

控江中学新教材二次开发丛书

丛书主编 张群

新课标 数学解析

供高三学生使用

主编 高长山

XINKEBIAO
SHUXUE
JIEXI



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

控江中学新教材二次开发丛书

丛书主编 张群

新课标 数学解析

供高三学生使用

主编 高长山



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是依据高考考试手册和考试要求编写的高三复习用书,其内容紧扣考点、突出重点、剖析难点、抓住热点,不仅对“基础知识”、“基本技能”、“基本方法”提供了丰富的训练题目,还对近年来高考中出现的新题型、新特点给予了充分的关注。

本书内容新颖、全面、实用,是提高学习成绩和应考能力的一本好教材,也是高三学生必备的高考复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

新课标数学解析(供高三学生使用)/高长山主编. —上海:同济大学出版社,2009.7

(控江中学新教材二次开发丛书/张群主编)

ISBN 978-7-5608-4083-3

I. 新… II. 高… III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 084274 号

控江中学新教材二次开发丛书·丛书主编 张 群

新课标数学解析 供高三学生使用

主 编 高长山

责任编辑 赵 黎 责任校对 徐春莲 封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 江苏句容排印厂

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 21.25

印 数 1—4 100

字 数 530 000

版 次 2009 年 7 月第 1 版 2009 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4083-3

定 价 35.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

编委会成员名单

丛书主编 张 群

本书主编 高长山

副 主 编 吴惠群 王蕙萱 柳 敏

编 委 (按姓氏拼音排列)

高长山 洪 晔 刘灿文 柳 敏 刘亚东

刘玉洁 苏 静 谈 荣 王蕙萱 王建华

吴惠群 杨 慧 张红霞 张菁璐 张进兴

赵俐俐 朱敏慧

总 序

上海市控江中学雄居沪上东北一隅，枕滔滔黄浦江水，扼“知识杨浦”之关隘，早在 20 世纪 50 年代，便跻身上海市 14 所市重点中学之列，而今又是上海市首批命名的市实验性、示范性高中，雄风依旧。

朝迎旭日，夕送晚霞，六十寒暑谱写校园春秋；自主发展，自我砥砺，数万学子铸就控江丰碑。在控江中学的办学历程里，素以大批量、高素质向著名高校输送人才的骄人业绩而享誉社会；在控江中学的菁菁校园里，曾镌刻下不少高考状元风华正茂的身影。抚往昔，20 世纪 80 年代，控江中学曾因高考“双夺冠”而声誉鹊起；看今朝，时代车轮滚滚挺进 21 世纪，控江中学又是状元迭出，令人称奇。2004 年，上海高考理科总分的“状元”、“榜眼”、第四名和语文单科第一名，均出自控江中学；2005 年，仅考取复旦大学的学生就有 78 名之多；2007 年，喜报又传，上海市文科状元又出自控江中学；2008 年，控江中学的高考成绩又位居全市前列。

俗话说，凡事皆有其本原。长期以来，上海市控江中学之所以能有其稳定的教学质量，不仅得益于一支与时俱进、富有钻研精神的教师队伍，而且得益于其“严、实、新、活”的教学风格。自“二期课改”实施以来，控江中学的同仁为使新教材更加贴近学生的学习实际，使新教材更具有实践性和操作性，切磋琢磨，集思广益，对“新教材”进行了卓有成效的“二次开发”，同时也将系统总结学校历年来高三复习的经验，汇编成册，一起奉献给各位读者，与大家分享我们的教学成果，共同提高学习成效。我权以此为序。

张 群

2009 年 6 月

前 言

本书是控江中学高三数学复习的专用材料.它是在多年使用并改进的前提下,结合上海市新课程标准、二期课改新教材的教学内容和上海数学高考要求编写而成的.从编写的框架设计到内容的选择都有独到之处,其知识编排按新教材的章节顺序,与学校课时数匹配.

每节课由【课前预习】、【例题解析】、【易错易漏】、【巩固练习】和【课后作业】五部分组成.各章后均有测试题一套,全书最后还提供期中测试卷、期末测试卷各一套.

【课前预习】部分,含有“知识梳理”和“基础练习”两项内容.“知识梳理”是对本节涉及的主要知识点的整理及解题方法的提炼,该部分均用填空题的形式呈现.首先由学生自测,其后对照解答篇做出修改和补充.“基础练习”是为了使学生掌握并巩固基础知识而设计的.该组题目均为填空题或选择题.在此项中知识梳理有利于学生自学、自测,有利于查找知识方面的不足和欠缺.

【例题解析】部分,精选例题,侧重题型及方法,使每个例题都有其明确的目的性.题目难度适中,层次分明,题量适度,涵盖了整个高中数学的基本解题方法,既容纳基础题型,使学生把握通性通法;又兼顾能力题型,促进学生数学能力的培养和积累.例题解答后,用填空的形式将本题目所用到的知识点、方法及注意点做好归纳、小结,培养学生学会归纳与总结的良好学习习惯.在此项中的小结既是对知识点的回顾和总结,也是对解题方法的提炼和掌握.

【易错易漏】部分,学生独自总结出本节课中最易产生的典型错误和最易发生的遗漏现象,然后与教师总结的解答进行对照.在此项中总结出本节课最易产生错误和遗漏的知识和方法,便于加深记忆.这几方面都能培养学生好的学法,同时也能提高学习能力.

【巩固练习】部分,编排了一定量的具有针对性和有效性的练习题.学生独立完成后,对照解答篇,可达到自测、自查、自我订正的效果.既巩固了知识和方法,又能反馈学生掌握的程度.

【课后作业】部分,从质到量上做了充分的考虑,既能体现本课时对知识点的理解、掌握程度,又能反映学生的学习态度,同时也为教师的指导提供方便.

各测试题、测试卷可供学生自我反馈、自我评估之用,它可以进一步帮助学生巩固所学知识,加深理解,熟练技能,全面掌握数学的基本概念、基础知识、数学思想方法及数学应用.

总之,本书有两大显著特点:一是结构新颖;二是注重学法和能力提高.全书凝聚了控江中学全体数学教师多年来教学研究的成果,力求充分体现以培养创新能力为核心的素质教育精神.限于水平,书中难免会有一些缺点和错误,恳切希望广大师生批评指导.

控江中学数学组

2009年3月

目 录

总序

前言

第一章 集合、命题、不等式	1
第1节 集合及运算	1
第2节 命题与充要条件	3
第3节 不等式的性质及解法	5
第4节 一元二次不等式及解法	7
第5节 其他不等式及解法	9
第6节 基本不等式	11
第一章单元测试	14
第二章 函数的基本性质	16
第7节 函数的概念与运算	16
第8节 函数的奇偶性	18
第9节 函数的单调性	20
第10节 函数的对称性	22
第11节 函数的值域与最值(一)	24
第12节 函数的值域与最值(二)	26
第13节 函数图像及其变换	28
第二章单元测试	34
第三章 幂函数、指数函数和对数函数	36
第14节 幂函数	36
第15节 指数函数	38
第16节 对数 对数函数	41
第17节 反函数	43
第18节 指数方程和对数方程	45
第19节 函数 $y = ax + \frac{b}{x}$ ($a \neq 0, b \neq 0$) 的图像、性质及运用	46
第20节 函数、方程、不等式(一)	48
第21节 函数、方程、不等式(二)	50
第22节 函数的应用问题(一)	52
第23节 函数的应用问题(二)	54
第三章单元测试	58



第四章 三角比与三角函数	60
第 24 节 任意角的三角比	60
第 25 节 三角恒等式	62
第 26 节 解斜三角形	63
第 27 节 三角函数的性质与图像(一)	65
第 28 节 三角函数的性质与图像(二)	67
第 29 节 反三角函数与简单三角方程	68
第四章单元测试	71
第五章 数列、极限与数学归纳法	73
第 30 节 数列的概念和通项公式	73
第 31 节 等差数列、等比数列(一)	75
第 32 节 等差数列、等比数列(二)	77
第 33 节 数列求和	79
第 34 节 数列极限	81
第 35 节 数学归纳法,归纳、猜测、论证	83
第 36 节 数列型应用题	85
第 37 节 数列综合应用	88
第五章单元测试	91
第六章 平面向量与空间向量	93
第 38 节 向量的概念与运算	93
第 39 节 向量的坐标表示及平面向量分解定理	95
第 40 节 向量的数量积及其应用	96
第 41 节 空间向量的应用	98
第六章单元测试	101
第七章 矩阵、行列式及算法初步	103
第 42 节 矩阵的概念与运算	103
第 43 节 行列式的概念与运算	105
第 44 节 矩阵、行列式的应用	108
第 45 节 算法初步	110
第七章单元测试	113
第八章 复数	115
第 46 节 复数的有关概念	115
第 47 节 复数的运算	117
第 48 节 复数的模与共轭	118
第 49 节 复数中的方程问题	120
第 50 节 复数与几何	122
第八章单元测试	124



第九章 排列、组合、二项式定理、概率与统计	126
第 51 节 计数原理	126
第 52 节 二项式	128
第 53 节 概率及统计原理	130
第九章单元测试	133
第十章 空间直线与平面	135
第 54 节 平面的基本性质	135
第 55 节 空间两直线位置关系	137
第 56 节 空间直线和平面的位置关系	139
第 57 节 空间角的计算(一)	141
第 58 节 空间角的计算(二)	144
第十章单元测试	147
第十一章 多面体与旋转体	149
第 59 节 多面体	149
第 60 节 旋转体	151
第 61 节 球	153
第十一章单元测试	155
第十二章 坐标平面上的直线与线性规划	157
第 62 节 直线的倾斜角与斜率	157
第 63 节 直线的方程	158
第 64 节 直线与直线的位置关系(一)	160
第 65 节 直线与直线的位置关系(二)	162
第 66 节 线性规划(文科)	163
第十二章单元测试	166
第十三章 圆锥曲线	168
第 67 节 曲线与方程	168
第 68 节 圆的方程	170
第 69 节 椭圆的方程	171
第 70 节 双曲线的方程	174
第 71 节 抛物线的方程	176
第 72 节 直线与圆锥曲线(一)	178
第 73 节 直线与圆锥曲线(二)	180
第 74 节 圆锥曲线综合应用(一)	182
第 75 节 圆锥曲线综合应用(二)	184
第 76 节 参数方程、极坐标(理科)	187
第十三章单元测试	190



期中测试卷	192
期末测试卷	194
参考答案	196
第一章 集合、命题、不等式	196
第二章 函数的基本性质	203
第三章 幂函数、指数函数和对数函数	215
第四章 三角比与三角函数	234
第五章 数列、极限与数学归纳法	245
第六章 平面向量与空间向量	262
第七章 矩阵、行列式及算法初步	267
第八章 复数	274
第九章 排列、组合、二项式定理、概率与统计	280
第十章 空间直线与平面	284
第十一章 多面体与旋转体	294
第十二章 坐标平面上的直线与线性规划	300
第十三章 圆锥曲线	307
期中测试卷	325
期末测试卷	327



第一章 集合、命题、不等式

第1节 集合及运算

课前预习

一、知识梳理

1. 理解集合的有关概念

- (1) 集合中元素的特征: _____, _____, _____.
- (2) 集合与元素的关系用符号 _____, _____ 表示.
- (3) 常用数集的表示符号: 自然数集 _____; 正整数集 _____; 整数集 _____; 有理数集 _____; 实数集 _____.
- (4) 集合的表示法: _____, _____, _____.
- (5) 空集是指 _____ 的集合.
空集是任何集合的 _____, 是任何 _____ 集合的 _____.

2. 集合间的关系及其运算

- (1) 子集的定义: _____.
集合 A 是集合 B 的子集, 用符号表示为 _____ 或 _____.
- (2) 真子集的定义: _____.
集合 A 是集合 B 的真子集, 用符号表示为 _____.
- (3) $A \cap B = \{x \mid \text{_____}\}$; $A \cup B = \{y \mid \text{_____}\}$;
 $\complement_U A = \text{_____}$.
- (4) 对于任意集合 A, B , 则:
 - ① $A \cup B \text{_____} B \cup A$; $A \cap B \text{_____} B \cap A$; $A \cap B \text{_____} A \cup B$;
 - ② $A \cap B = A \Leftrightarrow \text{_____}$; $A \cup B = A \Leftrightarrow \text{_____}$;
 - ③ $\complement_U A \cap \complement_U B = \complement_U(\text{_____})$; _____ $= \complement_U(A \cap B)$.

二、基础练习

1. 设全集是实数集 $\mathbf{R}$, $M = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $N = \{x \mid x < 1\}$, 则 $\complement_U M \cap N = \text{_____}$.
2. 设集合 $A = \{5, \log_2(a+3)\}$, 集合 $B = \{a, b\}$. 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $A \cup B = \text{_____}$.
3. 设 $A = \{x \mid x = \sqrt{5k+1}, k \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x \mid x \leq 6, x \in \mathbf{Q}\}$, 则 $A \cap B = \text{_____}$.
4. 设集合 $A \cap \{-1, 0, 1\} = \{0, 1\}$, $A \cup \{-2, 0, 2\} = \{-2, 0, 1, 2\}$, 则满足上述条件的集合 A 的个数为 _____.
5. 已知集合 $M = \{x \mid x = 3m+1, m \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{y \mid y = 3n+2, n \in \mathbf{Z}\}$, 若 $x_0 \in M$, $y_0 \in N$, 则 $x_0 y_0$ 与集合 M, N 的关系是().
 - A. $x_0 y_0 \in M$ 但 $x_0 y_0 \notin N$
 - B. $x_0 y_0 \in N$ 但 $x_0 y_0 \notin M$
 - C. $x_0 y_0 \notin M$ 且 $x_0 y_0 \notin N$
 - D. $x_0 y_0 \in M$ 且 $x_0 y_0 \in N$
6. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid mx + 1 = 0\}$, 且 $B \subsetneq A$, 则 m 的值为 _____.
7. 若集合 $A = \{x \mid x \leq 2\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$, 满足 $A \cap B = \{2\}$, 则实数 $a = \text{_____}$.
8. 如图 1-1 所示, 在平面直角坐标系中, Ω 是一个与 x 轴的正半轴、 y 轴的正半轴分别相切于点 C, D 的定圆



所围成区域(含边界), A, B, C, D 是该圆的四等分点, 若点 $P(x, y), P'(x', y')$ 满足 $x \leq x'$ 且 $y \geq y'$, 则称 P 优于 P' , 如果 Ω 中的点 Q 满足: 不存在 Ω 中的其他点优于 Q , 那么, 所有这样的点 Q 组成的集合是劣弧().

- A. $\widehat{AB}$
C. $\widehat{CD}$

- B. $\widehat{BC}$
D. $\widehat{DA}$

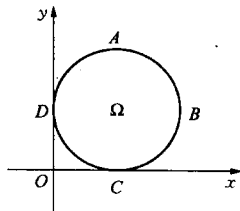


图 1-1

例题解析

例 1 设有两个集合 $A = \left\{ x \mid \frac{3-2x}{x-1} + 1 \geq 0, x \in \mathbf{R} \right\}, B = \left\{ x \mid 2ax < a+x, a > \frac{1}{2}, x \in \mathbf{R} \right\}$, 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.

[小结] 知识, 方法: _____.

例 2 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ 2x^2 + (2k+5)x + 5k < 0 \end{cases}$ 整数解的集合为 $\{-2\}$, 求实数 k 取值范围.

[小结] 知识, 方法: _____.

例 3 设集合 $A = \{x \mid x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$. 求实数 p 的取范围.

[小结] 知识, 方法: _____.

例 4 $S = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a+b \in A\}, T = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, a-b \in A\}$.

其中 (a, b) 是有序数对, 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n . 若对于任意的 $a \in A$, 总有一 $-a \notin A$, 则称集合 A 具有性质 P .

(I) 检验集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 与 $\{-1, 2, 3\}$ 是否具有性质 P , 并对其中具有性质 P 的集合, 写出相应的集合 S 和 T ;

(II) 对任何具有性质 P 的集合 A , 证明: $n \leq \frac{k(k-1)}{2}$;

(III) 证明: $m = n$.

[小结] 知识, 方法: _____.

易错易漏

- 条件为 " $A \subseteq B$ " 时, 不要遗忘 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 的情况.
- 含字母问题, 不要遗忘 $\underline{\hspace{2cm}}$.

巩固练习

- 设 $A = \{(x, y) \mid y = -4x + 6\}, B = \{(x, y) \mid y = 5x - 3\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.
A. $\{1, 2\}$ B. $\{(1, 2)\}$ C. $\{x=1, y=2\}$ D. $(1, 2)$
- 已知全集 $I = \mathbf{R}, A = \{-1\}, B = \{x \mid \lg(x^2 - 2) = \lg x\}$, 则 $(\quad)$.
A. $A \subseteq B$ B. $A \cup B = \emptyset$ C. $A \supseteq B$ D. $(\complement_I A) \cap B = \{2\}$
- 集合 $A = \{(x, y) \mid y = |x| + 1\}, B = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{2}x + a\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$. 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 15 \leq 0\}, B = \{x \mid a+1 \leq x \leq 4a+1\}, B \subseteq A$, 求 a 的取值范围.
- 设函数 $f(x) = \lg\left(\frac{2}{x+1} - 1\right)$ 的定义域为集合 A , 函数 $g(x) = \sqrt{1 - |x+a|}$ 的定义域为集合 B .
(1) 当 $a = 1$ 时, 求集合 B .
(2) 问: $a \geq 2$ 是 $A \cap B = \emptyset$ 的什么条件(充分非必要条件、必要非充分条件、充要条件、既非充分也非必要条件)? 并证明你的结论.

课后作业

- 设 $f(x) = x^2 - 12x + 36, A = \{a \mid 1 \leq a \leq 10, a \in \mathbf{N}\}, B = \{b \mid b = f(a), a \in A\}$, 又设 $C = A \cap B$.



求集合 C .

- 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x \mid x^2 - bx + 2 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, $C \subseteq A$. 求实数 a, b 的值.
- 已知 $f(x) = x^2 + px + q$, 集合 $A = \{x \mid x = f(x)\}$, $B = \{x \mid x = f[f(x)]\}$, (1) 求证: $A \subseteq B$; (2) 如果 $A = \{-1, 3\}$, 求集合 B ; (3) 如果 A 为单元素集合时, 求证: $A = B$.

(刘亚东)

第2节 命题与充要条件

课前预习

一、知识梳理

- 命题的真假判定; 四种命题的相互关系; 充分、必要条件与等价命题.
- 关键词语的否定写法:

关键词	大(小)于	是	有	全, 都	任何每一个都	至少有一个	至多有一个
否定	不大(小)于	不是	无	不全, 不都	至少有一个不	一个也没有	至少有两个

- 逻辑连接词“或”、“且”、“非”与集合的运算“并”、“交”、“补”的类比.

二、基础练习

- 填写下列命题的否定形式

- $3 + 4 > 6$; _____; ② 2 是质数: _____; ③ 对任意实数 x , 都有 $x^2 = 1$: _____;
- 他是数学家或物理学家: _____;
- 线段 AB 与 CD 平行且相等: _____;
- 复数 z_1, z_2, z_3 中至多有一个为纯虚数: _____;
- 若 $ab = 0$, 则 a, b 中至少有一个为零: _____.

- (1) 设甲是乙的充分非必要条件, 乙是丙的充要条件, 丁是丙的必要非充分条件, 则丁是甲的().

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

- (2) 若 A 是 B 的必要非充分条件, 则 $\bar{B}$ 是 $\bar{A}$ 的 _____ 条件.

- 下列各组命题中互为等价命题的是().

A. $A \subseteq B$ 与 $A \cup B = B$.

B. $x \in A$ 且 $x \in B$ 与 $x \in A \cup B$.

C. $a \in A \cap B$ 与 $a \in A$ 或 $a \in B$.

D. $m \in A \cap B$ 与 $m \in A \cup B$.

- 填空(在“充分不必要”、“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要”中选一种作答)

(1) “ $x, y \in \mathbf{R}, x + y \geq 2$ ”是“ x, y 中至少有一个大于 1”成立的 _____ 条件.

(2) “ $\alpha \neq \beta$ ”是“ $\cos \alpha \neq \cos \beta$ ”的 _____ 条件.

- $a > 0$ 且 $b > 0$ 的一个必要非充分条件是 _____.

- “函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 存在反函数”是“函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数”的().

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

- 平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线的充要条件是().

A. $\vec{a}, \vec{b}$ 方向相同

B. $\vec{a}, \vec{b}$ 两向量中至少有一个为零向量

C. 存在 $\lambda \in \mathbf{R}$, 有 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$

D. 存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 , 使得 $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$



8. 给定空间中的直线 l 及平面 α , 条件“直线 l 与平面 α 内无数条直线都垂直”是“直线 l 与平面 α 垂直”的 () 条件.
- A. 充要 B. 充分非必要 C. 必要非充分 D. 既非充分又非必要

例题解析

例1 填空(在“充分不必要”、“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要”中选一种作答)

- (1) 对于实数 x, y , $p: xy > 1, x + y > 2$ 是 $q: x > 1, y > 1$ 的 _____ 条件;
- (2) 对于实数 x, y , $p: x + y \neq 8$ 是 $q: x \neq 2$ 或 $y \neq 6$ 的 _____ 条件;
- (3) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, $p: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ 是 $q: (x-1)(y-2) = 0$ 的 _____ 条件;
- (4) 在 $\triangle ABC$ 中, $p: A > B$ 是 $q: \sin A > \sin B$ 的 _____ 条件;
- (5) 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x^2 + y^2 < 2$ 是 $|x| + |y| \leq \sqrt{2}$ 的 _____; 又是 $|x| + |y| < 2$ 的 _____; 又是 $|x| < \sqrt{2}$ 且 $|y| < \sqrt{2}$ 的 _____.
- (6) 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 方程 $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ 和方程 $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ 的实数解集分别为 M 和 N , 试判断“ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ”是“ $M = N$ ”的 _____ 条件; 若上述“方程”改为不等式 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 和不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 又有何结论呢?

[小结] 知识, 方法: _____.

例2 (1) 是否存在实数 m , 使得 $2x + m < 0$ 是 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的充分条件?

(2) 是否存在实数 m , 使得 $2x + m < 0$ 是 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的必要条件?

[小结] 知识, 方法: _____.

例3 若集合 $A = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{2}x^2\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 + (y-a)^2 = 9\}$, 求使 $A \cap B \neq \emptyset$ 的一个充要条件.

[小结] 知识, 方法: _____.

例4 已知 $f(x) = ax^2 - c$, 且 $-4 \leq f(1) \leq -1, -1 \leq f(2) \leq 5$, 求 $f(3)$ 的取值范围.

[小结] 知识, 方法: _____.

易错易漏

- (1) 写四种命题时, 应先分清 _____ 和 _____;
- (2) 注意区别命题的否定形式(如反证法时对结论进行的否定)与否命题;
- (3) 要注意一些常用的“结论否定形式”, 如“至少有一个”“至多有一个”“都是”的否定形式是“一个也没有”“至少有两个”“不都是”; 复合命题中“且”、“或”的否定; “不都是”与“至多”“至少”的关系;
- (4) 证明充要性问题要从 _____、_____ 两个方面来证明.

巩固练习

1. 说出下列命题的一个等价命题:

(1) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a + b > 0$ 且 $ab > 0$, 则 $a > 0$ 且 $b > 0$;

(2) 设 x_1, x_2 是实系数二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实根, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

2. 填空(在“充分不必要”、“必要不充分”、“充要”、“既不充分也不必要”中选一种作答)

(1) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x^2 + y^2 \neq 0$ ”是“ x, y 不全为零”的 _____ 条件;

(2) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $xy > 0, x + y > 0$ ”是“ $x > 0, y > 0$ ”的 _____ 条件;

(3) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x^2 + y^2 < 1$ ”是“ $|x| < 1$ 且 $|y| < 1$ ”的 _____ 条件;

(4) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $|x| + |y| < 1$ ”是“ $|x| < 1$ 且 $|y| < 1$ ”的 _____ 条件;

(5) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $|a| + |b| = |a + b|$ ”是“ $ab = 0$ ”的 _____ 条件;

(6) 在 $\triangle ABC$ 中, “ $A > \frac{\pi}{6}$ ”是“ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”的 _____ 条件;



(7) 若 a, b, c 是常数, 则 “ $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ ” 是 “对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $ax^2 + bx + c > 0$ ” 的 _____ 条件;

(8) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $b = \tan a$ 是 $a = \arctan b$ 的 _____ 条件.

3. (1) 使不等式 $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$ 成立的一个充分而不必要条件是 ().

A. $x < 0$

B. $x \geq 0$

C. $x \in \{-1, 3, 5\}$

D. $x \leq -\frac{1}{2}$ 或 $x \geq 3$

(2) 关于 x 的方程 $|x| - |x-1| = a$ 有解的充要条件是 _____.

4. 写出命题 “两个偶数的和为偶数” 的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断所写命题的真假.

逆命题: _____ ();

否命题: _____ ();

逆否命题: _____ ().

5. 函数 $f(x) = x^2 - 2ax - 3$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在反函数的充要条件是 _____.

6. 命题甲: 关于 x 的方程 $x^2 + x + m = 0$ 有两个相异的负根; 命题乙: 关于 x 的方程 $4x^2 + x + m = 0$ 无实根, 若这两个命题有且只有一个是真命题, 求实数 m 的取值范围.

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = p^n + q$ ($p \neq 0$ 且 $p \neq 1$), 求数列 $\{a_n\}$ 成等比数列的充要条件.



课后作业

1. 设 $f(x) = (a^2 - 1)x^2 - (a - 1)x - 1$, 写出使 $f(x) > 0$ ($x \in \mathbf{R}$) 恒不成立的一个充分非必要条件及一个充要条件.

2. (1) 若 $P = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $S = \{x | ax + 1 = 0\}$, 求使 $S \subseteq P$ 成立的一个充分非必要条件;

(2) 求使不等式 $|x - 4| + |x + 3| < a$ 有实数解的一个充要条件.

3. 已知关于 x 的实系数二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 分别求:

(1) 方程有一正根, 一根是零; (2) 两根都比 2 小的一个充要条件.

(刘亚东)

第 3 节 不等式的性质及解法



课前预习

一、知识梳理

1. 不等式的基本性质

(1) 对称性: _____; (2) 传递性: _____;

(3) 加法单调性: _____; (4) 乘法单调性: _____;

(5) 移项法则: _____; (6) 同向不等式相加: _____;

(7) 异向不等式可减: _____; (8) 同向正数不等式可乘: _____;

(9) 正数不等式可乘方: _____; (10) 正数不等式可开方: _____;

(11) 正数不等式两边取倒数: _____.

2. 绝对值不等式的性质

(1) 如果 $b > 0$, 那么, $|a| < b$ 等价于 _____ 等价于 _____; $|a| > b$ 等价于 _____ 等价于 _____.

(2) _____ $\leq |a \pm b| \leq$ _____.

二、基础练习

1. 命题 (1) 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$; (2) 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$; (3) $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;



(4) $a < b < 0, c < d < 0 \Rightarrow ac > bd$; (5) $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \Rightarrow a > b (n \in \mathbf{N}^*)$;

(6) $a + c < b + d \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases}$; (7) $a < b < 0 \Rightarrow a^2 > ab > b^2$. 其中真命题是_____.

2. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $ab(a-b) < 0$ 成立的一个充要条件是().

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

3. 已知 a, x, y, b 依次成等差数列, c, x, y, d 依次成等比数列, 其中 $x \neq y, x > 0, y > 0$, 则 $a+b$ 与 $c+d$ 的大小关系是_____.

4. 已知 $0 < x < y < a < 1$, 则().

- A. $\log_a(xy) < 0$ B. $0 < \log_a(xy) < 1$ C. $1 < \log_a(xy) < 2$ D. $\log_a(xy) > 2$

5. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a - |b| > 0$, 则下列不等式中, 正确的是().

- A. $b - a > 0$ B. $a^3 + b^3 < 0$ C. $b + a > 0$ D. $a^2 - b^2 < 0$

6. 已知 a, b 为非零实数, 且 $a < b$, 则下列命题中, 成立的是().

- A. $a^2 < b^2$ B. $a^2b < ab^2$ C. $\frac{1}{ab^2} < \frac{1}{a^2b}$ D. $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$

7. 设 P 和 Q 是两个集合, 定义集合 $P-Q = \{x | x \in P, \text{且 } x \notin Q\}$, 如果 $P = \{x | \log_2 x < 1\}$, $Q = \{x | |x-2| < 1\}$, 那么, $P-Q$ 等于().

- A. $\{x | 0 < x < 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ D. $\{x | 2 \leq x < 3\}$

8. 已知 $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, 则使得 $(1-a_i x)^2 < 1 (i=1, 2, 3)$ 都成立的 x 取值范围是().

- A. $(0, \frac{1}{a_1})$ B. $(0, \frac{2}{a_1})$ C. $(0, \frac{1}{a_3})$ D. $(0, \frac{2}{a_3})$

例题解析

例1 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 比较 $x^2 + y^2 + 1$ 与 $x + y + xy$ 的大小.

[小结] 知识, 方法: _____.

例2 设 $a > 0, b > 0$, 求证: $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

[小结] 知识, 方法: _____.

例3 设 $0 < x < 1, a > 0, a \neq 1$, 比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

[小结] 知识, 方法: _____.

例4 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 求证: 若 $a+b \geq 0$, 则 $f(a) + f(b) \geq f(-a) + f(-b)$;

(2) 判断(1)中命题的逆命题是否成立? 并证明你的结论;

(3) 解不等式 $f(\lg \frac{1-x}{1+x}) + f(2) \geq f(\lg \frac{1+x}{1-x}) + f(-2)$.

[小结] 知识, 方法: _____.

易错易漏

(1) _____ 是解不等式的理论依据, 特别要注意同向不等式可相加, 也可相乘, 但相乘时, 两个不等式都需_____;

(2) 作差法是很重要的方法, 要引起重视; 而作商法比较大小的依据是_____, 使用时要注意符号, 不能乱用(一般适用于指数形式);

(3) 函数的单调性反映了两个自变量的大小与其对应的函数值的大小关系, 利用其比较大小时, 两个自变量要_____.

巩固练习

1. 已知集合 $A = \{x | |x-a| \leq 1\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是



2. 若直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 通过点 $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$, 则().

A. $a^2 + b^2 \leq 1$

B. $a^2 + b^2 \geq 1$

C. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \leq 1$

D. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 1$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0, \\ x-1, & x \geq 0, \end{cases}$ 则不等式 $x + (x+1)f(x+1) \leq 1$ 的解集是().

A. $\{x | -1 \leq x \leq \sqrt{2} - 1\}$

B. $\{x | x \leq 1\}$

C. $\{x | x \leq \sqrt{2} - 1\}$

D. $\{x | -\sqrt{2} - 1 \leq x \leq \sqrt{2} - 1\}$

4. 记关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x+1} < 0$ 的解集为 P , 不等式 $|x-1| \leq 1$ 的解集为 Q .

(1) 若 $a = 3$, 求 P ;

(2) 若 $Q \subseteq P$, 求正数 a 的取值范围.

5. 设 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ($x_1 \neq x_2$), 比较 $|f(x_1) - f(x_2)|$ 与 $|x_1 - x_2|$ 的大小.

课后作业

1. (1) 比较 $A = 1 + a^2$ 与 $B = \frac{1}{1-a}$ 的大小;

(2) 设 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 比较 $a^a b^b$ 与 $(ab)^{\frac{a+b}{2}}$ 大小;

(3) 设 $a > 0, a \neq 1, t > 0$, 比较 $\frac{1}{2} \log_a t$ 和 $\log_a \frac{t+1}{2}$ 的大小, 并证明你的结论.

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 中, $a_1 = b_1 > 0, a_3 = b_3 > 0, a_1 \neq a_3$, 试比较 a_5 与 b_5 的大小.

3. 设 $a_1 > 0$ 且 $a_1 \approx \sqrt{2}$, 令 $a_2 = 1 + \frac{1}{1+a_1}$.

(1) 证明 $\sqrt{2}$ 介于 a_1, a_2 之间;

(2) 求 a_1, a_2 中哪一个更接近于 $\sqrt{2}$;

(3) 你能设计一个比 a_2 更接近于 $\sqrt{2}$ 的 a_3 吗? 并说明理由.

(刘亚东)

第4节 一元二次不等式及解法

课前预习

一、知识梳理

_____ 与二次不等式密切相关, 借助 _____ 的图像和性质, 可方便直观地解决与不等式有关的问题.

1. 二次不等式的解集的端点就是其对应二次方程的根, 常用 _____ 求二次不等式的系数, 一般有结论:

(1) 二次不等式 $f(x) = ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解集是 $[a, \beta]$, 等价于 _____;

(2) $f(x) = ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解集是 $(-\infty, a] \cup [\beta, +\infty)$, 等价于 _____.

2. 对二次不等式恒成立问题, 有:

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ 或 _____;

(2) $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ _____ 或 _____.

二、基础练习

1. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($x \in \mathbb{R}$) 的部分对应值如下表: