上海市教育委员会高校重点教材建设项目

# 高等数学习题集

（第三版）

上海理工大学理学院
《高等数学习题集》编写组 编

GAODENG SHUXUE XITIJI

上海财经大学出版社

上海市教育委员会高校重点教材建设项目

# 高等数学习题集

（第三版）

上海理工大学理学院
《高等数学习题集》编写组　编

上海财经大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学习题集(第三版)/上海理工大学理学院《高等数学习题集》编写组编．—上海：上海财经大学出版社，2006.9
ISBN 7-81049-776-6/O·15

Ⅰ.高…　Ⅱ.上…　Ⅲ.高等数学-高等学校-习题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 082176 号

GAODENG SHUXUE XITIJI
**高等数学习题集**
(第三版)

上海理工大学理学院《高等数学习题集》编写组　编

责任编辑　袁　敏　　封面设计　周卫民

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙　邮编 200434)
网　　址：http://www.sufep.com
电子邮箱：webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海惠顿实业公司印刷部印刷装订
2006 年 9 月第 3 版　2006 年 9 月第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16　19.5 印张　499 千字
印数：14 800—19 000　定价：23.80 元

# 第三版前言

《高等数学习题集》(第三版)是在《高等数学习题集》(修订版)的基础上修订的.《高等数学习题集》从 2000 年使用至今,深受广大师生的喜爱,这既是对我们工作的肯定和鼓励,也是一种鞭策.

《高等数学习题集》(第三版)在保持原习题集特色和风格的基础上,增减和修改了部分习题,加强了相关内容的基本概念、基本理论、基本技能和技巧的训练,每个章节的习题由易渐难、循序渐进、更有坡度,从题型到内容也更趋合理与完善.本习题集是参照同济大学应用数学系编写的《高等数学》(第五版)内容次序编排的,在能力提高题部分我们增加了一些历年考研题,供学有余力的学生选做.多年的使用实践表明,本习题集是教与学的纽带,是稳步提高教学质量的好帮手.

本习题集的修订工作是在教研室集体讨论的基础上进行的,参加的教师有:

(按姓氏笔画排列)

王美娟　叶亚盛　华志勇　刘　凌　苏文悌

李　英　李宝庆　张　菁　苟列红　施月萍

查富宝　贾　高　贾　梅　黄次正　蔡康盛

我们的修订工作始终得到了校、院各级领导的大力支持,我校数学教研室的许多教师在使用后提出了不少宝贵的意见和有价值的建议,在此我们一并表示诚挚的谢意.

限于我们的学识水平,错误和不足之处在所难免,敬请广大专家、同行、读者对本书中的错误及不足之处不吝指教为感.

《高等数学习题集》编写组

2006 年 8 月

# 目　录

# 第一章　函数与极限

## 习题1－1　映射与函数

1. 设集合 $A=(-\infty,0]\cup(5,10]$，$B=(-1,1]\cup(8,+\infty)$，试写出 $A\cup B, A\cap B, A\setminus B, B\setminus A$.

2. 填空题：

(1)函数 $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}$ 的定义域为＿＿＿＿＿＿＿＿.

(2)函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数还是偶函数？＿＿＿＿函数.

(3)函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为＿＿＿＿＿＿，而分段函数

$$y=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$$

的反函数为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

(4)设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$F(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$G(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，则 $F(x)$、$G(x)$ 中为偶函数的是＿＿＿＿＿；为奇函数的是＿＿＿＿＿. $f(x)$ 与 $F(x)$、$G(x)$ 的关系式是＿＿＿＿＿＿＿＿.

(5)函数 $y=\arcsin(x-3)$ 的定义域为＿＿＿＿＿＿＿＿，而 $y=2\tan\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

(6)函数 $y=e^{\sin x}$ 是由函数＿＿＿＿＿＿和＿＿＿＿＿＿＿复合而成，函数 $y=\arctan\sqrt{1+x^2}$ 是由函数＿＿＿＿＿、＿＿＿＿＿和＿＿＿＿＿复合而成.

(7)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，则函数 $f[f(x)]=$＿＿＿＿＿＿，其定义域为＿＿＿＿＿＿.

(8)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，则函数 $f(3x+2)$ 的定义域为＿＿＿＿＿；函数 $f(x^2+1)$ 的定义域为＿＿＿＿＿；而函数 $f(x+1)+f(x-1)$ 的定义域为＿＿＿＿＿＿＿＿.

(9)设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

# 第一章　函数与极限

## 习题1—1　映射与函数

1. 设集合 $A=(-\infty,0]\cup(5,10]$，$B=(-1,1]\cup(8,+\infty)$，试写出 $A\cup B,A\cap B,A\setminus B,B\setminus A$.

2. 填空题：

(1)函数 $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}$ 的定义域为________.

(2)函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数还是偶函数？______函数.

(3)函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为________，

而分段函数

$$y=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$$

的反函数为________.

(4)设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$F(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$G(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，则 $F(x)$、$G(x)$ 中为偶函数的是________；为奇函数的是________. $f(x)$ 与 $F(x)$、$G(x)$ 的关系式是________.

(5)函数 $y=\arcsin(x-3)$ 的定义域为________，而 $y=2\tan\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域为________.

(6)函数 $y=e^{\sin x}$ 是由函数________和________复合而成，函数 $y=\arctan\sqrt{1+x^2}$ 是由函数________、________和________复合而成.

(7)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，则函数 $f[f(x)]=$________，其定义域为________.

(8)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，则函数 $f(3x+2)$ 的定义域为________；函数 $f(x^2+1)$ 的定义域为________；而函数 $f(x+1)+f(x-1)$ 的定义域为________.

(9)设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$________.

7. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$,

$$g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0\\ e^{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$,求 $f[g(x)]$.

8. 设常数 $c\neq 0$,对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+c)=-f(x)$,证明:$f(x)$ 是周期函数.

9. 设函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，试求 $f\{f[f(x)]\}$.

10. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元，厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购一台则每台售价就降低 1 分钱，最低价为每台 75 元.

(1)将每台实际售价 $p$ 表示为订购量 $x$ 的函数.

(2)将厂方所获利润 $P$ 表示为订购量 $x$ 的函数.

(3)某商行订购 1 000 台收音机，厂方可获多少利润?

## 习题 1—2　数列的极限

1. 观察下列数列的极限，将极限值填在空格内.

(1) $x_n=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$，极限为＿＿＿＿＿＿.

(2) $x_n=3^{\frac{1}{n}}$，极限为＿＿＿＿＿＿.

(3) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2^n}$，极限为＿＿＿＿＿＿.

(4) $a_n=(-1)^n\mathrm{e}^{\ n}$，极限为＿＿＿＿＿＿.

2. 利用数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n-1}=\dfrac{3}{2}$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，并举例说明其逆命题未必成立.

### 习题 1—3　函数的极限

1. 利用函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-6x+5}{x-5}=4$.

(2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2+3}=3$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ 0, & x=0\\ 1+x^2, & x<0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}a-x, & 0\leqslant x<1\\ 2a+x, & 1\leqslant x\leqslant2\end{cases}$，问 $a$ 取何值时，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在.

## 习题 1－4　无穷小与无穷大

1. 下列极限是否存在？若存在，求出极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}$.

2. 根据定义证明：$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

3. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否有界？此函数当 $x\to+\infty$ 时是否为无穷大？为什么？

4. 求下列函数的水平渐近线和垂直渐近线：

(1) $y=e^x+2$.

(2) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\\ \tan x, & x\leqslant 0\end{cases}$.

5. 根据函数极限或无穷大定义，填写下表：

| | $f(x)\to A$ | $f(x)\to\infty$ | $f(x)\to+\infty$ | $f(x)\to-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x\to x_0$ | 任给 $\varepsilon>0$，<br>总存在 $\delta>0$，<br>当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，<br>有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$. | | | |
| $x\to x_0^+$ | | | | |
| $x\to x_0^-$ | | | | |
| $x\to\infty$ | | | 任给 $M>0$，<br>总存在 $X>0$，<br>当 $\lvert x\rvert>X$ 时，<br>有 $f(x)>M$. | |
| $x\to+\infty$ | | | | |
| $x\to-\infty$ | | | | |

## 习题 1—5　极限运算法则

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n+1}{(n+2)^3}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+1}-3^{n+1}}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-1}{x^n+1}$,　$x>0$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{n^2+3}\cdot\sin(n!)$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^{10}(2x-5)^{20}}{(6x+1)^{30}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2-7x+10)$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

## 习题 1－6　极限存在准则　两个重要极限

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{1+x^2}{2^n}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.