



中央电大数学组



# 高等数学学习题集

中央广播电视大学出版社

# 高等数学习题集

中央广播电视大学数学组 编

中央广播电视大学出版社

# 高等数学题集

## 高等数学习题集

中央电大数学组 编

\*

中央广播电视大学出版社出版  
新华书店北京发行所发行  
重庆新华印刷厂印装

\*

开本787×1092 1/32 印张17 千字353  
1983年10月第1版 1984年4月第1次印刷  
印数1—280,000

书号13300·5 定价1.50元

中央电大出版社

## 编者说明

本习题集根据《高等数学讲义》(上、下册)(中央广播电视大学出版社1984年出版)的教学内容而配备的。可供中央广播电视大学以及业余职工大学学生使用,也可供普通工科院校学生及教师参考使用。

全书分习题、答案和附录三部分。习题内容包括函数、极限、连续、一元微积分、矢量代数与空间解析几何、多元微积分、场论、级数和微分方程等,共有习题2511个。

附录部分包括初等数学(代数、三角、几何)和高等数学中的一些基本公式及积分表,还有部分曲线图形,可供学习时参考。

在编写过程中,北京大学朱德蕙对本书编选的习题进行了审阅,提出了宝贵的意见,在此表示衷心的感谢。

1983年10月 北京

编者: 北京人民教育出版社

责任编辑: 李淑华

封面设计: 李淑华

北京人民教育出版社

地址: 北京沙滩后街55号

电话: 2510458

北京人民教育出版社

# 目 录

## 习 题

第一章 函数及其图形 .....	1
预备知识 .....	1
求函数值 .....	3
函数定义域 .....	5
列函数表达式 .....	7
函数的初等性质 .....	12
函数的图形表示 .....	15
反函数及其图形 .....	18
复合函数 .....	19
双曲函数 .....	21
第二章 极限与连续性 .....	22
序列的极限 .....	22
函数的极限 .....	23
单侧极限 .....	24
无穷大与无穷小 .....	25
极限的求法 .....	26
无穷小的比较 .....	31
杂题 .....	32
极限存在准则 .....	36
函数的连续性 .....	37
第三章 导数与微分 .....	42
导数概念 .....	42
运用四则运算法则求导 .....	44
运用反函数及复合函数求导法则求导 .....	46
隐函数求导 .....	53

用参变量表示的函数求导 .....	54
高阶导数 .....	55
导数的应用 .....	57
微分及其应用 .....	60
<b>第四章 中值定理</b> .....	65
中值定理 .....	65
洛必达法则 .....	68
泰勒公式 .....	72
<b>第五章 导数的应用</b> .....	76
函数的单调性、极值、最值 .....	76
曲线的凹凸性和拐点、渐近线 .....	81
函数作图 .....	85
平面曲线的曲率 .....	87
极值应用题 .....	88
<b>第六章 不定积分</b> .....	95
概念题 .....	95
简单不定积分 .....	95
换元积分法 .....	97
分部积分法 .....	103
分式有理式的积分 .....	106
三角函数有理式的积分 .....	108
简单代数无理式的积分 .....	109
杂题 .....	111
<b>第七章 定积分</b> .....	115
基本概念题 .....	115
基本性质题 .....	116
定积分计算 .....	118
换元积分法 .....	122
分部积分法 .....	125
近似公式 .....	127

广义积分 .....	128
杂题 .....	133
<b>第八章 定积分的应用</b> .....	137
几何应用 .....	137
物理应用 .....	145
<b>第九章 矢量代数与空间解析几何</b> .....	150
空间点的直角坐标 .....	150
矢量代数初步 .....	151
曲面方程 .....	159
平面 .....	161
空间直线 .....	169
二次曲面 .....	178
<b>第十章 多元函数微分法及其应用</b> .....	183
多元函数 .....	183
一阶偏导数 .....	186
全微分及其应用 .....	189
复合函数微分法 .....	192
高阶偏导数 .....	195
隐函数的微分法 .....	198
空间曲线的切线及法平面 .....	202
曲面的切平面及法线 .....	204
多元函数的极值 .....	205
泰勒公式 .....	208
方向导数 .....	208
<b>第十一章 重积分</b> .....	210
二重积分 .....	210
三重积分 .....	216
重积分的应用 .....	220
<b>第十二章 曲线积分与曲面积分</b> .....	224
对弧长的曲线积分 .....	224

对坐标的曲线积分 .....	226
与路径无关的曲线积分 .....	229
格林公式 .....	231
曲线积分的应用 .....	233
对面积的曲面积分 .....	236
对坐标的曲面积分 .....	237
奥-高公式 .....	240
曲面积分的应用 .....	242
斯托克斯公式 .....	244
<b>第十三章 场论初步</b> .....	246
数量场与矢量场 .....	246
梯度 .....	247
散度 .....	250
环量与旋度 .....	251
有势场、管形场与调和场 .....	253
杂题 .....	255
<b>第十四章 无穷级数</b> .....	257
数项级数 .....	257
函数项级数 .....	266
富里叶级数 .....	273
<b>第十五章 微分方程</b> .....	278
基本概念 .....	278
可分离变量的微分方程 .....	281
齐次方程 .....	284
一阶线性方程 .....	286
全微分方程 .....	289
杂题 .....	290
高阶可降阶的微分方程 .....	294
常系数线性微分方程 .....	296



## 答案或提示

第一章 .....	304
第二章 .....	317
第三章 .....	328
第四章 .....	347
第五章 .....	353
第六章 .....	364
第七章 .....	381
第八章 .....	395
第九章 .....	406
第十章 .....	424
第十一章 .....	442
第十二章 .....	454
第十三章 .....	463
第十四章 .....	467
第十五章 .....	478
附 录 .....	498

# 第一章 函数及其图形

## 预备知识

1.1 对照写出等价的不等式与区间:

如 (1)  $|x| < 3 \iff 2^\circ -3 < x < 3$

(1)  $|x| < 3$        $1^\circ 4 < x < 6$

(2)  $|x-1| < 3$        $2^\circ -3 < x < 3$

(3)  $|3-2x| < 1$        $3^\circ x > 3$  或  $x < -1$

(4)  $|1+2x| \leq 1$        $4^\circ x > 2$

(5)  $|x-1| > 2$        $5^\circ -2 < x < 4$

(6)  $|x+2| \geq 5$        $6^\circ -\sqrt{3} \leq x \leq -1$  或  $1 \leq x \leq \sqrt{3}$

(7)  $|5-x^{-1}| < 1$        $7^\circ 1 < x < 2$

(8)  $|x-5| < |x+1|$        $8^\circ x \leq -7$  或  $x \geq 3$

(9)  $|x^2-2| \leq 1$        $9^\circ \frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$

(10)  $x < x^2 - 12 < 4x$        $10^\circ -1 \leq x \leq 0$

1.2 试讨论下述命题的真伪, 并申明理由:

(1)  $x < 5$  就是  $|x| < 5$

(2)  $|x-5| < 2$  就是  $3 < x < 7$

(3)  $|1+3x| \leq 1$  即  $x \geq -\frac{2}{3}$

(4) 不存在实数  $x$ , 使得  $|x-1| = |x-2|$

1.3 求下列不等式的公共部分,并在数轴上表示出来。

(1)  $-11 \leq x < 8$  与  $-6 \leq x < 11$

(2)  $-8 \leq x < 6$  与  $-4 < x \leq 2$

1.4 证明下列各式:

(1)  $|-x| = |x|$       (2)  $|x-y| = |y-x|$

(3)  $|x| = \sqrt{x^2}$       (4)  $|x/y| = |x|/|y|$  ( $y \neq 0$ )

(5)  $|x+y| \leq |x| + |y|$

(6)  $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$

(7) 已知  $a, b, m$  为正数,且  $a < b$ , 则

$$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$$

(8) 若  $a > 0, b > 0$ , 则

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(9)  $x > 0$ , 则

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

当且仅当  $x=1$  时, 等式成立。

(10)  $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

1.5 解不等式:

(1)  $-2 < \frac{1}{x+2} < 2$

(2)  $\left| \frac{x-2}{x+1} \right| > \frac{x-2}{x+1}$

(3)  $|x-A| < \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  为常数)      (4)  $\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1} > 0$

1.6 解高次不等式:

(1)  $|x^2 - 3x + 2| \geq x^2 - 3x + 2$       (2)  $x^2 - 7x + 12 > 0$

(3)  $|x(1-x)| \leq 0.5$       (4)  $-2x^2 + 4x - 7 > 0$

$$(5) x^3 + x^2 - 30x < 0$$

1.7 解不等式组:

$$(1) \begin{cases} x - 2(x - 3) > 4 \\ \frac{x}{2} - (x - 3) > \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + 5 \leq (x + 1)(x + 2) \\ x(x + 1) + x(x + 2) > (2x - 1)(x + 3) \end{cases}$$

### 求函数值

1.8 已知函数  $f(x) = x + 1$  求:  $f(2)$ ,  $f(-2)$ ,  $-f(2)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $\frac{1}{f(2)}$ ,  $f(a+b)$ 。

1.9 设  $\varphi(t) = |t - 3| + |t - 1|$  求:  $\varphi(0)$ ,  $\varphi(1)$ ,  $\varphi(-1)$ ,  $\varphi(-2)$ 。

1.10 求  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ , 设:

$$(1) f(x) = ax + b$$

$$(2) f(x) = x^2 + 4x + 1$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{x}$$

1.11 已知  $G(u) = 3$  求  $G(0)$ ,  $G(u + \Delta u) - G(u)$ 。

1.12 设  $\psi(x) = e^x - 1$ , 求  $\psi(0)$ ,  $\psi(\varepsilon)$ ,  $\psi(\ln 2)$ 。

1.13 设  $f(x) = \lg x^2$ , 求  $f(10^3)$ ,  $f(-0.001)$ 。

1.14 设  $\varphi(x) = \frac{1-x}{1+x}$ , 求  $\varphi(-x)$ ,  $\varphi(x) + 1$ ,  $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ ,

$$\frac{1}{\varphi(x)}$$

1.15 设  $f(t) = \begin{cases} \sin t & -2 < t < 0 \\ 1 + t^2 & 0 \leq t < 2 \end{cases}$

求  $f(1)$ ,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ,  $f(4)$ .

1.16 若  $G(x) = \begin{cases} |x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$

求  $G(-1)$ ,  $G\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $G(5)$ ,  $G\left(-\frac{1}{4}\right)$ .

1.17 设

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

(该函数称为符号函数, 记为  $\operatorname{sgn} x$ ), 求  $y(0)$ ,  $y(-2)$ ,  $y(100)$ .

1.18 已知 (1)  $f(x) = |ax|$  ( $a \neq 0$ ), (2)  $f(x) = \frac{1}{x}$ , (3)

$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ , 且  $f(x) + f(y) = f(z)$ , 求  $z$ .

1.19 设  $f(u) = \lg u$ , 求证:

(1)  $f(u) + f(u+1) = f[u(u+1)]$

(2)  $f(x) - f(y) = f(x/y)$

1.20 设  $\varphi(x) = e^x$ , 求证:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y)$$

$$\varphi(x)/\varphi(y) = \varphi(x-y)$$

1.21 设  $f(t) = t^2 - 2\cos t$ , 求证:  $f(-a) = f(a)$ .

1.22 设  $f(x) = 2x - \sin x$ , 求证:  $f(-t) = -f(t)$ .

1.23 设  $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$  ( $a > 0$ ), 求证:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1.24 设  $f(x) = ax + b$  且有  $f(0) = -2$ ,  $f(3) = 5$ , 求

$f(2)$ 。

1.25 设  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 且  $f(-2) = 0$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 5$ , 求  $f(-1)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 。

1.26 (1) 设  $f(n) = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n}$ , 求  $f(2)$ ,  $f(5)$ 。

(2) 若  $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$  ( $n \geq 2$ ), 求  $u_4, u_8, u_{11}$ 。

(3) 若  $y = \frac{n-2}{n^2+1}$ , 求  $y(2), y(5)$ 。

1.27 (1) 已知数列  $1, -1, 1, -1, \dots$ , 试求  $f(n)$  的表达式;

(2) 已知数列  $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots$ , 试求  $f(n)$  的表达式。

1.28 求下列函数的值域:

(1)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  ( $0 \leq x < 1$ )

(2)  $y = \ln(1-x)$  ( $x \leq 0$ )

(3)  $\varphi(x) = 5^x$  ( $-\infty < x < +\infty$ )

(4)  $y = \sqrt{x-x^2}$

(5)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$

1.29 函数  $f(x)$  满足什么条件, 以下各式才有意义:

(1)  $y = \sqrt[n]{f(x)}$  ( $n$  为正整数)

(2)  $\varphi(x) = \log_a f(x)$  ( $a > 0$ )

### 函数定义域

1.30 求下列各函数的定义域, 并表示在数轴上:

$$(1) y = x^3 - 3x + 2$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(3) F(u) = \frac{|u|}{u}$$

$$(4) g(t) = \frac{2t-1}{t^2-3t+2}$$

$$(5) y = \sqrt{2+x-x^2}$$

$$(6) \varphi(r) = \frac{r-4}{\sqrt{r^2-r-2}}$$

$$(7) f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$$

$$(8) y = \lg \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+2}$$

$$(9) y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$(10) \psi(x) = \log_2 \log_2 x$$

1.31 求下列各函数的定义域:

$$(1) F(y) = \frac{1}{\ln(y-1)}$$

$$(2) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sin x \pi}$$

$$(3) y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$$

$$(4) f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x}$$

$$(5) \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(6) *f(x) = (2x)!$$

1.32 已知从高为  $h$  处落下的重物所经过的路径由公式  $s = \frac{1}{2}gt^2$  确定, 问(1)此函数的定义域如何? (2)解析表达式  $s = \frac{1}{2}gt^2$  的定义域怎样?

1.33 平面圆的面积公式是  $A = \pi R^2$ , 其中  $R$  是圆的半径, 问此函数的定义域是什么? 解析表达式  $A = \pi R^2$  的定义

域呢?

1.34 下列各对函数恒等吗? 为什么? 请指出什么范围内是恒等的?

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1},$$

$$g(x) = x + 1$$

$$(2) f(x) = 1,$$

$$g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$(3) f(x) = x,$$

$$g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(4) \varphi(t) = t,$$

$$\psi(t) = (\sqrt{t})^2$$

$$(5) f(u) = \ln u^2,$$

$$F(u) = 2 \ln u$$

$$(6) w(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}, z(x) = \sqrt{x^2-1}$$

$$(7) f(x) = \frac{\pi}{2}, g(x) = \arcsin x + \arccos x$$

$$(8) f(x) = x, g(x) = \sin(\arcsin x)$$

$$(9) f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}, g(x) = 2 \operatorname{arctg} x \quad (0 < x < +\infty)$$

$$(10) f(x) = \operatorname{arctg} x, g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad (0 < x < +\infty)$$

1.35 试求一个解析表达式(不能用分段的形式), 其定义域为:

$$(1) -2 \leq x \leq 2, \quad (2) 0 < |x| < 2, \quad (3) x \neq 2, 3, 4.$$

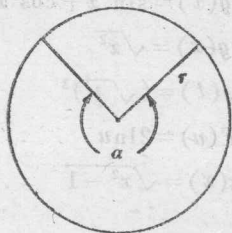
## 列函数表达式

1.36 已知三角形两边  $a$  与  $b$ , 夹角为  $\alpha$ , 试将三角形的面积表为  $\alpha$  的函数。求此函数的定义域, 并求对应的解析式的定义域。

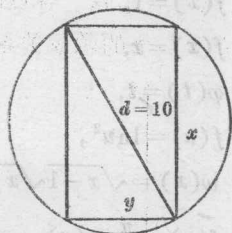


1.37 已知三角形  $ABC$  的一边为  $a$ , 试将三角形外接圆的直径表为  $a$  所对的圆心角  $\alpha$  的函数。

1.38\* 把一半径为  $r$  的圆形铁片自中心处剪去中心角为  $\alpha$  的一扇形后, 围成一圆锥。试将这圆锥的容积表为  $\alpha$  的函数。



第 1.38 题



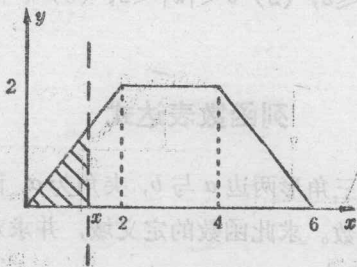
第 1.39 题

1.39 将直径为 10 的圆木锯成底与高分别为  $y$  与  $x$  的方木梁, 要求其横断面为圆木的横断面的内接矩形(如图):

(1) 底  $y$  是不是高度  $x$  的函数?

(2) 将方木梁的截面  $A$  表成  $x$  的函数。

(3) 已知方木梁之强度与  $yx^2$  成正比。当  $y=6$  时此圆木所截得方木梁强度是 64。试把此方木梁的强度  $E$  表为  $y$  的函数。



第 1.40 题