

读考研书 找人大社



2009 年考研 数学

模拟冲刺试卷(理工类)

主编 李恒沛 高文森 贺家宁 晓 卉

● 权威命题专家亲自编写 ● 全真冲刺试题

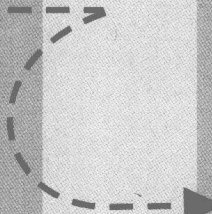
前命题组长积多年命题经验与研究心得精心编制

依据最新大纲最新样题全新改版

数一、数二各八套试卷，临考全真模拟



中国人民大学出版社



2009 年考研数学 模拟冲刺试卷(理工类)

► 主 编 李恒沛 高文森
贺家宁 晓 卉

正版查询及服务程序		← 刮 开 涂 层
		← 获取 20 位数字编码
		← 上 www.1kao.net 注册
		← 登录增值服务进免费课堂

2009

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

2009 年考研数学模拟冲刺试卷·理工类/李恒沛等主编. 6 版

北京: 中国人民大学出版社, 2008. 10

ISBN 978-7-300-05030-0

I. 2...

II. 李...

III. 高等数学-研究生-入学考试-习题

IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 154663 号

2009 年考研数学模拟冲刺试卷 (理工类)

主编 李恒沛 高文森 贺家宁 晓卉

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

电 话 010-62511242 (总编室)

010-82501766 (邮购部)

010-62515195 (发行公司)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.net> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 河北三河汇鑫印务有限公司

规 格 210 mm×285 mm 16 开本

印 张 12.75

字 数 407 000

邮政编码 100080

010-62511398 (质管部)

010-62514148 (门市部)

010-62515275 (盗版举报)

版 次 2003 年 11 月第 1 版

2008 年 10 月第 6 版

印 次 2008 年 10 月第 1 次印刷

定 价 22.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

目 录

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一	模拟试卷(1)	(1)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一	模拟试卷(2)	(12)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一	模拟试卷(3)	(22)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一	模拟试卷(4)	(33)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一	模拟试卷(5)	(44)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一	模拟试卷(6)	(54)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一	模拟试卷(7)	(66)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一	模拟试卷(8)	(77)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二	模拟试卷(1)	(88)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二	模拟试卷(2)	(97)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二	模拟试卷(3)	(107)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二	模拟试卷(4)	(116)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二	模拟试卷(5)	(125)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二	模拟试卷(6)	(134)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二	模拟试卷(7)	(144)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二	模拟试卷(8)	(154)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试卷		(165)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试卷		(173)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试卷		(180)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试卷		(189)

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一 模拟试卷(1)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 在下列给定的级数中,收敛的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$

(B) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}.$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{n^2+n}.$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{\pi}{n}.$

[]

(2) 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微的充分条件是

① $f'_x(x_0, y_0)$ 与 $f'_y(x_0, y_0)$ 都存在.

② $f'_x(x, y)$ 与 $f'_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内都连续.

③ $\Delta f - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y \rightarrow 0$, 当 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$.

④ $\frac{\Delta f - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y}{\rho} \rightarrow 0$, 当 $\rho \rightarrow 0$.

($\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$)

上述四个命题中正确的是

(A) ①②.

(B) ②③.

(C) ①③.

(D) ②④.

[]

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ \ln(x+1), & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则下述命题正确的是

① 在 $[-1, 1]$ 上 $f(x)$ 存在原函数.

② 存在定积分 $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

③ 在点 $x = 0$ 处, $g'(x)$ 连续.

④ 在 $[-1, 1]$ 上 $g(x)$ 存在原函数.

(A) ①②.

(B) ③④.

(C) ①③.

(D) ②④.

[]

(4) 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, Σ_1 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 则有

(A) $\oint_{\Sigma} z dS = 2 \iint_{\Sigma_1} z dS.$

(B) $\iint_{\Sigma} z dS = 0.$

(C) $\oint_{\Sigma} z^3 dS = 2 \iint_{\Sigma_1} z^3 dS.$

(D) $\oint_{\Sigma} z^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_1} z^2 dx dy.$

[]

(5) 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式 $|B^{-1} - E| =$

(A) $\frac{1}{24}.$

(B) 24.

(C) $\frac{1}{120}.$

(D) 120.

[]

(6) 设 A 为 n 阶矩阵, A 经过若干次初等行变换后的矩阵记成 B , 则

(A) $Ax = b$ 与 $Bx = b$ 同解.

(B) $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 不同解.

(C) $|A| = |B|$.

(D) A, B 的列向量组的极大线性无关组的向量个数相同.

[]

(7) 设连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上的值为零, 在区间 $(0, +\infty)$ 内的值大于零且满足微分方程 $f'(x) = -2f(x)$, 则 $E(X)$ 等于

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 4.

[]

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 其样本均值为 $\bar{X}$. 已知 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2 (\sigma^2 > 0)$, 则未知参数 σ^2 的无偏估计量为

(A) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.

(B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

(C) $\frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$.

(D) $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$.

[]

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - x \sin \frac{1}{x} \right) =$ _____.

(10) 平面 $Ax + By + Cz = 0 (C \neq 0)$ 与柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相交所成椭圆的面积为 _____.

(11) 微分方程 $y''' + 6y'' + 13y' = 0$ 的通解为 _____.

(12) 设 $f_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, f_2(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$, 则 $f_1(x) + f_2(x) =$ _____.

(13) 设 A 为三阶矩阵, 有特征值 1, 2, 3, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 10$, 则 $f(A) =$ _____.

(14) 设每次试验成功的概率为 0.9, 失败的概率为 0.1, 独立地重复试验直到两次成功为止, 记所做的试验次数为 X , 则 $P\{X = 6\} =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

设 S 是平面 $x + y + z = 2$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 截出的有限部分, 计算 $\iint_S x \, dS$.

(16) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且满足

$$x \int_0^x f(t) \, dt = (x+1) \int_0^x t f(t) \, dt, f(1) = 2, \text{ 求 } f(x).$$

(17) (本题满分 10 分)

计算 $\iint_{\Sigma} \frac{2}{y} f(xy^2) \, dy \, dz - \frac{1}{x} f(xy^2) \, dz \, dx + \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \, dx \, dy$, 其中 $f(t)$ 具有连续导数, Σ 为下半

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z < 0)$ 的上侧.

(18) (本题满分 10 分)

求曲线 $y = \ln x$ 上某一点 $(t, \ln t)$ 的一条切线, 使该切线与直线 $x = 1, x = 5$ 及曲线 $y = \ln x$ 所围图形的面积最小.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 连续, $x \in [a, b]$, 且可导, 试证在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$.

(20)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 经正交变换 $X = PY$ 化成标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 求 a, b 及所用的正交变换.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_l = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l$, 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ 线性无关, 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 也线性无关.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, 随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, 且 X 与 Y 相互独立, 求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

设试验 E 成功的概率为 $p (0 < p < 1)$, 将试验 E 独立地重复进行 5 次, 以 X 表示试验成功的次数. 已知总体 X 的样本值如下: 3, 1, 2, 4, 3, 5, 求概率 $q = P\{X = 2\}$ 的最大似然估计值.

参考解答及分析

一、选择题

(1) 分析: (A) 的级数发散. 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0, \text{ 不满足级数收敛的必要条件.}$$

由于当 $n \rightarrow \infty, \frac{4(n-1)}{n^2+n} / \frac{1}{n} \rightarrow 4$,

$$\tan \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ 皆发散, 故 (C)、(D) 的级数皆发散.

(B) 的级数收敛. 因

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 又由 $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 知当 $x > e$, $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' < 0$, 从而 $\frac{\ln x}{x}$ 单调减少, 故当 $n > 3$, 就有

$\frac{\ln(n+1)}{n+1} < \frac{\ln n}{n}$, 即 $a_{n+1} < a_n$. 因此, 由莱布尼兹判别法, 知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ 收敛.

解: 应选 (B).

(2) 分析: $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微 $\Rightarrow f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可导, 但反之未必成立, 说明 ① 不对; ② 正确, 这是教科书上的一条定理; ④ 正确, 这是全微分存在 (即可微) 的定义; ③ 不对, 例如, $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在点 $(0, 0)$ 处偏导数存在, $f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$, 同理 $f'_y(0, 0) = 0$, $\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = \sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}$, $\Delta f - f'_x(0, 0)\Delta x - f'_y(0, 0)\Delta y = \sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|} \rightarrow 0$, (当 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$),

但 $\frac{\Delta f - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y}{\rho} = \frac{\sqrt{|\Delta x| |\Delta y|}}{\rho} \rightarrow 0 (\rho \rightarrow 0)$, 事实上, 只要动点 (x, y) 沿着直线 $y = x$ 趋于点 $(0, 0)$ 即知 (可用 $\Delta y = \Delta x$ 代入验算), 说明虽有 ③ 成立, 但 ④ 不成立, 即不可微. 此例也说明 ① 不成立, 故应选 (D).

解: 应选 (D).

(3) 分析: 若 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上存在原函数 $F(x)$, 则由题设可知在 $[-1, 0]$ 上,

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + c_1;$$

在 $(0, 1]$ 上,

$$F(x) = x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + c_2.$$

因在 $x = 0$ 处, $F(x)$ 连续, 故得 $c_1 = c_2$.

于是

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + c_1, & x \in [-1, 0], \\ x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + c_1, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

由于 $F'_-(0) = 1, F'_+(0) = 0$, 从而 $F'(0)$ 不存在.

故 $F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上不是 $f(x)$ 的原函数, 此与题设矛盾, 即说明 ① 不成立.

又 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有界且只有 1 个间断点, 故 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上可积.

即 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 存在, ② 正确.

因 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ 不存在, 而 $g'(0) = 0$, 故 ③ 不正确.

因在 $[-1, 1]$ 上 $g(x)$ 连续, 故在 $[-1, 1]$ 上 $g(x)$ 存在原函数, 即 ④ 正确.

解: 应选 (D).

(4) 分析: 记 D_{xy} 为曲面 Σ 在 xOy 坐标面上的投影域,

$$\begin{aligned} \text{因 } \iint_{\Sigma} z dS &= \iint_{\Sigma_{\text{上}}} z dS + \iint_{\Sigma_{\text{下}}} z dS \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy + \iint_{D_{xy}} (-\sqrt{1-x^2-y^2}) \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = 0, \end{aligned}$$

故选项 (B) 对,

从而 (A), (C) 不对, 经运算, (D) 也不对.

解: 应选 (B).

(5) 分析: 相似矩阵有相同的特征值, 从而 B 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, B^{-1} 的特征值为 $2, 3, 4, 5$, $B^{-1} - E$ 的特征值为 $1, 2, 3, 4$, 而方阵的行列式等于其全部特征值的乘积, 故 $|B^{-1} - E| = 24$.

解: 应选 (B).

(6) 分析: 因 A 作初等行变换, b 没有动, 故选项 (A) 不成立, 至于 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 应是同解, 故 (B) 不成立, 由 $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$, $|A|$ 与 $|B|$ 可能相差一常数因子, 故选项 (C) 也不成立. 选项 (D) 成立, 事实上, 由 $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$, 不改变矩阵的秩, 即 $r(A) = r(B)$, 从而 A, B 矩阵的列向量组的极大线性无关组的向量个数相同, 即其列秩相同, 也即矩阵 A, B 的秩.

解: 应选 (D).

(7) 分析: 当 $x > 0$ 时, 微分方程 $f'(x) = -2f(x)$ 的通解为

$$f(x) = Ce^{-2x}, \text{ 其中 } C \text{ 是任意正数.}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} C e^{-2x} dx = \frac{C}{2} = 1.$$

因此 $C = 2$. X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

所以

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} 2x e^{-2x} dx = \frac{1}{2}.$$

解: 应选(A).

(8) 分析: 由于 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 与总体 X 具有同一分布, $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (i = 1, 2, \dots, n)$, 因此

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right] &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] = \frac{n\sigma^2}{n-1} \neq \sigma^2, \\ E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] &= \frac{n-1}{n} E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2, \\ E\left[\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right] &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1}^2 + X_i^2 - 2X_i X_{i+1}) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} [(\sigma^2 + \mu^2) + (\sigma^2 + \mu^2) - 2\mu^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2, \\ E\left[\frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right] &= \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (2\sigma^2 + 2\mu^2 - 2\mu^2) = \sigma^2. \end{aligned}$$

解: 应选(C).

二、填空题

(9) 分析: 令 $t = \frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}t^2}{3t^2} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

解: 应填 $\frac{1}{6}$.

(10) 分析: $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, z = \frac{Ax + By}{-C}$.

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \sqrt{1 + \left(-\frac{A}{C}\right)^2 + \left(-\frac{B}{C}\right)^2} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi ab \sqrt{1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2} \\
&= \frac{\pi ab}{|C|} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.
\end{aligned}$$

解:应填 $\frac{\pi ab}{|C|} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

(11) 分析:相应的特征方程为

$$\begin{aligned}
r^3 + 6r^2 + 13r &= 0 \\
\Rightarrow r(r^2 + 6r + 13) &= 0 \\
\Rightarrow r &= 0, -3 \pm 2i.
\end{aligned}$$

于是原方程的通解为

$$y = C_1 + e^{-3x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x) \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ 为任意常数}).$$

解:应填 $y = C_1 + e^{-3x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数).

$$(12) \text{ 分析: 因 } (f_1(x) + f_2(x))' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

故 $f_1(x) + f_2(x) = C$ (常数)

$$\Rightarrow \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = C.$$

令 $x = 1$, 可得 $f_1(x) + f_2(x) = \frac{\pi}{2}$.

解:应填 $\frac{\pi}{2}$.

(13) 分析:由 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 10 = (x-1)(x-2)(x-3) - 4$, 知

$$f(A) = (A-E)(A-2E)(A-3E) - 4E$$

由设, A 有三个互不相同的特征值 1, 2, 3, 从而 $A \sim \Lambda$, 即存在可逆矩阵 B , 使

$$B^{-1}AB = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix},$$

于是 $A = BAB^{-1}$,

代入式 ①, 得

$$\begin{aligned}
f(A) &= (BAB^{-1} - E)(BAB^{-1} - 2E)(BAB^{-1} - 3E) - 4E \\
&= B(\Lambda - E)B^{-1}B(\Lambda - 2E)B^{-1}B(\Lambda - 3E)B^{-1} - 4E \\
&= B \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} B^{-1} - 4E \\
&= -4E.
\end{aligned}$$

解:应填 $-4E$.

(14) 分析:由于随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X = k\} = (k-1)(0.9)^2(1-0.9)^{k-2}, k = 2, 3, \dots,$$

因此

$$P\{X = 6\} = (6-1)(0.9)^2(1-0.9)^{6-2} = 0.000405.$$

解:应填 0.000405.

①

三、解答题

(15) 分析:按第一型曲面积分(对面积的曲面积分)计算之.

解: $z = 2 - x - y$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy,$$

$$\iint_S x dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{3} x dx dy = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^1 r dr = 0 \quad (\text{或由积分域对称性及被积函数为奇函数直接得})$$

0).

(16) 分析:对等式两端求导变成微分方程. 利用初始条件, 解出 $f(x)$, 再由 $f(x)$ 的连续性, 求出 $f(0)$, 即得 $f(x)$ 的表达式.

解:等式两端对 x 求导, 得

$$\int_0^x f(t) dt + xf(x) = \int_0^x tf(t) dt + x(x+1)f(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t) dt = \int_0^x tf(t) dt + x^2 f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = xf(x) + 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$\Rightarrow x^2 f'(x) + 3xf(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = -\frac{1}{x} - 3\ln x + \ln C$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \ln(e^{-\frac{1}{x}} x^{-3} C)$$

$$\Rightarrow f(x) = Cx^{-3} e^{-\frac{1}{x}}$$

当 $x = 1$ 时, $f(x) = 2$, $2 = Ce^{-1}$, 得 $C = 2e$,

故 $f(x) = 2x^{-3} e^{1-\frac{1}{x}} \quad (0 < x \leq 1).$

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad (\text{由题设}),$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2ex^{-3} e^{-\frac{1}{x}} = 2e \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^3}}{e^{\frac{1}{x}}} \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} 2e \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{e^t} = 0.$$

故得

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{1-\frac{1}{x}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(17) 分析:添加平面 $z = 0$, 使积分域成为封闭曲面, 利用高斯公式计算.

解:添加平面 $P: z = 0$, $\Sigma \cup P$ 为封闭曲面,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} &= \oiint_{\Sigma \cup P} - \iint_P \\ &= \oiint_{\Sigma \cup P} \frac{2}{y} f(xy^2) dy dz - \frac{1}{x} f(xy^2) dz dx + \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3}\right) dx dy \\ &= - \iiint_{\Omega} \left[\frac{2y^2}{y} f'(xy^2) - \frac{2xy}{x} f'(xy^2) + (x^2 + y^2 + z^2) \right] dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv \\
&= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr \\
&= -\frac{2}{5}\pi.
\end{aligned}$$

而 $\iint_P = 0,$

故 $\sum \left(\frac{2}{y} f(xy^2) dy dz - \frac{1}{x} f(xy^2) dz dx + \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) dx dy \right) = -\frac{2}{5}\pi.$

(18) 分析: 曲线 $y = \ln x$ 在点 $(t, \ln t)$ 处的切线为

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t), \text{ 即 } y - \ln t = \frac{1}{t}x - 1 \quad (t > 0),$$

利用定积分写出该切线与给定曲线所围成的图形面积, 再求其最小值, 最后求出相应的 t 值及相应的切线方程.

解: 曲线 $y = \ln x$ 在点 $(t, \ln t)$ 处的切线为 $y - \ln t = \frac{1}{t}x - 1$. 所围图形面积为

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^5 (\ln t - 1 + \frac{x}{t} - \ln x) dx \\
&= (\ln t - 1)x \Big|_1^5 + \frac{x^2}{2t} \Big|_1^5 - (x \ln x - x) \Big|_1^5 \\
&= 4 \ln t + \frac{12}{t} - 5 \ln 5 \quad (t > 0).
\end{aligned}$$

求 t , 使 S 最小: $S' = \frac{4}{t} - \frac{12}{t^2} = \frac{4}{t^2}(t - 3)$, 令 $S' = 0$, 得 $t = 3$, $S'' = \frac{24 - 4t}{t^3}$, 当 $t = 3$, $S'' > 0$, 故 $t = 3$ 为极小值点, 也是最小值点, 因此所求切线方程为

$$y - \ln 3 = \frac{1}{3}(x - 3).$$

(19) 分析: 欲证 $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$,

或 $f(\xi) - f(a) = f'(\xi)(b - \xi),$

即 $f'(\xi)(b - \xi) - [f(\xi) - f(a)] = 0$

$$\Rightarrow bf'(\xi) - [\xi f'(\xi) + f(\xi)] + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow [bf(x)]' \Big|_{\xi} - [xf(x)]' \Big|_{\xi} + [f(a)x]' \Big|_{\xi} = 0$$

$$\Rightarrow [bf(x) - xf(x) + f(a)x]' \Big|_{\xi} = 0$$

$$\Rightarrow [(b - x)(f(x) - f(a)) + bf(a)]' \Big|_{\xi} = 0$$

$$\Rightarrow [(b - x)(f(x) - f(a))] \Big|_{\xi} = 0.$$

取辅助函数

$$F(x) = (b - x)[f(x) - f(a)],$$

容易验证 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件, 即可证得.

证:

$$\text{令 } F(x) = (b - x)[f(x) - f(a)],$$

由题设知 $F(x)$ 连续, $x \in [a, b]$, 且可导,

又 $F(a) = F(b) = 0$,

故存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F'(\xi) = 0$.

由 $F'(x) = (b-x)f'(x) - [f(x) - f(a)]$,

得 $F'(\xi) = (b-\xi)f'(\xi) - [f(\xi) - f(a)] = 0$,

即 $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}, \xi \in (a, b)$.

(20) 分析: 此类问题的关键在于正确地写出二次型的矩阵.

解: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$. 其标准形

$f = y_2^2 + 2y_3^2$ 的矩阵为 $B = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$. 显然有 $|A| = |B| = 0$, 由此得 $a = b$.

又 1 (或 2) 为 A 的特征值, 即 $|A - E| = 0$ (或 $|A - 2E| = 0$), 由此得 $a = b = 0$.

由 $(A - 0E)X = 0$, 取特征向量 $P_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

由 $(A - E)X = 0$, 取特征向量 $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

由 $(A - 2E)X = 0$, 取特征向量 $P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

令 $P = (P_1, P_2, P_3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,

则所求正交变换为 $X = PY$.

(21) 分析: 利用线性无关的概念证之.

证: 设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_l\beta_l = 0$

$\Rightarrow (k_1 + k_2 + \cdots + k_l)\alpha_1 + (k_2 + \cdots + k_l)\alpha_2 + \cdots + k_l\alpha_l = 0$,

由设知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ 线性无关, 故有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + \cdots + k_l = 0 \\ k_2 + \cdots + k_l = 0 \\ \cdots \\ k_l = 0 \end{cases}, \text{即}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{①}$$

因系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 从而方程组 ① 只有零解 $k_1 = k_2 = \cdots = k_l = 0$.

因此, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ 线性无关.

(22) 分析: 求解本题, 可以利用卷积公式, 此时要正确定出积分限; 也可以先求出 Z 的分布函数, 再求得 Z 的概率密度.

解: 解法一 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

由于 X 与 Y 相互独立, 利用卷积公式可得 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy.$$

当 $0 < z-y < 1$ 时, $f_X(z-y) = 1$; 当 $y > 0$ 时, $f_Y(y) = e^{-y}$. 由此可知, 当 $0 < y < z < y+1$ (如图 1-1-1 中阴影区域) 时, 有

$$f_X(z-y)f_Y(y) = e^{-y},$$

在其他点处有

$$f_X(z-y)f_Y(y) = 0.$$

因此当 $z \leq 0$ 时, 有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0;$$

当 $0 < z < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^0 0dy + \int_0^z e^{-y}dy + \int_z^{+\infty} 0dy \\ &= 1 - e^{-z}; \end{aligned}$$

当 $z \geq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{z-1} 0dy + \int_{z-1}^z e^{-y}dy + \int_z^{+\infty} 0dy \\ &= (e-1)e^{-z}. \end{aligned}$$

即随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ (e-1)e^{-z}, & z \geq 1, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

解法二 由于 X 与 Y 相互独立, 因此二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < 1, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

随机变量 $Z = X + Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy.$$

如图 1-1-2 所示, 当 $z \leq 0$ 时, 有

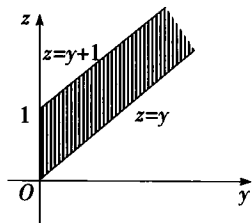


图 1-1-1

$$F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} 0 dx dy = 0;$$

当 $0 < z < 1$ 时,有

$$F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy = z + e^{-z} - 1;$$

当 $z \geq 1$ 时,有

$$F_Z(z) = \int_0^1 dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy = e^{-z} - e^{1-z} + 1,$$

即

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ z + e^{-z} - 1, & 0 < z < 1, \\ e^{-z} - e^{1-z} + 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

由此得 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ (e - 1)e^{-z}, & z \geq 1, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

(23) 分析:由题设可知 $X \sim B(5, p)$. 根据已知的样本值,写出似然函数 $L(p)$, 求出 p 的最大似然估计值 $\hat{p}$. 利用最大似然估计的性质,可求得 $\hat{q} = C_5^2 \hat{p}^2 (1 - \hat{p})^3$.

解:由于总体 X 服从参数为 $5, p (0 < p < 1)$ 的二项分布 $B(5, p)$, 即

$$P\{X = x\} = C_5^x p^x (1 - p)^{5-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

因此,对于已知的样本值 $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 4, x_5 = 3, x_6 = 5$, 似然函数为

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^6 C_5^{x_i} p^{x_i} (1 - p)^{5-x_i} = \prod_{i=1}^6 C_5^{x_i} p^{\sum_{i=1}^6 x_i} (1 - p)^{30 - \sum_{i=1}^6 x_i} \\ &= C_5^3 C_5^1 C_5^2 C_5^4 C_5^3 C_5^5 p^{18} (1 - p)^{12}. \end{aligned}$$

取对数,得

$$\ln L(p) = \ln(C_5^3 C_5^1 C_5^2 C_5^4 C_5^3 C_5^5) + 18 \ln p + 12 \ln(1 - p),$$

将 $\ln L(p)$ 对 p 求导数并令其等于零,得

$$\frac{18}{p} - \frac{12}{1-p} = 0,$$

解得 p 的最大似然估计值为

$$\hat{p} = \frac{18}{30} = 0.6.$$

因为概率

$$q = P\{X = 2\} = C_5^2 p^2 (1 - p)^3,$$

所以根据最大似然估计的性质,得 q 的最大似然估计值为

$$\hat{q} = C_5^2 \hat{p}^2 (1 - \hat{p})^3 = \frac{5 \times 4}{2!} \times 0.6^2 \times (1 - 0.6)^3 = 0.2304.$$

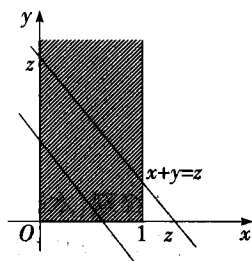


图 1-1-2

2009 年全国硕士研究生入学统一考试 数学一 模拟试卷(2)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 两平行平面 $5x - 14y + 2z + 36 = 0$,
 $5x - 14y + 2z - 9 = 0$

间的距离为

- (A) $\frac{9}{5}$. (B) 3.
 (C) 27. (D) 45.

- (2) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 连续是 $f(x, y)$ 在该点可微的
 (A) 必要条件而非充分条件.
 (B) 充分条件而非必要条件.
 (C) 充分必要条件.
 (D) 既非必要条件又非充分条件.

(3) 下列论断正确的是

- (A) 设 $f(x)$ 在点 $x = a$ 可导,则 $|f(x)|$ 在点 $x = a$ 必可导.
 (B) 设 $f(x)$ 在点 a 的某邻域 $U(a, \delta)$ 内有定义,且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 存在,则 $f'(a)$ 必存在.
 (C) 设 $|a_n| \leq |b_n| (n = 1, 2, \dots)$,且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.
 (D) 设 $|a_n| \leq b_n (n = 1, 2, \dots)$,且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

(4) 设 $f(x)$ 连续, $x \in (-\infty, +\infty)$,则下述论断错误的是

- (A) $\forall a > 0, \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.
 (B) $\forall a > 0, \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数.
 (C) $\forall a > 0$, 常数 $T, \int_a^{a+T} f(x) dx$ 与 a 无关 $\Leftrightarrow f(x)$ 有周期 T .
 (D) $f(x+T) = f(x), \int_0^x f(t) dt$ 有周期 $T \Leftrightarrow \int_0^T f(t) dt = 0$.

(5) 设 $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 皆为整数,则方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \frac{1}{2}x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \frac{1}{2}x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

- (A) 无解. (B) 有唯一解.
(C) 有无穷多解. (D) 解不定.

[]

(6) 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $|A| = 0$, 则 A 中

- (A) 任一行向量是其余各行向量的线性组合.
(B) 必有一行向量是其余各行向量的线性组合.
(C) 必有一行元素全为零.
(D) 必有两行元素对应成比例.

[]

(7) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+6x-9}$, $-\infty < x < +\infty$, 则 $D(X)$ 等于

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 2. (D) 4.

[]

(8) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 则随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度为

- (A) $f_Y(y) = f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})$.
(B) $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})]$.
(C) $f_Y(y) = \begin{cases} f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}), & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$
(D) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} [f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})], & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$

[]

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1 + x \ln x)^{\frac{1}{x}} =$ _____.

(10) 设 $z = f(x, y)$ 可微, 且 $f(x, e^x) = a$ (常数), $f'_1(x, e^x) = -2e^x$, 则 $f'_2(x, e^x) =$ _____.

(11) 设有级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x+1}{3}\right)^n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2$, 则该级数的收敛半径 $R =$ _____.

(12) 设 l 为双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 的右半部分, 则 $\int_l (x + y) dl =$ _____.

(13) 设三阶方阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 则 $A^* + A^2 - 5A$ 的三个特征值分别为 _____.

(14) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 为已知, μ 为未知参数. 从总体 X 中抽取样本容量为 16 的样本值, 算得 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间中的最小长度为 0.588, 则 $\sigma^2 =$ _____.

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, $f(0) = 0$, 试证:

当 $x > 0$, $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 是单调增加的.

(16) (本题满分 10 分)

设 $u = z(x^2 + 3)$, 求向量场 $A = \text{gradu}$ 通过上半球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z > 0)$ 的上侧的流量.