线的切线及法平面　曲面的切平面及法线
- 方向导数　梯度　方向导数与梯度的关系
- 极值　最大值与最小值　拉格朗日乘数法

多元函数微分学及其应用

柯　西

柯西(Augustin Louis Cauchy,1789—1857)出生于巴黎,他的父亲路易·弗朗索瓦·柯西是法国波旁王朝的官员,在法国动荡的政治漩涡中一直担任公职.由于家庭的原因,柯西本人属于拥护波旁王朝的正统派,是一位虔诚的天主教徒.他在纯数学和应用数学的功力是相当深厚的,很多数学的定理和公式也都以他的名字来称呼,如柯西不等式、柯西积分公式等.在数学写作上,他是被认为在数量上仅次于欧拉的人,他一生一共撰写了 789 篇论文和几本书,其中有些还是经典之作,不过并不是他所有的创作质量都很高,因此他还曾被人批评高产而轻率,这点倒是与数学王子相反,据说,法国科学院“会刊”创刊的时候,由于柯西的作品实在太多,以至于科学院要负担很大的印刷费用,超出科学院的预算,因此,科学院后来规定论文最长的只能有四页,所以,柯西较长的论文只得投稿到其它地方.

柯西在幼年时,他的父亲常带领他到法国参议院内的办公室,并且在那里指导他进行学习,因此他有机会遇到参议员拉普拉斯和拉格朗日两位大数学家.他们对他的才能十分赏识;拉格朗日认为他将来必定会成为大数学家,但建议他的父亲在他学好文科前不要学数学.

柯西去瑟堡时携带了拉格朗日的解析函数论和拉普拉斯的天体力学,后来还陆续收到从巴黎寄出或从当地借得的一些数学书.他在业余时间悉心攻读有关数学各分支方面的书籍,从数论直到天文学方面.根据拉格朗日的建议,他进行了多面体的研究,并于 1811 及 1812 年向科学院提交了两篇论文,其中主要成果是:(1) 证明了凸正多面体只有五种(面数分别是 4,6,8,12,20),星形正多面体只有四种(面数是 12 的三种,面数是 20 的一种);(2) 得到了欧拉关于多面体的顶点、面和棱的个数关系式的另一证明并加以推广;(3) 证明了各面固定的多面体必然是固定的,从此可导出从未证明过的欧几里得的一个定理.

柯西直到逝世前仍不断参加学术活动,不断发表科学论文.临终前,他还与巴黎大主教在说话,他说的最后一句话是:“人总是要死的,但是,他们的功绩永存!”

柯西是一位多产的数学家,他的全集从 1882 年开始出版到 1974 年才出齐最后一卷,总计 28 卷.他的主要贡献如下;

1. 单复变函数.柯西最重要和最有首创性的工作是关于单复变函数论的.

2. 分析基础.柯西在综合工科学校所授分析课程及有关教材给数学界造成了极大的影响.自从牛顿和莱布尼茨发明微积分(即无穷小分析,简称分析)以来,这门学科的理论基础是模糊的.柯西首先成功地建立了极限论.

在柯西的著作中,没有通行的语言,他的说法看来也不够确切,从而有时也有错误,例如由于没有建立一致连续和一致收敛概念而产生的错误.可是关于微积分的原理,他的概念主要是正确的,其清晰程度是前所未有的.例如他关于连续函数及其积分的定义是确切的,他首先准确地证明了泰勒公式,他给出了级数收敛的定义和一些判别法.

3. 常微分方程.柯西在分析方面最大的贡献在常微分方程领域.

§ 4.1　多元函数的基本概念

4.1.1　区域

下面我们给出研究多元函数时常用的几个重要概念.

1　邻域

在 xOy 平面中，与点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 $\delta(\delta > 0)$ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为以点 P_0 为中心，δ 为半径的邻域，简称**点 P_0 的 δ 邻域**，记为 $U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta) = \left\{P \,\middle|\, |PP_0| < \delta\right\}.$$

或

$$U(P_0, \delta) = \left\{(x,y) \,\middle|\, \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}.$$

几何上，$U(P_0, \delta)$ 是以 P_0 为中心，δ 为半径的圆内部点的全体(如图 4.1).

在上面定义的邻域中去掉中心点 P_0 后，称为**点 P_0 的 δ 去心邻域**，记为 $\mathring{U}(P_0, \delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0, \delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}.$$

注：在不需要强调邻域半径的场合，邻域半径 δ 可以省略不写.

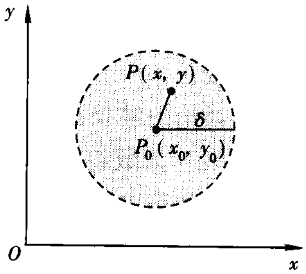

图　4.1

2　区域

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点. 若存在点 P 的某一邻域 $U(P)$ 使 $U(P) \subset E$，则称 P 为 E 的**内点**；若点集 E 的点都是内点，则称 E 为**开集**；若点 P 的任何邻域内都既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的**边界点**；E 的边界点的全体称为 E 的**边界**；开集连同它的边界称为**闭集**.

设 E 是开集. 若 D 内任何两点都可以用完全含在 E 内的折线连接起来，则称开集 E 是**连通**的.

连通的开集称为**开区域**或**区域**. 开区域连同它的边界称为**闭区域**.

例如，设 $E = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$，则 E 内的每一点都是内点，从而 E 是开集. 而原点及圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点都是 E 的边界点，它们共同构成 E 的边界. 另外，E 是连通的，所以 E 是(开) 区域. 由几何特点可知，E 是一个特殊的环形域.

3　聚点

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点. 若点 P 的任一邻域内总有属于 E 的无限多个点，则称 P 是 E 的**聚点**.

例如，上面所说的环形域 E 中的每一点都是 E 的聚点，且不属于 E 的原点及圆周上的点(即所有边界点)也都是 E 的聚点.

又如，数列 $0.9, 0.99, 0.999, \cdots$ 有唯一聚点 1；数列 $1, -1, 1, -1, \cdots$ 有两个聚点 1 和 -1；二维数列 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{2^2}, 1\right)$, $\cdots$ 有聚点 $(0, 1)$.

4　有界集　无界集

对于点集 E，若存在 $M>0$，使一切点 $P\in E$ 与某一定点 P_0 间的距离 $|P_0P|$ 不超过 M，即

$$|P_0P|\leqslant M\ (P\in E),$$

则称 E 为**有界点集**，否则称 E 为**无界点集**.

几何上，有界点集可以完全含在某一圆形区域内，而无界点集则不能.

如 $\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2<1\}$ 是有界(开)区域，而 $\{(x,y)\,|\,x+y\geqslant 0\}$ 是无界闭区域.

以上讨论的结果都可以直接推广到 3 元数组 (x,y,z) 构成的 3 维空间中. 通常，将 $n(n\in \mathbf{Z}^+)$ 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为 n **维空间**，并记为 $\mathbf{R}^n$. 当 $n>3$ 时，以上结果也都可以直接推广到 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中.

4.1.2　多元函数的定义

定义 4.1　设 D 是平面上一个非空点集. 如果对于每一个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定的法则总有确定的实数值和它对应，则称 z 是变量 x，y 的**二元函数**(或称点 P 的函数)，记为

$$z=f(x,y)\quad (\text{或 } z=f(P),\ z=z(x,y)\ \text{等}).$$

称点集 D 为该函数的**定义域**，x,y 为**自变量**，z 为**因变量**. 称数集

$$V=\{z\,|\,z=f(x,y)\ (x,y)\in D\}$$

为函数 $f(x,y)$ 的**值域**.

设函数 $z=f(x,y)\ (x,y)\in D$，称点集

$$\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y)\ (x,y)\in D\}$$

为函数 $z=f(x,y)$ 的**图形**(或**图象**). 一般来说，二元函数的图形是空间直角坐标系

$Oxyz$ 中的一张曲面．例如，函数 $z=-ye^{-x^2-y^2}$ 与 $z=xy$ 的图形分别是如图 4.2 和图 4.3（马鞍面）所示的曲面．

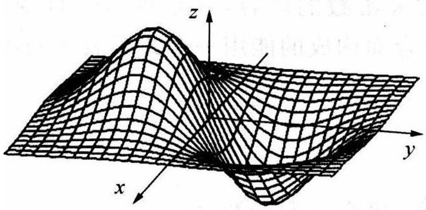

图　4.2

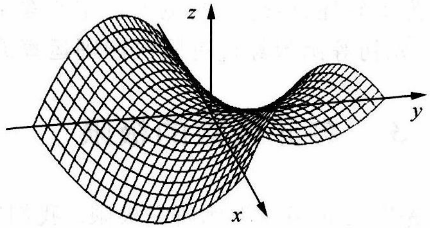

图　4.3

类似地定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，也可简记为 $u=f(P)$．

一般地，将多于一个自变量的函数统称为**多元函数**．多元函数在实际问题中是大量存在着的．例如，圆柱体的体积 V 依赖于底半径 R 和高 H，即 $V=\pi R^2H$，这是一个二元函数；又如，空间中每一点在某一时刻的温度 T 由其位置坐标 x,y,z 和时间 t 所确定，即 $T=f(x,y,z,t)$，这是一个四元函数．

多元函数定义域的确定要比一元函数复杂些，但确定方法类似．对于用表达式给出的函数，其定义域指的是使表达式有意义的点的全体，即**自然定义域**；对于有实际意义的函数，按使实际问题有意义来确定其定义域，如在上面的两个例题中，V 的定义域是 $R>0,H>0$，而 T 的定义域是 $-\infty<x,y,z<+\infty,t\geqslant 0$．

例 4.1　函数 $z=x^2+y^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}^2$，其图形是以 z 轴为对称轴的旋转抛物面．

例 4.2　函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的定义域为 D：$x^2+y^2\leqslant a^2$，显然当 $a\neq 0$ 时，D 是 xOy 平面上的一个圆形闭区域．函数的图形是上半球面．

例 4.3　函数 $z=\sqrt{y-x^2}$ 的定义域为 D：$y\geqslant x^2$，即 D 是 xOy 平面上以 y 轴为对称轴的抛物线及其上方点全体的集合（如图 4.4）．

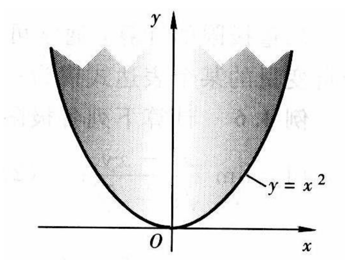

图　4.4

例 4.4　函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 的定义域为 D：$y\neq\pm x$，即 D 是 xOy 平面上除去直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 外的部分．

例 4.5（多值函数）　由球心在原点，半径为 a 的球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 确定了

$$z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

称为**多值函数**，由它确定了两个单值二元函数

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\quad z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

它们的定义域均为圆形闭区域 D：$x^2+y^2\leqslant a^2$. 图形分别对应空间直角坐标系中的上半球面和下半球面.

为了叙述方便，我们也可以定义**多元初等函数**的内容，它是指多个自变量与常数、一元初等函数经过有限次四则运算或复合而构成的能用一个式子表示的函数.

4.1.3 多元函数的极限

先以二元函数为例研究极限. 我们知道，研究一元函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处的极限，考察的是当 x 在 x_0 的某去心邻域内取值时，函数值的变化情况. 同样的，研究二元函数 $z=f(x,y)$ 在一点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的极限，考察的是当点 $P(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某去心邻域内变化时，函数值的变化情况.

定义 4.2 如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对所有满足不等式

$$0<|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的点 $P(x,y)$，都成立

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$（或 $P\to P_0$）时的二重极限为 A，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A\quad\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A\right),$$

或

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A\quad(f(P)\to A\ (P\to P_0)).$$

当 $P_0(x_0,y_0)$ 不是定义域 D 的内点时，极限定义按 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}}f(x,y)=A$ 理解.

二重极限有着与一元函数极限相似的性质运算法则，这里不再一一列举.

二重极限的计算，通常可以利用一元函数求极限的方法实现，有时还需要将两个自变量的某个表达式视为一元变量加以处理.

例 4.6 计算下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}\dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}$； (3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

解 (1)
$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}x(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0;$$

(2) 因为当 $x\to 0$, $y\to 0$ 时，$\ln(1+x^2y^2)\sim x^2y^2$，且 $0\leqslant\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy\frac{xy}{x^2+y^2}=0;$$

(3) 令 $u = x^2 + y^2$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{u\to 0^+} u\ln u = \lim_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = 0.$$

从几何上看，二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的极限存在，需要 $P_0(x_0,y_0)$ 的某去心邻域内的点 $P(x,y)$ 以任何方式无限趋近 P_0 时，函数值无限趋近于一个定常数，即点 P 沿任何路径无限趋于 P_0 时函数的极限存在且相等. 显然，我们不能用这种方式求二元函数的极限，但却可以据此给出一个判断极限不存在的办法.

极限不存在的两路径判别法：

如果函数 $f(x,y)$ 在沿 $P\to P_0$ 两个不同路径上的极限存在情况不同，则函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处的二重极限不存在.

例 4.7（两路径判别法） 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{当 } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{当 } x^2+y^2=0\end{cases},$$

在点(0,0)处极限的存在性.

解 如图 4.5 所示，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 沿不同路径的极限不是完全相同的，因此，可以用两路径判别法说明函数在点(0,0)处的极限不存在.

因 $f(x,y)$ 在(0,0)处沿 $y=0$（即 x 轴）的极限

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0,$$

又因 $f(x,y)$ 在(0,0)处沿 $y=x$ 的极限

$$\lim_{\substack{y=x\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2},$$

因此，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

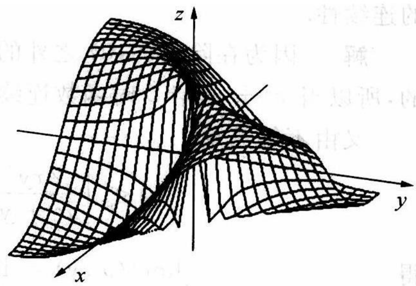

图 4.5

显然，上面例题中选择路径的方法不是唯一的. 本例题也可利用沿过原点的直线族上，函数的极限随直线的斜率变化来说明二重极限的不存在. 即：因为

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \frac{k}{1+k^2}\ (k\in\mathbf{R}),$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

类似定义三元及三元以上函数的极限.