七
年级

读书是最美的姿态

*Reading is most graceful*

华罗庚实验学校名师工作室

**拓展数学课堂系列读本——走进数学乐园**

# 华罗庚实验学校数学课本


吉林出版集团有限责任公司

封面设计：猫头鹰工作室

*Hualuogeng Shiyan Xuexiao*
*Shuxue Keben*

## 华罗庚实验学校数学课本

让同学们奠定扎实的数学基础，在动手实践、自主探索、合作交流的学习过程中促进数学思维更好地发展，让每一位同学都能走进数学的乐园，享受学习数学所带来的无限乐趣。它将成为教师的好参谋，为教师的教学提供更好的教学素材，以不断提高当前的课堂教学效益。它也会成为家长们辅导孩子学好数学的好帮手，在不加重孩子学习负担的前提下，与孩子一道分享探索与思考的乐趣，感受孩子成长的喜悦。

可一图书 关爱一生

集团网址:http://www.keyigroup.com
网上书城:http://www.keyibook.com
可一图书 关爱一生
Care Book Care Life

ISBN 978-7-5463-0889-0
9 787546 308890 >
定 价:26.00元

读书是最美的姿态 Reading is most graceful

7

拓展数学课堂系列读本——走进数学乐园

# 华罗庚实验学校
# 数学课本

七年级


**丛书编委会**

顾　　问：肖承运　徐伟宣

主　　任：曹少华

副 主 任：周怡和　陈国富　吕水庚　杨国华　吴友庚

丛书编委：潘小本　贺小黑　佘双富　张　俊　陈　斌　李继锋

　　　　　谭年平　戴苏庆　冯建伟　孔粉富　王　权　潘建明

　　　　　蒋守成　孟国伟

丛书主编：吕水庚

小学主编：吴友庚

本册主编：陈锁华

本册编写：陈锁华　吴友庚　荆春芳　姚　珍　田伟平



吉林出版集团有限责任公司

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚实验学校数学课本. 七年级 / 吕水庚主编. —长春：吉林出版集团有限责任公司，2009.9

ISBN 978-7-5463-0889-0

Ⅰ. 华… Ⅱ. 吕… Ⅲ. 数学课—初中—教材 Ⅳ. G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 171800 号

书　　名　华罗庚实验学校数学课本
　　　　　七年级
责任编辑　李敏芳
责任校对　吕兰生　邹书生
出　　版　吉林出版集团有限责任公司(长春市人民大街 4646 号　邮编：130021)
发　　行　江苏可一出版物发行集团有限公司(电话：025-66989810)
印　　刷　南京玄武湖印刷实业有限公司
　　　　　(南京市栖霞区尧化门尧胜村 109 号　邮编：210046)
开　　本　787×1092 毫米　1/16
印　　张　17
字　　数　197.5 千字
版　　次　2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5463-0889-0
定　　价　26.00 元

(如有印装质量问题请与承印厂调换。联系电话：025-66989818)

# 前言

为纪念华罗庚教授诞辰一百周年，华罗庚实验学校名师工作室特别为同学们奉献了这套《华罗庚实验学校数学课本》。它是向九年制数学素质教育更高目标进军的杰作，是华罗庚实验学校全体数学老师数十年教学智慧的结晶。华罗庚教授的一生是勤奋好学的一生，是自学成才的典范。他的格言“天才在于积累，聪明在于勤奋”充分地阐释了这一成功的秘诀。在数学学习上，相信你只要勇于攀登，不断超越，就一定会在美妙的数学乐园中玩转数学摩天轮。《华罗庚实验学校数学课本》将带你遨游数学的海洋，给你增添无限的智慧。

《华罗庚实验学校数学课本》依据现行数学课程标准，紧密结合当前九年义务教育数学教材，力求体现创新的元素：内容创新体现数学来源于现实；呈现方式创新体现让学生自主探究；结构创新体现不同的人学习不同的数学。它的每一章节都分为三部分：知识要点、典例评析和巩固练习。“知识要点”便于同学们在自学前即了解其结构脉络与学习要求，以提高同学们自主探究的针对性；“典例评析”精选了与现学数学课本内容、生活紧密相联的内容作为载体，引领同学们进行自主探究，学会学习；“巩固练习”主要目的是让同学们在练习中进一步体验自主学习所带来的成功感受，题目设置注意了问题的层次性，其中有与例题紧密配套的基本题，只要同学们模仿“典例”即可完成，也有极少数题目需要发挥你的聪明才智，灵活运用所学的知识进行思考。

总之，《华罗庚实验学校数学课本》的定位是要让同学们奠定扎实的数学基础，在动手实践、自主探索、合作交流的学习过程中促进数学思维更好地发展，让每一位同学都能走进数学的乐园，享受学习数学所带来的无限乐趣。它将成为教师的好参谋，为教师的教学提供更好的教学素材，以不断提高当前的课堂教学效益。它也会成为家长们辅导孩子学好数学的好帮手，在不加重孩子学习负担的前提下，与孩子一道分享探索与思考的乐趣，感受孩子成长的喜悦。

衷心祝愿每位同学都能在“数学乐园”里尽情畅游，快乐成长。《华罗庚实验学校数学课本》为你们插上思维飞翔的翅膀，为你们的终生发展奠定坚实的基础。

华罗庚金杯全国少年数学邀请赛组委会副主任
主试委员会主任委员
中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长
徐坤宝

# 目录

## 上篇



## 下篇

# 上篇

# 第一章 有理数

## 知识要点

1. 有理数的定义

整数和分数统称为有理数(即有限小数和无限循环小数统称为有理数).

2. 有理数的分类

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\0\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{或有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\0\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

3. 有理数的大小比较

(1)在数轴上,左边的点表示的数总比右边的点表示的数小.

(2)正数大于零,负数小于零,正数大于一切负数;两个负数相比较,绝对值大的反而小.

(3)有理数进行大小比较时,是对结果进行比较.如果不是最简形式,应该先化成最简形式,再进行比较.

4. 有理数的大小比较常用方法

(1)作差法:

若 $a-b>0$,则 $a>b$;若 $a-b=0$,则 $a=b$;若$a-b<0$,则 $a<b$.

(2)比商法:当 $a>0$,$b>0$ 时,

若$\frac{a}{b}>1$,则 $a>b$;若$\frac{a}{b}=1$,则 $a=b$;若$\frac{a}{b}<1$,则 $a<b$.

(3)有时取特殊值也是一种有效的方法.

5. 有理数的运算律

(1)加法交换律:$a+b=b+a$;

(2)加法结合律:$(a+b)+c=a+(b+c)$;

(3)乘法交换律:$ab=ba$;

(4)乘法结合律:$(ab)c=a(bc)$;

(5)乘法分配律:$a(b+c)=ab+ac$.

6. 有理数巧算的常用方法

(1)利用运算律进行简便运算.在进行运算时要注意观察题目的结构特征和规律,灵活运用乘法分配律或巧妙添加括号,以达到巧算的目的.

(2)先用字母揭示一般规律再具体运算.用字母表示数是可以把繁杂的计算化简,利于归纳特征.

(3)拆项、分解消项.通过拆项、分解等方法抵消题目中的大多数项,化繁为简.

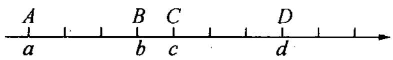
(4)常用公式的巧用.利用数列求和公式、乘法公式等进行巧算.

## 典例评析

**例 1** (1)已知数轴上有 $A$、$B$ 两点,$A$、$B$ 之间的距离为 1,点 $A$ 与原点 $O$ 的距离为 3,那么点 $B$ 对应的数是多少?

(2)如图,数轴上标出若干个点,每相邻

两点相距 1 个单位长度，点 $A$、$B$、$C$、$D$ 对应的数分别是整数 $a$、$b$、$c$、$d$，且 $d-2a=10$，那么数轴上的原点应是图中的哪个点？




**分析**：对于(1)确定 $A$、$B$ 两点在数轴上的位置，充分考虑 $A$、$B$ 两点的多种位置关系. 对于(2)从图中可以捕捉到 $a$、$d$ 之间存在的一个隐含条件，从而可以知道 $a$、$d$ 的值，因此可以确定数轴上原点的位置.

**解**：(1)因为点 $A$ 与原点 $O$ 的距离为 3，所以点 $A$ 表示的数可以是 3 或 $-3$，

又因为 $A$、$B$ 之间的距离为 1，

当点 $A$ 表示数 3 时，点 $B$ 表示的数是 2 或 4；

当点 $A$ 表示数 $-3$ 时，点 $B$ 表示的数是 $-2$ 或 $-4$；

所以点 $B$ 表示的数是 4 或 2 或 $-4$ 或 $-2$.

(2)从图中可以知道：$d-a=7$，即 $a+7=d$，

又因为 $d-2a=10$，所以 $2a+10=d$，

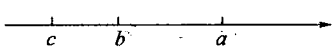
所以 $2a+10=a+7$，则 $a=-3$.

所以数轴上的原点应是图中的点 $B$.

**说明**：每一个有理数都可以用数轴上的一个点来表示，当数轴上两点位置确定则两点之间距离确定，当两点之间距离确定则两点之间位置未必确定，所以会引起解的讨论，同时从数轴上捕捉隐含条件也是我们应该具有的一种意识.

**例 2** (1)已知 $a$、$b$ 为有理数，且 $a>0$，$b<0$，$a+b<0$，将四个数 $a$、$b$、$-a$、$-b$ 按由小到大的顺序排列是__________.

(2)$a$，$b$，$c$ 三个有理数在数轴上的位置如图所示，则 ( )




A. $\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>\frac{1}{a-b}$

B. $\frac{1}{b-c}>\frac{1}{c-a}>\frac{1}{b-a}$

C. $\frac{1}{c-a}>\frac{1}{b-a}>\frac{1}{b-c}$

D. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a-c}>\frac{1}{b-c}$

(3)若四个有理数 $a$，$b$，$c$，$d$ 满足：$\frac{1}{a-1997}=\frac{1}{b+1998}=\frac{1}{c-1999}=\frac{1}{d+2000}$，则 $a$，$b$，$c$，$d$ 的大小关系是 ( )

A. $a>c>b>d$　　B. $b>d>a>c$

C. $c>a>b>d$　　D. $d>b>a>c$

(4)已知两数 $a$、$b$，如果 $a$ 比 $b$ 大，试判断 $|a|$ 与 $|b|$ 的大小.

**分析**：对于(1)可利用数轴或赋值法比较大小；对于(2)从数轴上可以捕获如下信息：$c<b<a$，可以取符合题意的值，分别计算 $\frac{1}{c-a}$，$\frac{1}{c-b}$，$\frac{1}{a-b}$，$\frac{1}{b-c}$，对结果进行比较，就能正确确定选项，当然我们也可以根据性质得到正确答案；对于(3)从等式中找到 $a$，$b$，$c$，$d$ 之间的关系，然后再判断它们的大小关系；对于(4)因为 $a$、$b$ 符号未定，所以 $a$ 比 $b$ 大有多种情形，借助数轴可以直观、全面地比较 $|a|$ 与 $|b|$ 的大小.

**解**：(1)因为 $a>0$，$b<0$，$a+b<0$，所以 $|a|<|b|$.

又因为 $a$ 与 $-a$ 互为相反数，$b$ 与 $-b$ 互为相反数，它们到原点的距离分别相等，在数轴上作出示意图可直观得到：$b<-a<a<-b$.

(2)由图可知 $c<b<a$，所以 $0<a-b<a-c$，$0<b-c<a-c$，

因此 $0<\frac{1}{a-c}<\frac{1}{a-b}$ ①，

$0<\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-c}$ ②，

所以由①有 $0>\frac{1}{c-a}>\frac{1}{b-a}$ ③，

由②有 $0>\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}$ ④，

由②知，应排除 D，由 $\frac{1}{a-b}>0$ 及④可知应排除 A.

由 $\frac{1}{b-c}>0$ 及③可知应排除 C，肯定 B，所以应选择 B.

(3) 由 $\frac{1}{a-1997}=\frac{1}{b+1998}=\frac{1}{c-1999}=\frac{1}{d+2000}$ 得：

$$a-1997=b+1998=c-1999=d+2000,$$

由这个等式得 $a>b, a<c, a>d; b<c, b>d, c>d$，

由此可得：$c>a>b>d$. 因此选择 C.

(4) 分五种情况讨论：

①当点 $B$ 在原点的右边时，$0<b<a$，则 $|a|>|b|$；

②当点 $A$ 在原点的左边时，$b<a<0$，则 $|a|<|b|$；

③当点 $A$、$B$ 分别在原点的右、左两侧时，$b<0<a$，这时无法比较 $|a|$ 与 $|b|$ 的大小关系；

④当点 $A$ 正好在原点位置时，$b<a=0$，则 $|a|<|b|$；

⑤当点 $B$ 正好在原点位置时，$0=b<a$，则 $|a|>|b|$.

**说明**：对于(2)采用的是排除法进行筛选的，排除法是解选择题的一种常用方法，利用特殊值法也能进行有理数的大小比较，可以判断出正确答案.

**例 3** 计算：

(1) $1-3+5-7+9-11+\cdots-1999+2001$；

(2) $2+4+6+8+\cdots+2000$；

(3) $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\cdots+\frac{59}{60}\right)$.

**分析**：对于(1)注意到相邻两项的差为定值，可以利用加法的结合律，分组计算；对于(2)计算方法很多，可以直接应用等差数列求和公式，也可以逆序相加；对于(3)可以逆序相加.

**解**：(1) 原式 $=(1-3)+(5-7)+(9-11)+\cdots+(1997-1999)+2001$

$=-2\times500+2001$

$=1001$.

(2) 方法一：原式 $=\frac{(2+2000)\times1000}{2}$

$=1001000$.

方法二：原式 $=2(1+2+3+\cdots+1000)=\frac{2\times(1+1000)\times1000}{2}=1001000$.

方法三：设 $S=2+4+6+8+\cdots+2000$，反序写出，

有 $S=2000+1998+1996+\cdots+6+4+2$，

两式相加有 $2S=(2+2000)+(4+1998)+\cdots+(1998+4)+(2000+2)$

$=\underbrace{2002+2002+\cdots+2002}_{1000\text{个}2002}$

$=2002\times1000=2002000$，

所以原式 $=1001000$.

(3) 设 $S=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\cdots+\frac{59}{60}\right)$，

则 $S=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{59}{60}+\frac{58}{60}+\cdots+\frac{1}{60}\right)$，

两式相加得：$2S=1+2+\cdots+59=\frac{60\times59}{2}=30\times59$，

所以原式 $=15\times59=885$.

**说明**：有理数的计算方法非常多，常常

需要我们根据题目中数据的不同特征作出合理的选择.

**例 4** 计算:

(1)$\dfrac{1\times3\times5+2\times6\times10+3\times9\times15+4\times12\times20}{1\times2\times3+2\times4\times6+3\times6\times9+4\times8\times12}$;

(2)已知$a=-\dfrac{1999\times1999-1999}{1998\times1998+1998}$,

$b=-\dfrac{2000\times2000-2000}{1999\times1999+1999}$,

$c=-\dfrac{2001\times2001-2001}{2000\times2000+2000}$,

求 $abc$ 的值;

(3)$19+199+1999+\cdots+1\underbrace{999\cdots99}_{1999个9}$;

(4)$\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1\underbrace{99\cdots9}_{n个9}$.

**分析**:对于(1)利用乘法结合律,找出分子、分母共同的项,再进行约分;对于(2)形式很复杂,逆向运用乘法分配律可以简化计算;对于(3)每一项都和整数差一,因此考虑凑整;对于(4)后一项拆开可以和前一项逆向运用乘法分配律.

**解**:(1)原式

$=\dfrac{1\times3\times5+1\times3\times5\times2^3+1\times3\times5\times3^3+1\times3\times5\times4^3}{1\times2\times3+1\times2\times3\times2^3+1\times2\times3\times3^3+1\times2\times3\times4^3}$

$=\dfrac{1\times3\times5\times(1+2^3+3^3+4^3)}{1\times2\times3\times(1+2^3+3^3+4^3)}$

$=\dfrac{1\times3\times5}{1\times2\times3}=\dfrac{5}{2}$;

(2)因为 $a=-\dfrac{1999\times(1999-1)}{1998\times(1998+1)}$

$=-\dfrac{1999\times1998}{1998\times1999}=-1$,

$b=-\dfrac{2000\times(2000-1)}{1999\times(1999+1)}$

$=-\dfrac{2000\times1999}{1999\times2000}=-1$,

$c=-\dfrac{2001\times(2001-1)}{2000\times(2000+1)}$

$=-\dfrac{2001\times2000}{2000\times2001}=-1$,

所以 $abc=(-1)\times(-1)\times(-1)=-1$;

(3)原式$=(20-1)+(200-1)+(2000-1)+\cdots+\left(2\underbrace{00\cdots00}_{1999个0}-1\right)$

$=(20+200+2000+\cdots+2\underbrace{00\cdots00}_{1999个0})-1999$

$=\underbrace{22\cdots2}_{1999个2}0-1999$

$=\underbrace{22\cdots2}_{1996个2}20221$;

(4)原式$=\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}$

$=\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times(\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1)+1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}$

$=\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}+1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}$

$=(\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1)\times1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}$

$=1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}\times1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}$

$=1\underbrace{00\cdots0}_{2n个0}$.

**说明**:凑整能简便解决问题.

**例 5** 计算:

(1)$\left(17\dfrac{7}{27}+27\dfrac{7}{17}-11\dfrac{37}{39}\right)\div\left(13\dfrac{12}{17}+8\dfrac{17}{27}-5\dfrac{38}{39}\right)$;

(2)$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2008}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2007}\right)-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2008}\right)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2007}\right)$.

**分析**:注意到计算本身很复杂,但有结构相同的部分或有倍数关系,因此可以使用换元法.

**解**:(1)设 $13\dfrac{12}{17}+8\dfrac{17}{27}-5\dfrac{38}{39}=a$,

则 $17\dfrac{7}{27}+27\dfrac{7}{17}-11\dfrac{37}{39}=2a$,

原式$=2a\div a=2$；

(2)设 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}=a$，

则原式$=\left(a-1+\frac{1}{2008}\right)a-\left(a+\frac{1}{2008}\right)(a-1)$

$=a^2-a+\frac{a}{2008}-a^2-\frac{a}{2008}+a+\frac{1}{2008}$

$=\frac{1}{2008}$.

**说明**：本题用字母表示数后运算大大简化，这是用字母表示数的一大优点，也是后继学习的一个重要内容.

**例 6** 计算：

(1)$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{8\times10}$；

(2)$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}$.

**分析**：对于(1)中的每一项，$\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$，$\frac{1}{2\times4}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$，…，$\frac{1}{8\times10}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)$，右边相加后可以大部分相消；对于(2)中的每一个分母可以先求和，再裂项相消，计算过程也可以简化.

**解**：(1)原式

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{29}{45}$；

(2)原式$=1+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{100\times101}$

$=1+2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$

$=1+2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{101}\right)$

$=\frac{200}{101}$.

**说明**：对形如"$\frac{1}{n\times(n+1)}$"的数可以裂成两项$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，把各项都裂成两项后大部分是可以消去的，从而可以简化计算.

**例 7** 计算：

(1)$1+3\frac{1}{6}+5\frac{1}{12}+7\frac{1}{20}+9\frac{1}{30}$；

(2)$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$.

**分析**：对于(1)将整数部分和分数部分分离后，分数部分可以裂项相加；对于(2)可以利用 $1-\frac{1}{2^2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)$，$1-\frac{1}{3^2}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$，…，$1-\frac{1}{10^2}=\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)$，相乘后可以约去大部分.

**解**：(1)原式

$=(1+3+5+7+9)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)$

$=\frac{10\times5}{2}+\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\right]$

$=25+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$

$=25\frac{1}{3}$；

(2)原式

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{9}{10}\times\frac{11}{10}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{11}{10}$

$=\frac{11}{20}$.

**说明**：分离整数和分数部分也是简化计算的一种方法，公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的逆向运用以后将会学习.

**例 8** 计算：

$\frac{1^2+2^2}{1\times2}+\frac{2^2+3^2}{2\times3}+\frac{3^2+4^2}{3\times4}+\cdots+\frac{9^2+10^2}{9\times10}$.

**分析**：先用字母表示每一项化简的结果，可以抵消中间项.

**解**：解法一：因为 $\frac{k^2+(k+1)^2}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}+\frac{k+1}{k}=1-\frac{1}{k+1}+1+\frac{1}{k}=2+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$，

所以原式 $=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+2+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=18+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=18\frac{9}{10}$.

解法二：原式 $=\left(\frac{2^2}{1\times2}+\frac{1^2}{1\times2}\right)+\left(\frac{3^2}{2\times3}+\frac{2^2}{2\times3}\right)+\left(\frac{4^2}{3\times4}+\frac{3^2}{3\times4}\right)+\cdots+\left(\frac{10^2}{9\times10}+\frac{9^2}{9\times10}\right)$

$=\frac{2}{1}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{10}{9}+\frac{9}{10}$，

因为上式中同分母的两个分数的和是 2，

所以原式 $=2\times9+\frac{9}{10}$

$=18\frac{9}{10}$.

**说明**：比较复杂的计算题，我们要根据题目特点仔细观察、分析特点，敢于想敢于动手，寻找解题突破口，将复杂问题转化为我们熟悉的问题情景.

**例 9** 计算：

(1) $7+7^2+7^3+7^4+\cdots+7^{2009}$；

(2) $2-2^2+2^3-2^4+2^5-2^6+\cdots+2^9-2^{10}$.

**分析**：本例中两个问题的特点很明显，后一个数与前一个数的比都是相同的倍数，我们可以设元来求值.

**解**：(1) 设 $S=7+7^2+7^3+7^4+\cdots+7^{2009}$，

则 $7S=7^2+7^3+7^4+\cdots+7^{2010}$.

两式相减得：$S-7S=7-7^{2010}$，所以 $S=\frac{7^{2010}-7}{6}$，

所以原式 $=\frac{7^{2010}-7}{6}$；

(2) 设 $S=2-2^2+2^3-2^4+2^5-2^6+\cdots+2^9-2^{10}$，

则 $2S=2^2-2^3+2^4-2^5+2^6-\cdots+2^{10}-2^{11}$.

两式相加得：$3S=2-2^{11}$. 所以 $S=\frac{2-2^{11}}{3}$，

所以原式 $=\frac{2-2^{11}}{3}$.

**说明**：当算式中出现指数依次增加而且较高时，我们常常会选择上述做法进行消项，化简计算过程.

**例 10** 在数学活动过程中，小明为了求 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ 的值（结果用 $n$ 表示），设计了如图(1)所示的几何图形.

(1) 请你用这个几何图形求 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$

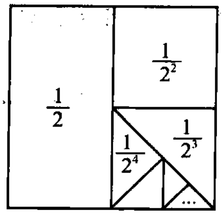
$+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$的值；

(2)请你再设计一个能求$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$的值的几何图形.

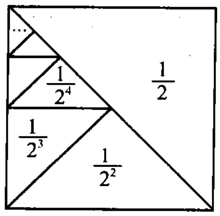
**分析**:利用几何图形的面积可以求上式的值,而剖分图形面积是构造图形的关键.

**解**:(1)由图形面积可得原式$=1-\frac{1}{2^n}$;

(2)设计图形如图(2).



(1)



(2)

**说明**:本例通过构造图形,直观形象地解释了一个公式,验证了一个结论,在一定程度上,丰富了我们解决问题的策略,当然我们也可以通过上例中求和的方式来解决.

**例 11** 有 $n$ 个数,第 1 个数记为 $a_1$,第 2 个数记为 $a_2$,第 3 个数记为 $a_3$,……,第 $n$ 个数记为 $a_n$. 若 $a_1=\frac{1}{2}$,从第 2 个数起,每个数都等于 1 与它前面的那个数的差的倒数.

(1)试计算:$a_2,a_3,a_4$ 的值;

(2)根据(1)的计算结果,请你推测 $a_{2004}$ 和 $a_{2005}$ 的值;

(3)计算:$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot\cdots\cdot a_{2004}\cdot a_{2005}\cdot a_{2006}$.

**分析**:正确理解每个数都等于"1 与它前面的那个数的差的倒数",从第一个数起,依次算出 $a_2,a_3,a_4$ 的值,并探究其中数值出现的规律.

**解**:(1)$a_2=2,a_3=-1,a_4=\frac{1}{2}$.

(2)$a_{2004}=-1,a_{2005}=\frac{1}{2}$.

(3)$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot\cdots\cdot a_{2004}\cdot a_{2005}\cdot a_{2006}=1$.

**说明**:这是一道阅读理解性的解答题,对题目中规则的描述要仔细推敲,反复思考,正确理解题目中的规则是解题的关键.

**例 12** 如图,在 3×3 的方格表中填入九个不同的正整数:1,2,3,4,5,6,7,8 和 $x$,使得各行、各列所填的三个数的和都相等. 请确定 $x$ 的值,并给出一种填数法.

| | | |
|---|---|---|
| | | $c$ |
| $a$ | $b$ | $x$ |
| | | $d$ |

(1)

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 4 | 9 |
| 6 | 8 | 1 |
| 7 | 3 | 5 |

(2)

**分析**:表中各行或各列三数之和都是相等的正整数,即$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+x}{3}=12+\frac{x}{3}$,

又 $a+b=c+d=12+\frac{x}{3}-x=12-\frac{2x}{3}$,从而可以从估计 $a+b$ 和 $c+d$ 的最小值入手.

**解**:$a+b$ 与 $c+d$ 的最小值是$\frac{1+2+3+4}{2}=5$,

所以 $12-\frac{2x}{3}\geqslant 5$,即 $x\leqslant\frac{21}{2}$,

而 $12-\frac{2x}{3}=a+b$ 是整数,且 $x$ 是不同于 1,2,3,4,5,6,7,8 的正整数,

因此 $x=9$. 填数法如图(2)(不惟一).

**说明**:幻方和数阵图是我国丰富的文化遗产之一,具有非常灵活多变的数学思想,在数学学习中很能开发智力.

## 巩固练习

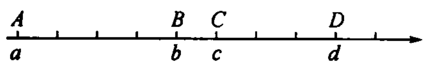
1. (1)在数轴上,点 $A$、$B$ 分别表示

$-\frac{1}{3}$和$\frac{1}{5}$，则线段 $AB$ 的中点所表示的数是________.

(2)已知数轴上表示负有理数 $m$ 的点是点 $M$，那么在数轴上与 $M$ 相距 $|m|$ 个单位长度的点中，与原点距离较远的点对应的数是________.

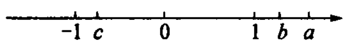
(3)点 $A$、$B$ 分别是数 $-3$、$-\frac{1}{2}$ 在数轴上对应的点，使得线段 $AB$ 沿着数轴向右移动到 $A_1B_1$，且线段 $A_1B_1$ 的中点对应的数是 3，则点 $A_1$ 对应的数是________，点 $A$ 移动的距离是________.

(4)如图，数轴上标出若干个点，每相邻两点相距 1 个单位长度，点 $A$、$B$、$C$、$D$ 对应的数分别是整数 $a$、$b$、$c$、$d$，且 $b-2a=9$，那么数轴的原点对应的点是________点.




2. (1)已知 $a>0$，$b<0$，且 $a+b<0$，那么有理数 $a$、$b$、$-a$、$|b|$ 的大小关系是____________.(用“<”连接)

(2)$a$，$b$，$c$ 在数轴上的位置如图所示，则 ( )




A. $\frac{a-b}{a+b}<\frac{a+cb}{a-cb}<\frac{a+b}{a-b}$

B. $\frac{a+b}{a-b}<\frac{a-b}{a+b}<\frac{a-cb}{a+cb}$

C. $\frac{a+cb}{a-cb}<\frac{a+b}{a-b}<\frac{a-b}{a+b}$

D. $\frac{a-cb}{a+cb}<\frac{a+b}{a-b}<\frac{a-b}{a+b}$

(3)数学晚会上，小明抽到一个题签如下：若 $ab<0$，$(a-b)^2$ 与 $(a+b)^2$ 的大小关系是 ( )

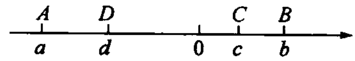
A. $(a-b)^2<(a+b)^2$

B. $(a-b)^2=(a+b)^2$

C. $(a-b)^2>(a+b)^2$

D. 无法确定

(4)有理数 $a$、$b$、$c$、$d$ 所对应的点 $A$、$B$、$C$、$D$ 在数轴上的位置如图所示，那么 $a+c$ 与 $b+d$ 的大小关系是 ( )




A. $a+c<b+d$　　B. $a+c=b+d$

C. $a+c>b+d$　　D. 无法确定

3. 若 $a=\frac{19951995}{19961996}$，$b=\frac{19961996}{19971997}$，$c=\frac{19971997}{19981998}$，试比较 $a$，$b$，$c$ 的大小；

4. 计算：

$2+4+6+\cdots+2n$.

5. 计算：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1997}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1997}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)$.

6. 计算：

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2005\times2006}$.

7. 计算：

$1\frac{1}{2}-2\frac{5}{6}+3\frac{1}{12}-4\frac{19}{20}+5\frac{1}{30}-6\frac{41}{42}+7\frac{1}{56}-8\frac{71}{72}+9\frac{1}{90}$.

8. 计算：$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)}+\frac{\frac{1}{4}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)}+\cdots+\frac{\frac{1}{99}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{99}\right)}$.

9. 计算：

$2-2^2-2^3-2^4-2^5-\cdots-2^{98}-2^{99}+2^{100}$.

10. 观察下列等式：

$1^3+2^3=(1+2)^2$

$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$

$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$

…

(1)猜想 $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=$________;

(2)求 $11^3+12^3+13^3+\cdots+20^3$ 的值.

11. 计算：

$\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{2^{12}}+\cdots+\frac{1}{2^{20}}$.

12. 探求 $2^{2007}$ 的末位数字是多少？$8^{2007}$ 的末位数字又是多少？

13. 如果 $a$、$b$、$c$、$d$ 为四个互不相等的整数，并且它们的乘积 $abcd=4$，那么能否确定 $a+b+c+d$ 的值呢？

14. 规定一种新运算"＊"的运算法则是：$a * b=(a+1)(b+1)$.

(1)计算：$(-3)*(-2)$，$(-2)*(-3)$，此运算满足交换律吗？

(2)计算：$[(-4)*(-3)]*(-2)$，$(-4)*[(-3)*(-2)]$，此运算满足结合律吗？

15. 定义一种对正整数 $n$ 的"$F$"运算：①当 $n$ 为奇数时，结果为 $3n+5$；②当 $n$ 为偶数时，结果为 $\frac{n}{2^k}$ $\left(\text{其中 } k \text{ 是使} \frac{n}{2^k} \text{为奇数的正整数}\right)$，并且运算重复进行. 例如，取 $n=26$，则：

$$\boxed{26}\xrightarrow[\text{第 1 次}]{F②}\boxed{13}\xrightarrow[\text{第 2 次}]{F①}\boxed{44}\xrightarrow[\text{第 3 次}]{F②}\boxed{11}\cdots$$

若 $n=449$，则第 449 次"$F$"运算的结果是______________.

16. 有一列数，第一个数 $x_1=1$，第二个数 $x_2=4$，第三个数记为 $x_3$，以后依次记为 $x_4$、$x_5$、$x_6$、…、$x_n$，从第二个数开始，每个数是它相邻两个数的和的一半$\left(\text{如 } x_2=\frac{x_1+x_3}{2}\right)$.

探索这一列数的规律，猜想第 $k$ 个数 $x_k$ 等于什么($k$ 是大于 2 的整数)？并由此算出 $x_{2005}$ 等于多少.

17. 有若干个数，第 1 个数记为 $a_1$，第 2 个数记为 $a_2$，第 3 个数记为 $a_3$，……，第 $n$ 个数记为 $a_n$. 若 $a_1=-\frac{1}{2}$，从第 2 个数起，每个数都等于 1 与它前面的那个数的差的倒数.

请你推测 $a_{2007}$ 和 $a_{2008}$ 的值.

18. 问题：你能比较 $2007^{2008}$ 与 $2008^{2007}$ 的大小吗？

为了解决这个问题，写出它的一般形式，即比较 $n^{n+1}$ 与 $(n+1)^n$ 的大小($n$ 是正整数)，然后我们从分析 $n=1,2,3,\cdots$ 这些简单的情形入手，从中发现规律，经过归纳猜想得出结论.

(1)通过计算，比较下列各组数中两个数的大小(在横线上填写"＞"、"＜").

① $1^2$ ______ $2^1$；② $2^3$ ______ $3^2$；③ $3^4$ ______ $4^3$；④ $4^5$ ______ $5^4$；⑤ $5^6$ ______ $6^5$；…；

(2)从第(1)题的结果经过归纳，可以猜想出 $n^{n+1}$ 和 $(n+1)^n$ 的大小关系是______________；

(3)根据上面归纳猜想的结论，试比较下列两个数的大小：$2007^{2008}$ ______ $2008^{2007}$.