



数理化自学丛书

代 数

第 二 册

数理化自学丛书

代 数（第二册）

数理化自学丛书编委会

数 学 编 写 小 组 编

（原上海科技版）

上海人民出版社出版

广东人民出版社重印

广东省新华书店发行 广州新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 13.875 字数 306,000

1964年2月第1版 1977年11月新1版 1978年8月广东第1次印刷

统一书号：13171·217 定价：0.91元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书代数的第二册，内容包括一元一次方程，一元一次不等式，一次方程组，方根，实数，根式，有理数指数幂，一元二次方程，二元二次方程组等九章，书中对重点、难点以及关键性的内容力求反复详细说明，并有大量例题和习题，以适应自学的需要。书中带有*号的题目较难些，初次练习时可以暂时不做。

本书供学完代数第一册的青年工人、在职干部及知识青年自学之用，也可供中等学校青年教师参考。

重印说明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的。计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册；《物理》四册；《化学》四册。这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序渐进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用。这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎。但是在“四人帮”及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版。

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的“四人帮”。我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期。党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗。许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》。根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要。

十多年来，科学技术的发展是很快的。本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的。同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐。这些，要请读者在阅读时加以注意。

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考。

目 录

重印说明

第一章 一元一次方程和可以化为一元一次方程的分式方程1

- § 1.1 等式1
- § 1.2 方程3
- § 1.3 同解方程6
- § 1.4 方程的两个基本性质... 8
- § 1.5 一元一次方程的解法...16
- § 1.6 列出方程来解应用题...30
- § 1.7 分式方程.....51
- § 1.8 列出分式方程来解应用题.....59

本章提要.....64
复习题一.....65

第二章 一元一次不等式69

- § 2.1 不等式.....69
- § 2.2 不等式的性质.....72
- § 2.3 一元一次不等式和它的解法.....77

本章提要.....86
复习题二.....86

第三章 一次方程组89

- § 3.1 二元一次方程的意义...89
- § 3.2 二元一次方程组的意义.....92
- § 3.3 用代入消元法解二元一次方程组.....94

§ 3.4 用加减消元法解二元一次方程组.....98

§ 3.5 含有字母系数的二元一次方程组的解法 ...104

*§ 3.6 二元一次方程组的解的三种情况107

§ 3.7 三元一次方程和三元一次方程组的意义 ...110

§ 3.8 用代入消元法解三元一次方程组111

§ 3.9 用加减消元法解三元一次方程组113

§ 3.10 可以化为二元一次方程组或者三元一次方程组来解的分式方程组117

§ 3.11 列出方程组解应用题124

本章提要133
复习题三134

第四章 方根137

§ 4.1 方根的意义137

§ 4.2 方根的性质139

§ 4.3 方根的记法141

§ 4.4 算术根143

§ 4.5 完全平方数的开平方148

§ 4.6 开平方的一般方法 ...150

§ 4.7 近似平方根	158	§ 6.12 根式的乘方	245
§ 4.8 平方根表和它的用 法	161	§ 6.13 根式的除法	248
§ 4.9 立方根表和它的用 法	167	§ 6.14 把分母有理化	250
本章提要	169	§ 6.15 根式的开方	256
复习题四	170	§ 6.16 $a \pm 2\sqrt{b}$ 的算术平方 根	257
第五章 实数	173	本章提要	261
§ 5.1 无理数	173	复习题六	263
§ 5.2 实数	178	第七章 有理数指数幂	266
§ 5.3 近似数概念	183	§ 7.1 正整数指数幂	266
§ 5.4 近似数的加法和减 法	191	§ 7.2 零指数幂	268
§ 5.5 近似数的乘法和除 法	194	§ 7.3 负整数指数幂	269
§ 5.6 近似数的乘法和开 方	197	§ 7.4 分数指数幂	274
§ 5.7 近似数的混合运算	199	本章提要	283
§ 5.8 几个常用的求近似值 的公式	206	复习题七	284
本章提要	210	第八章 一元二次方程和可 以化成一元二次方 程来解的方程	286
复习题五	211	§ 8.1 一元二次方程	286
第六章 根式	213	§ 8.2 不完全一元二次方程 的解法	288
§ 6.1 根式的意义	213	§ 8.3 完全一元二次方程的 解法 (一)——因式 分解法	295
§ 6.2 根式的基本性质	216	§ 8.4 完全一元二次方程的 解法 (二)——配方 法	299
§ 6.3 同次根式	219	§ 8.5 完全一元二次方程的 解法 (三)——公式 法	302
§ 6.4 乘积的算术根	220	§ 8.6 一元二次方程的根的 判别式	306
§ 6.5 分式的算术根	223	§ 8.7 列出方程解应用题	311
§ 6.6 根号里面和外面的因 式的移动	225	§ 8.8 一元二次方程的根与 系数的关系 (韦达定	
§ 6.7 化去根号里的分母	228		
§ 6.8 最简根式	231		
§ 6.9 同类根式	235		
§ 6.10 根式的加减法	237		
§ 6.11 根式的乘法	240		

理).....	316
§ 8.9 韦达定理的应用	320
§ 8.10 二次三项式的因式分解	327
§ 8.11 利用十字相乘法分解二次三项式的因式	332
§ 8.12 二元二次多项式的因式分解	337
§ 8.13 双二次方程	339
§ 8.14 可以化成一元二次方程来解的其他特殊的整式方程	342
§ 8.15 分式方程	346
§ 8.16 无理方程	351
本章提要	361
复习题八	362
第九章 二元二次方程组	365
§ 9.1 二元二次方程组	365
§ 9.2 由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组的解法	367
§ 9.3 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(一)——可以消去	

二次项的	376
§ 9.4 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(二)——可以消去一个未知数的	380
§ 9.5 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(三)——一个(或者两个)方程可以分解成两个一次方程的	383
§ 9.6 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(四)——两个方程都没有一次项的	386
§ 9.7 由两个二元二次方程所组成的方程组的解法(五)——可以用除法降低方程的次数	388
本章提要	391
复习题九	391
总复习题	394
习题答案	402

第一章 一元一次方程和可以化为一元一次方程的分式方程

§1.1 等 式

在代数第一册里,我们已经学过代数式. 我们知道,用运算符号把由数字或者字母表示的数连结起来所得的式子,叫做代数式. 例如, $3a$, $-\frac{1}{2}x^2y$, $5x+7$, $\frac{5}{x-2}$, $(x+y)^2$ 等. 我们还知道,单独的一个用数字或者字母表示的数,例如, x , a , 3 , 5.4 等,也可以看做是代数式.

用等号连结两个代数式所成的式子,叫做等式. 例如,

$$m+2m=3m;$$

$$\frac{4x^2}{2x}=2x;$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2; \quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$$x-5=8;$$

$$x^2=9$$

等都是等式.

在等式里,等号左边的代数式,叫做左边;等号右边的代数式,叫做右边. 例如,在等式 $m+2m=3m$ 里,左边是 $m+2m$,右边是 $3m$.

我们来看上面的几个等式. 在等式 $m+2m=3m$ 里,不论 m 等于任何数值,左边和右边的值总是相等的.

等式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 是代数第一册里已经学过的乘法公式,它是多项式乘法的结果,不论 a 和 b 等于任何数

值,左边和右边的值总是相等的。例如,当 $a = -\frac{1}{2}$, $b=0$ 时,左边等于 $\frac{1}{4}$,右边也等于 $\frac{1}{4}$ 。

等式 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 是因式分解中常用的一个立方和公式,不论 a 和 b 等于任何数值,左边和右边的值也总是相等的。

等式 $\frac{4x^2}{2x} = 2x$, 这是根据分式的基本性质,从约分所得的结果。当 $x=0$ 时,分母 $2x$ 等于 0,分式没有意义,所以 x 的数值不允许等于 0。但是除了 $x=0$ 时分式没有意义以外,不论 x 等于其他任何数值,左边的值总是等于右边的值。

这就是说,在上面的四个等式里,不论用任何允许取的数值代替其中的字母,等式总是成立的。

一个等式,不论用任何允许取的数值代替其中的字母,它的左右两边的值总是相等的,这样的等式叫做恒等式。例如,上面所讲的四个等式都是恒等式。

由数字组成的等式,也都是恒等式。例如,下面这些等式,都是恒等式:

$$\begin{aligned} -(7-2) &= -7+2; & (-2)^3 &= -8; \\ 3^2+4^2 &= 5^2; & (7+3 \times 2-3) \div 2 &= 4+1. \end{aligned}$$

我们再来看等式 $x-5=8$ 和 $x^2=9$ 。在等式 $x-5=8$ 里, x 并不是可以取任何数值都能使左右两边的值相等。例如,当 $x=1$ 时,左边等于 -4 ,而右边等于 8 ,两边的值就不相等。所以 $x-5=8$ 虽然是等式,但不是恒等式。

同样,在等式 $x^2=9$ 里, x 也不是可以取任何数值都能使等式成立。例如,当 $x=-5$ 时,左边等于 25 ,而右边等于 9 ,两边的值就不相等,所以 $x^2=9$ 也不是恒等式。

例 判别下列等式是不是恒等式:

(1) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

(2) $2x+5=3x-1$.

【解】 (1) 因为不论 a 和 b 等于任何数值, 左右两边的值总相等. 所以 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 是恒等式.

(2) 因为 x 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等, 例如, 当 $x=5$ 时, 左边等于 15, 而右边等于 14, 两边的值就不相等. 所以 $2x+5=3x-1$ 不是恒等式.

习 题 1·1

1. 等式和代数式有什么区别? 举两个例子来说明.

2. 什么叫做恒等式? 举两个例子.

3. 指出下列等式中, 哪些是恒等式? 哪些不是恒等式?

(1) $4+7=11$;

(2) $x+7=11$;

(3) $3x-5=-2$;

(4) $-(x-4)=4-x$;

(5) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

(6) $x^2 = x \cdot x$;

(7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

(8) $x^2 = 2x$;

(9) $9-2x=x-6$;

(10) $3x-y=1$;

(11) $x+y=y+x$;

(12) $x^2+y=x+y^2$;

(13) $(x-2)(x+1)=x^2-x-2$;

(14) $(x-2)(x+1)=0$;

(15) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$;

(16) $x^3-y^3=1$.

§1·2 方 程

我们来看下面这个问题:

什么数减去 2 等于 3?

如果用 x 表示这个数, 那末可以写出等式

$$x-2=3.$$

因为这里 x 并不是取任何数值都能使左右两边的值相等, 所以 $x-2=3$ 不是恒等式.

在这个等式里, 2 和 3 是问题中已经告诉我们的数, 这种数叫做已知数. 而字母 x 的值, 需要根据它与等式里的已知数 2 和 3 之间的关系来确定的.

等式里字母的值, 需要根据它与等式里的已知数之间的关系来确定的, 这样的字母叫做未知数.

含有未知数的等式, 叫做关于这个未知数的方程, 简称方程. 方程中不含未知数的项叫做常数项.

例如, $x-2=3$ 就是方程. 又如, $5y=2$, $x^2=9$, $x+y=10$ 等也都是方程.

在方程 $x-2=3$ 里, 如果用 5 代替未知数 x , 那末方程左右两边的值相等.

能够使方程左右两边的值相等的未知数的值, 叫做方程的解.

例如, 5 是方程 $x-2=3$ 的解. 又如, 在方程 $5y=2$ 里, 用 $\frac{2}{5}$ 代替未知数 y , 方程左右两边的值相等, 所以 $\frac{2}{5}$ 是方程 $5y=2$ 的解. 在方程 $x^2=9$ 里, 用 3 或者 -3 代替未知数 x , 方程左右两边的值都相等, 所以 3 和 -3 都是方程 $x^2=9$ 的解.

只含有一个未知数的方程的解, 也叫做方程的根. 例如, 方程 $x-2=3$ 的解是 5, 我们也可以说, 方程 $x-2=3$ 的根是 5. 同样可以说, 方程 $5y=2$ 的根是 $\frac{2}{5}$; 方程 $x^2=9$ 的根是 3 和 -3.

求方程的解或根的过程, 叫做解方程.

例 1. 根据下面所说的数量关系, 列出方程:

- (1) x 加上 3 等于 7;
 (2) x 的 4 倍减去 2 等于 x 的 2 倍;
 (3) x 的 5 倍比 x 的 3 倍大 8.

【解】 (1) $x+3=7$;

(2) $4x-2=2x$;

(3) $5x-3x=8$.

说明 x 的 5 倍比 x 的 3 倍大 8, 就是说, x 的 5 倍减去 x 的 3 倍等于 8.

例 2. 检验下列各数是不是方程 $x^2=x+2$ 的根:

- (1) 1; (2) -1; (3) 2.

【解】 (1) 用 1 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x , 这时,

左边 $= 1^2 = 1$, 右边 $= 1+2 = 3$,

\therefore 左边 \neq 右边, \therefore 1 不是方程 $x^2=x+2$ 的根.

(2) 用 -1 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x , 这时,

左边 $= (-1)^2 = 1$, 右边 $= -1+2 = 1$,

\therefore 左边 $=$ 右边, \therefore -1 是方程 $x^2=x+2$ 的根.

(3) 用 2 代替方程 $x^2=x+2$ 里的 x , 这时,

左边 $= 2^2 = 4$, 右边 $= 2+2 = 4$,

\therefore 左边 $=$ 右边, \therefore 2 是方程 $x^2=x+2$ 的根.

注 符号“ \neq ”读做“不等于”. 有些书上写成“ \neq ”, 是通用的.

习 题 1.2

1. 用方程来表示下列数量关系:

- (1) x 减去 6 等于 3;
 (2) x 的 4 倍加上 5 等于 13;
 (3) x 的 2 倍加上 7 等于它的 5 倍减去 8;
 (4) x 的 3 倍比 x 的 5 倍小 4;

(5) y 比 y 的 $\frac{1}{4}$ 大 12;

(6) x 的 $\frac{1}{3}$ 与 x 的 $\frac{2}{5}$ 的和等于 22;

(7) x 与 2 的差的 5 倍等于 15;

(8) x 与 3 的和平方的平方等于 x 的 10 倍与 6 的和。

2. 什么叫做方程的根? 用下列方程后面括号里的数值一一代替方程中的未知数, 指出哪些是方程的根? 哪些不是方程的根?

(1) $x+2=0$, (2, -2);

(2) $2x-5=1$, (3, 4);

(3) $2x=6$, (3, -3);

(4) $x^2=9$, (3, -3);

(5) $x^2-x=6$, (3, -2);

(6) $(x-3)(x+3)=0$, (-3, 3, 0);

(7) $3x+8=\frac{x}{4}-14$, (8, -8);

(8) $2x(3x+2)=0$, $(-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})$;

(9) $x(x-2)=8$, (-2, 2, -4, 4);

(10) $x^3-7x=6$, (1, 2, -3).

§1.3 同解方程

我们来看下面的两个方程:

$$3x-2=4, \quad (1)$$

$$3x=6. \quad (2)$$

如果用 $x=2$ 代入方程(1)时, 方程两边的值都等于 4, 所以 2 是方程(1)的根. 如果用 2 以外的任何数值代替方程(1)里的 x , 例如用 5 代替 x , 左边的值等于 13, 右边的值等于 4, 这时方程两边的值就不相等, 所以 5 不是方程(1)的根. 因此, 方程(1)只有一个根 2.

用同样的方法,我们可以知道方程(2)也只有一个根2.这就是说,方程(1)的根和方程(2)的根完全相同.

两个方程,如果第一个方程的根都是第二个方程的根,并且第二个方程的根也都是第一个方程的根,那末这两个方程叫做同解方程.

例如,方程(1)和方程(2)是同解方程.

又如,在习题1·2的第2题里,我们已经做过,知道方程 $2x-5=1$ 的根是3,方程 $2x=6$ 的根也是3,所以方程 $2x-5=1$ 和方程 $2x=6$ 是同解方程.

方程 $x^2=9$ 有两个根-3和3,方程 $(x-3)(x+3)=0$ 也有两个根-3和3,所以方程 $x^2=9$ 和方程 $(x-3)(x+3)=0$ 是同解方程.

但是,方程 $x+2=0$ 的根是-2,方程 $x^2-x=6$ 的根是-2和3,虽然方程 $x+2=0$ 的根是方程 $x^2-x=6$ 的根,但是方程 $x^2-x=6$ 的两个根里,只有一个根-2是方程 $x+2=0$ 的根,而另一个根3却不是方程 $x+2=0$ 的根,所以这两个方程就不是同解方程.

例 已知方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有而且只有两个根:-2和 $\frac{1}{2}$,方程 $2x^2+3x=2$ 有而且只有两个根: $\frac{1}{2}$ 和-2,判别这两个方程是同解方程吗?

【解】 因为方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 有两个根,它们都是方程 $2x^2+3x=2$ 的根,并且方程 $2x^2+3x=2$ 有两个根,它们也都是方程 $(x+2)(2x-1)=0$ 的根,所以这两个方程是同解方程.

习 题 1·3

1. (1) 什么叫做同解方程?

(2) 方程 $5x=10$ 和方程 $x+1=3$ 是不是同解方程?

2. (1) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 5 和 3, 这两个方程是不是同解方程?

(2) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 3 和 -5, 这两个方程是不是同解方程?

(3) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 5, 这两个方程是不是同解方程?

(4) 第一个方程的根是 3 和 5, 第二个方程的根是 3, 5 和 6, 这两个方程是不是同解方程?

3. 下列方程后面的括号里的数是这个方程全部的根, 指出下列方程中哪些是同解方程:

(1) $2x-3=x$, (3); (2) $2x-1=3x$, (-1);

(3) $(x+1)(x-3)=0$, (-1, 3); (4) $5x-8=2x+1$, (3);

(5) $x^2-3x=0$, (0, 3); (6) $x^2-3=2x$, (3, -1).

[解法举例: 方程 $2x-3=x$ 的根是方程 $5x-8=2x+1$ 的根, 方程 $5x-8=2x+1$ 的根也是方程 $2x-3=x$ 的根, 所以这两个方程是同解方程.]

4. (1) $\frac{1}{2}$ 和 -3 是方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 的根吗?

(2) 方程 $2x-1=0$ 和方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 是不是同解方程?

(3) 方程 $(2x-1)(x+3)=0$ 和方程 $x+3=0$ 是不是同解方程?

5. (1) 5 是方程 $2x+1=3x-4$ 的根吗? 4 是方程 $2x+4=3x-1$ 的根吗?

(2) 方程 $2x+1=3x-4$ 和方程 $2x+4=3x-1$ 是不是同解方程?

§1.4 方程的两个基本性质

在上一节里, 要判别一个方程和另一个方程是不是同解方程, 我们需要把两个方程的根一一代入检验, 这样的方法是很麻烦的. 为了解决这个问题, 并且能够正确地掌握解方程的方法, 我们先来研究方程的两个基本性质.

1. 方程的第一个基本性质 我们看下面一个问题。

什么数减去 3 等于 7?

如果设某数为 x , 可以列出方程

$$x-3=7.$$

我们如果用算术方法来考虑: 某数减去 3 所得的差是 7, 大家都知道, 这个某数(即被减数)等于差 7 与减数 3 的和. 列出方程, 可以得到

$$x=7+3.$$

这里, 当 $x=10$ 的时候, 方程 $x-3=7$ 的两边都等于 7, 方程 $x=7+3$ 的两边都等于 10. 这就是说, 10 是方程 $x-3=7$ 的根, 也是方程 $x=7+3$ 的根. 所以方程 $x-3=7$ 和方程 $x=7+3$ 是同解方程.

从这个例子, 我们可以得出一个性质:

方程的两边都加上(或者都减去)同一个数, 所得的方程和原方程是同解方程.

再看下面这个方程:

$$3x-2=10.$$

从这个方程的两边都减去同一个整式 $2x-1$, 得到

$$3x-2-(2x-1)=10-(2x-1).$$

当 $x=4$ 的时候, 方程 $3x-2=10$ 的两边相等, 这时 $2x-1=7$, 所以两边都减去整式 $2x-1$, 实际上就是两边都减去 7, 因此方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 的两边也相等. 所以我们知道方程 $3x-2=10$ 和方程 $3x-2-(2x-1)=10-(2x-1)$ 也是同解方程.

根据上面所说的, 我们得到方程的第一个基本性质:

方程的两边都加上(或者都减去)同一个数或者同一个整式, 所得的方程和原方程是同解方程.

例 1. 把下列方程变形成它的同解方程，使方程的左边只留下一个未知数 x ，而右边是用数字表示的数：

$$(1) x-5=8;$$

$$(2) 9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}.$$

分析 利用方程的第一个基本性质，我们可以把原方程变形成它的最简单形式的同解方程。

【解】 (1) $x-5=8.$

方程的两边都加上 5，得

$$x=8+5,$$

就是

$$x=13.$$

$$(2) 9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}.$$

方程的两边都加上一个整式 $-8x+\frac{7}{10}$ ，得

$$9x-8x=\frac{3}{5}+\frac{7}{10}.$$

合并同类项，得

$$x=1\frac{3}{10}.$$

注意 把方程逐步变形成它的同解方程时，不可以用“=”把前后两个方程连结起来。例如，从方程 $x-5=8$ 得出它的同解方程 $x=8+5$ ，不能错误地写成 $x-5=8=x=8+5$ ，应该按照上面例题中那样一步一步分开写。很明显，如果照 $x-5=8=x=8+5$ 这样的写法，就会得出 $8=8+5$ 这样一个错误的结论。

例 2. 证明方程 $9x-\frac{7}{10}=8x+\frac{3}{5}$ 和方程 $x=1\frac{3}{10}$ 是同解方程。