立信财经丛书

财会数学

蔡芷 编写

财会数学

蔡 芷 编写

立信会计图书用品社

封面设计：范一辛

立信财经丛书

财　会　数　学

蔡　芷　编写

立信会计图书用品社出版发行

（上 海 中 山 西 路 2230 号）

全国各地新华书店经销

立信梅李印刷联营厂印刷

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 8.5　插页 2　字数 199,000

1982 年 12 月第 1 版

1987 年 8 月新一版　1987 年 8 月第 7 次印刷

ISBN 7-5429-0016-1 / F·0016

书号：4488·0016　　定价：1.90 元

编　写　说　明

为了提高财经管理工作的水平，实现管理工作现代化，需要培养管理人材，掌握、运用科学方法．数学是科学管理的主要方法和有效工具．本书介绍普通的数学内容及其在财经工作中的通常应用．

本书包括初等代数、线性代数二章．全书注意数学的系统性，循序渐进．可以作为财经中等专业学校教学用书．同时也考虑到应用性，介绍了在资金、成本、利润、费用、生产、销售、运输、储存等各个方面的应用，联系实际，可供具有中学程度的财经工作者自学参考之用．

本书的着重点在于普及与应用，所以取材浅显平易，叙述通俗明白，介绍简捷方法和列举例题都比较多．书中所用的数学公式只作简单的推导与说明．对于应用部分如“利息与年金”、“投入产出分析”等另列专节作较详细的介绍．书中每节之后附有习题与答案，供读者练习参考之用．

由于编者学识疏浅，书中的错误与缺点在所难免，希望得到读者的批评和指正．

编　　者

1981年12月

目　　录

第一章　初等代数

初等代数是初等数学中基本部分，也是学习数学的基础知识，它的内容较为丰富，应用比较广泛．本章只选取主要内容，一方面作为复习，一方面介绍一些应用．

第一节　和　式

数学计算中最简单的方法是加法．当有若干个数字相加时，为了使文字表达简洁，数学运算方便，常采用和式记号“$\sum$”(希腊字母)．例如：

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n \quad \text{记作} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i$$

和式“$\sum$”只是一种表达记号，它的计算方法仍是加法．在以后的有关章节中常常使用和式记号，在经济分析中也常采用和式记号．

1.1　写成和式

和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 可以分成三部分：和式记号 $\sum$，变量 x_i，变量的上下标 1，n．其中 i 称做变量的足标，表示变量的序号，采用非负整数．下标可以从 0 开始，也可从其它自然数开始．

例 1　把 4+5+6+7+8+9 写成和式．

解

$$4+5+6+7+8+9=\sum_{i=4}^{9} i$$

也可写成 $\sum\limits_{i=0}^{5}(4+i)$，或 $\sum\limits_{i=1}^{6}(3+i)$．

例 2　把自然数中 100 以内的奇数之和，写成和式．

解 $$1+3+5+\cdots+99=\sum_{i=0}^{49}(2i+1)$$

也可写成 $\sum_{i=1}^{50}(2i-1)$.

和式的项数等于它的上标数与下标数之差再加 1.

本例的项数是

$$49-0+1=50$$

或 $$50-1+1=50$$

例 3 把 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$ 写成和式.

解

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{128}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^7}=\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{2^i}\end{aligned}$$

1.2 展开和式

和式的展开是将变量按序号写成加法形式，必要时求出和式的数值.

例 4 把 $\sum_{i=1}^{10}(i+b)$ 展开（b 是常量）.

解

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}(i+b)&=(1+b)+(2+b)+\cdots+(10+b)\\&=(1+2+\cdots+10)+10b=55+10b\end{aligned}$$

例 5 把 $\sum_{n=1}^{5}\frac{2^n}{n}$ 展开，并求值.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{5}\frac{2^n}{n}&=\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}+\frac{2^5}{5}\\&=2+2+\frac{8}{3}+4+\frac{32}{5}=17\frac{1}{15}\end{aligned}$$

1.3 双重和式

二个和式记号连写成 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$ 的形式叫做双重和式. 它表示

变量 a_{ij} 先按右边和式 $\sum\limits_{j=1}^{n}$ 的足标 j，从 1 到 n 求和，然后再按左边和式 $\sum\limits_{i=1}^{m}$ 的足标 i，从 1 到 m 求和。

例 6 把 $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{2}a_{ij}$ 展开。

解 先按 j 展开，i 不变。

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}=\sum_{i=1}^{3}(a_{i1}+a_{i2})$$

再按 i 展开：

$$\sum_{i=1}^{3}(a_{i1}+a_{i2})=a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{12}+a_{22}+a_{32}$$

所以
$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}=a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{12}+a_{22}+a_{32}$$

例 7 把 $a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{25}$ 写成和式。

解
$$\begin{aligned}&a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{25}\\&=\sum_{j=2}^{5}a_{1j}+\sum_{j=2}^{5}a_{2j}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{5}a_{ij}\end{aligned}$$

1.4 和式的性质

(1)
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$$

证

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\end{aligned}$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+c)=\sum_{i=1}^{n}a_i+nc \quad (c\text{ 是常数})$$

证

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+c)&=(a_1+c)+(a_2+c)+\cdots+(a_n+c)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+nc=\sum_{i=1}^{n}a_i+nc\end{aligned}$$

(3) $$\sum_{i=1}^{n} c = nc \quad (c\text{ 是常数})$$

证 由性质(1)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+c) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} c$$

由性质(2)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+c) = \sum_{i=1}^{n} a_i + nc$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

(4) $$\sum_{i=1}^{n} k a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (k\text{ 是常数})$$

证
$$\sum_{i=1}^{n} k a_i = k a_1 + k a_2 + \cdots + k a_n$$
$$= k(a_1+a_2+\cdots+a_n) = k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

(5) $$\sum_{i=1}^{n}(k a_i + c) = k\sum_{i=1}^{n} a_i + nc \quad (k,\ c\text{ 是常数})$$

证 $$\sum_{i=1}^{n}(k a_i+c) = \sum_{i=1}^{n} k a_i + \sum_{i=1}^{n} c = k\sum_{i=1}^{n} a_i + nc$$

这一条性质包括了性质(2)、(3)、(4).

(6) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

证

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})$$
$$= a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1}+a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn}$$

又

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj})$$
$$= a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}$$

所以
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$

这条性质说明双重和式的求和顺序可以交换.

(7)
$$\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_i b_j$$

证 等式的左端可以看作二个和式的乘积,先分别展开,再求其积. 即

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j=\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_m)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

等式的左端也可以看作双重和式,先按 j 展开,再按 i 展开. 即

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}a_i(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$=(b_1+b_2+\cdots+b_n)\sum_{i=1}^{m}a_i$$
$$=(b_1+b_2+\cdots+b_n)(a_1+a_2+\cdots+a_m)$$

等式右端按双重和式的定义展开:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_i b_j=\sum_{i=1}^{m}(a_ib_1+a_ib_2+\cdots+a_i b_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}a_i(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$=a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a_2(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$+\cdots+a_m(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$=(b_1+b_2+\cdots+b_n)(a_1+a_2+\cdots+a_m)$$

所以
$$\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j$$

这条性质说明和式变量可以向内移.

例 8 求 $\sum\limits_{n=1}^{10}(3n+4)$ 的值.

解 根据性质

$$\sum_{i=1}^{10}(3n+4)=3\sum_{n=1}^{10}n+10\times4=3\times(1+2+\cdots+10)+40$$

$$=3\times55+40=205$$

例 9 展开 $\sum\limits_{n=1}^{5}(n+n^2)k$.

解 根据性质

$$\sum_{n=1}^{5}(n+n^2)k=k\sum_{n=1}^{5}(n+n^2)$$

$$=k\sum_{n=1}^{5}n+k\sum_{n=1}^{5}n^2$$

$$=k(1+2+\cdots+5)+k(1+4+\cdots+25)$$

$$=15k+55k=70k$$

1.5 和式的运算

(1) 和式之和

$$\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)$$

(2) 和式之积

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\times\sum_{i=1}^{n}b_i=(a_1+a_2+\cdots+a_m)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

(3) 和式之商

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

(4) 和式之乘方

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^k=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^k$$

(5) 积之和式

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

(6) 商之和式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}$$

(7) 两项式积之和式

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b)(c_i+d)=\sum_{i=1}^{n}(a_i c_i+bc_i+d a_i+bd)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i c_i+b\sum_{i=1}^{n} c_i+d\sum_{i=1}^{n}a_i+n bd$$

(8) 两项式平方之和式

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b)^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+2b a_i+b^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i^2+2b\sum_{i=1}^{n} a_i+nb^2$$

例 10 求 $\sum\limits_{n=1}^{5}(n+3)(2n+1)$的值.

解

$$\sum_{n=1}^{5}(n+3)(2n+1)=\sum_{n=1}^{5}(2n^2+7n+3)$$

$$=2\sum_{n=1}^{5}n^2+7\sum_{n=1}^{5}n+5\times 3$$

$$=2\times(1+4+\cdots+25)+7$$

$$\times(1+2+\cdots+5)+15$$

$$=2\times 55+7\times 15+15=230$$

例 11 求 $\sum\limits_{n=1}^{5}(n+3)\times\sum\limits_{n=1}^{5}(2n+1)$.

解

$$\sum_{n=1}^{5}(n+3)\times\sum_{n=1}^{5}(2n+1)$$

$$=(4+5+\cdots+8)\times(3+5+\cdots+11)=30\times 35=1050$$

1.6 应用

(一)和式能使表达简洁

例 12 全车间有工人100名，每人的日产量分别为：x_1、x_2、…、x_{100}，写出全车间的日产量.

解 设全车间的日产量为X，则

$$X=x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{i=1}^{100}x_i$$

例 13 某商店有三个柜组，它们各季度的销售额分别为 a_{ij}(这里 a 代表销售额；$i=1, 2, 3$, 表示柜组；$j=1, 2, 3, 4$, 表示季度)写出每个柜组的年销售额，每个季度商店的销售额，商店的全年销售额。

解 a_{ij} 表示第 i 组第 j 季度的销售额。例如 a_{23} 表示第 2 组第 3 季度的销售额。

第一组全年销售额：

$$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=\sum_{j=1}^{4}a_{1j}$$

第二组全年销售额：

$$a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}=\sum_{j=1}^{4}a_{2j}$$

第三组全年销售额：

$$a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}=\sum_{j=1}^{4}a_{3j}$$

第一季度全店销售额：

$$a_{11}+a_{21}+a_{31}=\sum_{i=1}^{3}a_{i1}$$

第二季度全店销售额：

$$a_{12}+a_{22}+a_{32}=\sum_{i=1}^{3}a_{i2}$$

第三季度全店销售额：

$$a_{13}+a_{23}+a_{33}=\sum_{i=1}^{3}a_{i3}$$

第四季度全店销售额：

$$a_{14}+a_{24}+a_{34}=\sum_{i=1}^{3}a_{i4}$$

商店全年销售额为各组之和：

$$\sum_{j=1}^{4}a_{1j}+\sum_{j=1}^{4}a_{2j}+\sum_{j=1}^{4}a_{3j}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}$$