随机信号分析基础

王永德 编

四川大学出版社

随机信号分析基础

王永德　编

四川大学出版社

一九九三年·成都

(川)新登字014号

责任编辑：杨守智
封面设计：冯先洁
技术设计：杨守智

随机信号分析基础

王永德　编

四川大学出版社出版发行　　(四川大学校内)
四川省新华书店经销　　四川省郫县犀浦印刷厂印刷
850×1168 mm　32开本　　9.75 印张　　240 千字
1993年10月第一版　　1993年10月第一次印刷
印数：0001—3000 册
ISBN 7-5614-0937-0/TN·6　　定价：5.50 元

目　录

第一章　导　论

第二章　随机过程

第三章　随机过程的功率谱密度

第一章 导 论

"随机信号分析基础"作为理科无线电电子学类型专业的一门专业基础课，主要学习哪些内容？为什么要学习这些内容？这门课有何特点以及如何学习这门课程？这是导论中要讨论的问题。

§1·1 课程内容简介

无线电电子学的一个最重要的应用是进行信息的传输、提取与处理。由于无线电波在空间是以光速传播的，加之无线电波最易于产生、控制，所以在电磁波谱中，尽管随着激光与光纤技术的飞速发展，光通信有着广泛的前景，但无线电波段仍然是被用作进行信息传输的主要波段。人们把要传送的信息，由无线电波来运载，通过传输媒介（一般称为信道）传送到目的地，然后经过解调还原成接收者感兴趣的信息。图1·1示出了典型的信息传送系统的模型。

图1·1 信息传输模型

怎样一种信息传输系统才是一个好的信息传输系统呢？对它有什么要求呢？一般来讲对它有两条互相制约的要求，一是有效性；二是可靠性。简单地讲，所谓有效性即要求系统在单位时间

内能传送尽可能多的信息；而可靠性则是要求系统传输的信息可靠逼真或者正确无误。什么因素影响信息传输系统的有效性与可靠性呢？除了设备本身技术不完善，频带有限等因素外，主要原因是因为无线电信号（其它信号也一样，只不过情况不同而已）在传输过程中不可避免地引入各式各样的干扰或者噪声（各种外界干扰，比如天电干扰、工业干扰、有意识无意识的人为干扰以及接收机内部噪声等）。由于干扰的存在极大地降低了信息传输的可靠性与有效性，因而在无线电电子学各个领域，与干扰作斗争一直是一个长期的，艰巨的任务。特别是电子技术高度发展的今天，一方面随着各种武器的自动化，人为干扰与反干扰（电子战）的斗争更加激烈；另一方面随着信息传输系统急剧增加，空间电磁波的拥挤使得电子设备之间无意识干扰更为严重。加上电子学已深入到生物、医学、石油、物探等新的领域，从而一些新的干扰形成也摆在人们的面前有待我们去研究解决。“随机信号分析基础”正是研究这些干扰或噪声的各种特点，如何用一种数学形式或数学模型去表征它们，它们通过电子系统（线性、非线性）的变化以及采用怎样的处理方式使得干扰造成的危害达到最小的一门基础学科。典型的干扰是一种随机过程，因而只能采用统计数学的方法去加以研究，因而这门学科也称为统计无线电或统计信号处理等。

实际上稍加注意就会发现，不光干扰是一随机过程，很多实际情况下的信号本身也是一随机过程。比如语音信号，由于目标（如飞机）的起伏，雷达接收机收到的回波信号、人的指纹、某条河流的水位、经济行情等等都可以看成是随机信号。因而本门课为很多学科提供必备的基础知识。本课不可能广泛地讨论这些应用，作为结合点，我们主要从信息传输系统中接收端的角度研究干扰、信号的分析，变换与处理的基本理论与方法。掌握好这些基础，需要时，将它应用于其它一些领域是不困难的。

§1·2 课程特点与学习方法

在本课程之前，我们所接触的大多数课程都是建立在因果律或说确定性的基础上，因而我们的思维方法也往往是这样的，对具体的函数、波形，必然结果感兴趣。初学这门课程，有时还会感到这门学科不可靠，模糊，难懂。为此，必须从这门课的特点出发，采用不同的学习方法才能对本门课有较好的掌握。归纳起来本门课有以下三个特点：

（1）统计的概念：由于对随机过程（信号）来讲，我们往往不是对一个实验结果（一个现实）感兴趣，而是关心的大量实验结果的某些平均量（统计特性）。因而描述方式，以及推演方式都应以统计特性为出发点。这样，仅管从个别的现实看不出什么规律性的东西，从统计的角度确表现出一定的规律性了，这就是统计规律性。这是本门学科一个最根本的概念，从一开始就必须加以注意。

（2）模型的概念：本课程重点研究一般化（抽象化）的无线电系统，干扰和信号。因而对它们往往仅给出它们的系统函数（模型），和数学模型，而不讨论具体的系统，更不会局限于一些具体的电路上。举出一些具体的电路系统例子也只是用于说明一般的带普遍性的问题和处理方法。

（3）物理概念：本门课是无线电电子学有关专业的一门专业基础课程，而不是一门数学课。概率论与数理统计只是处理本门学科有关问题的一种数学工具，或说一种解决问题的手段。因而学习本门课程除了注意处理问题的方法外，更重要的是对一些数学推演之结果、结论的物理意义有深入的理解。对一些十分复杂的数学推演中间步骤不要死记硬背，更不必深究其数学的严密性，而重点掌握处理问题的思路与方法。比如有些复杂的积分运

算可以借助于积分表等。

因而在学习方法上，重点突出抓住上述三个概念，学习时既要理论联系实际，又要学会建立数学模型的抽象思维方法。本门课程虽属基础理论性课程，但要真正掌握住上述三个概念，能够应用它解决实际问题，必须演算大量的习题。因而本书选编了大量的习题，除每章指定必作题以外，其它题也可根据自己的情况加以选作。

另外，利用计算机为工具，对特定随机过程采集的实验数据，或者直接由计算机模拟实际过程产生的数据进行统计分析是研究随机过程的重要方法。因而在本教材中我们也选编了部分典型程序和上机操作的习题，相信这些内容对初学掌握用现代分析手段研究、分析随机过程是会有所帮助的。

第二章　随机过程

在本章中我们让读者来熟悉、理解随机信号（或随机过程）的基本概念。首先我们可能会想，什么是随机信号？随机信号有什么用？随机信号如何携带信息？等等。术语“随机”是指“不可预知”或“不确定”的意思。随机过程是与确定性过程相对立的一个概念。从信息论的观点，对接收者来讲只有信号表现出某种不可预测性才可能温涵信息。因为如果在信号收到之前接收者已准确地预测它的一切，则这种信号是毫无用处的。类似地，若接收者能从信号的过去准确地预测它的将来，则将来的部分信号即成为多余。再如我们去测量某个物理量总是希望得到一些“新”的结果，即这个结果是我们利用以往的知识或以往的测量不能准确预知的。上述论述并不是说随机信号都是完全不可预测的。由于产生该信号的系统或传输媒质的限制，一般随机信号往往表现出部分可预测性，比如在事件发生以前我们可以知道它的取值范围〔$-a$，a〕，或者某一具体时刻取某个值的可能性（概率）及起伏速率的上限等等。

除了有用信号表现出不确定性外，另一因素就是我们在测量或接收一个信号时往往受到噪声（这里指一切干扰信号和扰动的总称）的污染。这里需要注意的是，信号的不可预测性是指它们运载信息的能力，而噪声的不可预知性则有损于上述能力。然而，虽然信号与噪声都是不可预知的，或说都是随机过程，但是它们在其特征上（主要指统计特性）仍然存在差别，因而我们可以在某种程度上将它们分离，并从中尽可能地恢复出感兴趣的信

息。这也正是我们要研究随机信号的统计特性及其与系统相互作用的目的之一。

§2·1 随机过程的概念及其统计特性

一、随机过程的概念

在统计数学课程中，我们研究的对象是随机变量。随机变量的特点是：在每次试验的结果中，以一定的概率取某个事先未知，但为确定的数值。在电子技术中，我们常常涉及在试验过程中的随着时间而改变的随机变量。例如，接收机的噪声电压就是随时间而随机变化的。我们把这种随时间而变化的随机变量，称为随机过程。一般来说，试验过程中随机变量也有可能随其它某个参量变化，例如，研究大气层中的空气温度时，可把它看作随高度而变化的随机变量，这时的参变量是高度。我们通常把这种随某个参量而变化的随机变量称为随机函数，而把以时间 t 作为参变量的随机函数称作随机过程。实际研究的随机过程中，随机变量有可能是一维的，也有可能是多维的，本书主要讨论一维随机变量随时间变化所构成的随机过程。

我们还可以换一个角度来介绍随机过程的概念。假如我们对接收的输出噪声电压（电流）作“单次”观察时，可能得到如图2·1中所示的某一条起伏波形 $x_1(t)$，实际上，在实验结果中出现的噪声电压具体波形也可能是 $x_2(t)$ 或 $x_3(t)$…等等，具体波形的形状事先不能确知，但必为所有可能的波形中的某一个，而所有这些可能的波形 $x_1(t)$，$x_2(t)$…，$x_n(t)$，…的集合(或总体）构成了随机过程的样本函数或实现。在一次实验结果中，随机过程必取一个样本函数，但究竟取哪一个则带有随机性。这就是说，在试验前不能确知取哪一个样本函数，但经大量的观察会发现它具有某种统计规律性。因此，随机过程即是时间 t 的函数，也是

随机试验可能结果ζ的函数，可记为$X(t, \zeta)$。

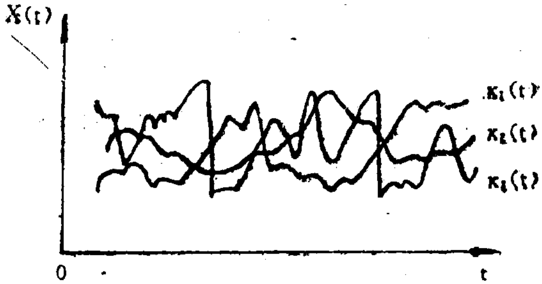

图2·1 噪声电压的起伏波形

类似于随机变量的定义，可给出随机过程的定义如下，设E是随机试验，它的样本空间是$S=\{\zeta\}$，若对每个$\zeta\ni\{S\}$，总有一个确定时间函数$X(t, \zeta)$，$t\in T$与它相对应。这样对于所有的$\zeta\ni\{S\}$，就可得到一族时间t的函数，称为随机过程。族中的每一个函数称为这个随机过程的样本函数。

对于一个特定的试验结果ζ_i，则$X(t, \zeta_i)$是一个确定的时间函数，对于一个特定的时间t_i，$X(t_i, \zeta)$取决于ζ，是个随机变量，根据这一点，我们也可把随机过程看成：依赖于时间t的一族随机变量。

通常为了简便，我们书写时省去符号ζ，而将随机过程记为$X(t)$。

根据以上讨论，可列出$X(t)$在四种不同情况下的意义：

（1）一个时间函数族（t，ζ都是可变量）；

（2）一个确定的时间函数（t是可变量，ζ固定）；

（3）一个随机变量（t固定，ζ是可变量）；

（4）一个确定值（t固定，ζ固定）。

二、随机过程的分类

随机过程类型很多，分类方法也有多种，这里我们给出以下

三种：

（一）按照时间和状态（我们称$X(t_1)$为随机过程$X(t)$在$t=t_1$时的状态）是连续还是离散来分类，可分成四类：

（1）连续型随机过程：$X(t)$对于任意的$t_1\in T$，$X(t_1)$都是连续型随机变量，也就是时间和状态都是连续的情况。例如们前面曾提到过的接收机输出噪声电压就属于这类随机过程。自然界许多真实存在的随机过程大多数属于连续随机过程。

（2）离散型随机过程：$X(t)$对任意的$t_1\in T$，$X(t_1)$都是离散型随机变量，也就是时间连续，状态离散的情况。例如由硬限幅电路输出的随机过程（图2·2示出它的一族样本函数曲线），由于它在任一时刻，只可能取正或负两个固定离散值，所以是一个离散型的随机过程。

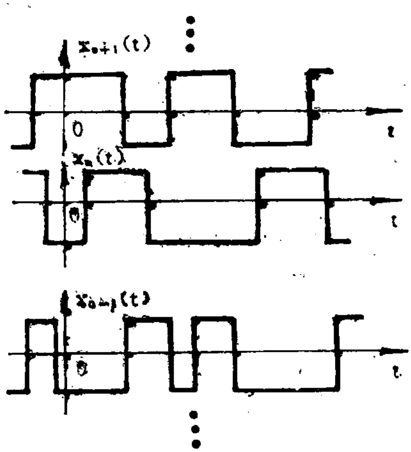

图2·2　离散型随机过程的一族样本函数

（3）连续随机序列：随机过程$X(t)$，在任一离散时刻的状态是连续型随机变量，也就是时间离散，状态连续的情况，它实际上可以通过对连续型随机过程，接连等间隔抽样得到，例如在时间域$T\{\Delta t,\ 2\Delta t,\ 3\Delta t,\cdots\}$上对接收机输出噪声电压过程$V(t)$

进行取样，就可得到一个随机序列V_1，V_2，…，V_n，…其中$V_n = V(n\Delta t)$。

（4）离散型随机序列：相应于时间和状态（随机变量）都是离散的情况。为了适应数字处理的需要，对连续型随机序列进行量化、分层，即得到这种离散随机序列。

（二）按照样本函数的形式不同，可分为确定的随机过程和不确定的随机过程两类。

（1）不确定随机过程：如果任意样本函数的未来值，不能由过去观测值准确地预测，则这个过程称为不确定随机过程，图2·1所示过程即为一例。

（2）确定的随机过程：如果任意样本函数的未来值，可以由过去观测值预测，则这个过程称为确定的随机过程。常见的例子是由下式定义的随机过程：

$$X(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (2\cdot1\cdot1)$$

式中：A、φ或ω（或者全部）是随机变量。对于该过程的任一个样本函数，这些随机变量都是取一个具体值，因此若对以前任意段时间的样本函数值已知，就可以预测样本函数的未来值。

（三）按照随机过程的分布函数（或概率密度）的不同特性进行分类。

这是一种更加本质的分类方法，按这种分类法，比较重要的有平稳随机过程，马尔可夫(Markov)过程、独立增量过程和独立随机过程等。平稳随机过程是本章重点研究的对象，其它三种我们在第七章中详细介绍。

三、随机过程的概率分布

当我们用记录器来记录$X(t)$的变化过程时，不可能连续记下全过程，而只能记下$X(t)$在确定时刻t_1，t_2，…，t_n下的量。前面已指出，在确定t值上，随机过程变成通常的随机变量，于是记录器的记录结果是n维维随机变量$X(t_1)X$，(t_2)，…，$X(t_n)$。

显然，记录器的记录速度相当高时，也就是记录时间间隔 $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ 相当小（亦即n足够大）时，多维随机变量$X(t_1)$，$X(t_2)$，…，$X(t_n)$就可以足够精确地表示出随机过程$X(t)$。这样，在一定的近似程度上，我们可以通过研究多维随机变量来代替对随机过程的研究。而且n的值取得愈大，这种代替就愈精确。当$n\to\infty$时，随机过程的概念可作为多随随变量的概念在维数无穷多（不可列）情况下的自然推广。图2·3绘出了随机过程示意图。

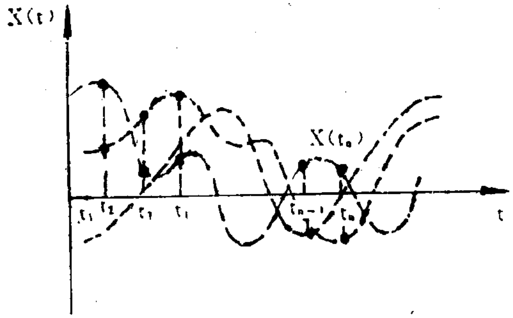

图2·3　随机过程$X(t)$

根据对随机过程的上述理解，以及以前对随机变量所作的研究，可以给出描述随机过程统计特性的概率分布函数和概率密度。

随机过程$X(t)$，对于每一个固定的$t_1\in T$，$X(t_1)$是一个随机变量，它的分布函数记为：

$$F_X(x_1,\ t_1)=P\{X(t_1)\leqslant x_1\} \qquad (2\cdot1\cdot2)$$

它是x_1和t_1的二元函数，$F_X(x_1,\ t_1)$为随机过程$X(t)$的一维分布函数。

同随机变量一样，若$F_X(x_1,\ t_1)$对x的偏导数存在*，则有

* 为了讨论问题简便和减少重复，我们在下面章节对随机过程的各种概念和定义的介绍中，主要讨论概率密度存在的情况。

$$p_X(x_1, t_1) = \frac{\partial F_X(x_1, t_1)}{\partial x_1} \tag{2·1·3}$$

$p_X(x_1, t_1)$称作随机过程 $X(t)$的一维概率密度。$p_X(x_1, t_1)$也是时间t_1和状态x_1的函数，有时也把它表示为$p_X(x, t)$。一般而言，对应不同时刻t的$p_X(x, t)$是不相同的。

显然，随机过程的一维分布函数和一维概率密度具有普通随机变量的分布函数和概率密度的各种性质，其差别在于前者还是 t 的函数。p5

一维布布函数和一维概率密度仅给出了随机过程最简单的概率分布特性，它们只能描述随过过程在各个孤立时刻的统计特性，而不能反映随机过程在不同时刻的状态之间的联系。

为了描述随机过程$X(t)$在任意两个时刻t_1和t_2的状态之间的统计关系，可以引入二维随机变量〔$X(t_1)$，$X(t_2)$〕的分布函数，并记为

$$F_X(x_1, x_2;\ t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leqslant x_1,\ X(t_2) \leqslant x_2\} \tag{2·1·4}$$

称之为随机过程$X(t)$的二维分布函数。若$F_x(x_1, x_2;\ t_1, t_2)$对x_1，x_2的二阶偏导数存在，则有

$$p_X(x_1, x_2;\ t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2;\ t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{2·1·5}$$

称之为随机过程$X(t)$的二维概率密度。

随机过程的二维分布律比一维分布律包含了更多的信息，但它仍不能完整地反映出随机过程的全部统计特性。用同样的方法，我们可以引入随机过程$X(t)$的n维分布函数和n维概率密度：

$$\begin{aligned} &F_X(x_1, x_2, \cdots, x_x;\ t_1, t_2, \cdots, t_n) \\ &\quad = P\{X_1(t_1) \leqslant x_1, X(t_2) \leqslant x_2, \cdots, X(t_n) \leqslant x_n\} \end{aligned} \tag{2·1·6}$$

$$p_X(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ t_1, \cdots, t_2, t_n)$$

$$= \frac{\partial^n F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ t_1, t_2, \cdots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \tag{2·1·7}$$

显然，n取得愈大，随机过程的n维分布律描述随机过程的特性也愈趋完善。从理论上说，可以无限地增加n（或者说减小时间间隔），使得n维分布律更加全面地反映出$X(t)$的统计特性。但在实际上，n愈大分析、处理会变得愈复杂。

还需指出，实际中我们还常会遇到需要同时研究两个或两个以上随机过程的情况。下面仍用上述方法，引入两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$的联合分布函数与联合概率密度函数

$$F_{X,Y}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m;\ t_1, \cdots, t_n, t'_1, \cdots, t'_m)$$

$$= P\{X(t_1) \leqslant x_1, \cdots, X(t_n) \leqslant x_n, Y(t'_1) \leqslant y_1, \cdots, Y(t)'_m \leqslant y_m\} \tag{2·1·3}$$

$$P_{X,Y}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m;\ t_1, \cdots, t_n,\ t'_1, \cdots, t'_m)$$

$$= \frac{\partial^{n+m} F_{X,Y}(x_1, \cdots . x_n, y_1, \cdots, y_m;\ t_1, \cdots, t_n, t', \cdots t'_m)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n\ \partial y_1 \cdots \partial y_m} \tag{2·1·9}$$

若两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$相互独立，则有

$$p_{X,Y}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m;\ t_1, \cdots, t_n, t'_1, \cdots, t'_m)$$

$$= p_X(x_1, \cdots, x_n;\ t_1, \cdots, t_n)\ p_Y(y_1, \cdots, y_m;\ t'_1, \cdots, t'_m) \tag{2·1·10}$$

显然，若两个随机过程的$n+m$维概率分布给定，则两个随机过程的全部统计特性也就确定。

四、随机过程的数字特征

虽然随机过程的多维分布律能够比较全面地描述整个过程的统计特征，但是比较复杂，使用不便。此外，在许多实际应用中，往往研究若干常用的数字特征就能满足要求。这样，在实际