全国高等教育自学考试教材

拓扑学

左再思　黄锦能　编著

武汉大学出版社

全国高等教育自学考试教材

拓 扑 学

黄锦能 编著

武 汉 大 学 出 版 社

1992

全国高等教育自学考试教材

拓 扑 学

左再思 黄锦能 编著

*

武汉大学出版社出版发行
（430072 武昌 珞珈山）
湖北省安陆市印刷厂印刷

*

850×1168 32开本 10.375印张 261千字
1992年5月第1版 1992年5月第1次印刷
印数：1—1300
ISBN 7—307—01264—2/O·104
定价：5.40元

出 版 前 言

高等教育自学考试教材建设是高等教育自学考试工作的一项基本建设。经国家教育委员会同意，我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材，以满足社会自学和适应考试的需要。《拓扑学》是为高等教育自学考试数学专业组编的一套教材中的一种。这本教材根据专业考试计划，从造就和选拔人才的需要出发，按照全国颁布的《数学专业自学考试大纲》的要求，结合自学考试的特点，组织高等院校一些专家学者集体编写而成。

数学专业《拓扑学》自学考试教材，是供个人自学、社会助学和国家考试使用的。无疑也适用于其他相同专业方面的学习需要。现经审定同意予以出版发行。我们相信，随着高教自学考试教材的陆续出版，必将对我国高等教育事业的发展，保证自学考试的质量起到积极的促进作用。

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试，希望得到社会各方面的关怀和支持，使它在使用中不断提高和日臻完善。

全国高等教育自学考试指导委员会

一九八九年一月

序　　言

这本教材是根据全国高等教育自学考试指导委员会编印的《高等教育自学考试数学专业自学考试大纲》而写成的. 这个大纲已于 1987 年由北京大学出版社出版. 总的指导思想、计划等，都已在该书中给出，这里不重复了.

这门课列在本科课程考试计划的部分. 大纲中对课程的性质与任务作了如下的说明：

“拓扑学是一个基础性的数学分支. 它的一些概念、理论和方法在数学的其它领域(如微分几何、泛函分析、微分方程等等)中有着广泛的应用，有的甚至已成为通用语言；在物理学、经济学以及工程学中也都有应用. 拓扑学的许多基本概念和理论是学习和研究近代数学所不可缺少的基础.”

本课程是数学专业专业课程的一门选修课.

本课程的目的是学习拓扑学的一些最基本的概念、理论、方法和问题，从而对拓扑学有一个初步的了解. 它既是学习和研究拓扑学的入门课程，又为深入学习微分几何、泛函分析和微分方程等课程提供必要的基础知识.

本课程的内容可分为两大部分：点集拓扑部分和代数拓扑部分.

点集拓扑部分包括：拓扑空间与连续映射的基本概念和性质；分离性、可数性、紧致性和连通性等最基本的拓扑性质；乘积空间及商空间的拓扑结构等等.

代数拓扑部分包括代数拓扑学中最直观、最简单的一些内容：

基本群和同调群，以及它们的应用．通过这部分的学习，初步认识用代数工具研究拓扑问题的重要性及基本途径．

点集拓扑部分的内容与微积分、实变函数、泛函分析等分析学课程有密切联系．许多基本概念在分析学中已经出现过，本课程中只是对它们加以总结提高，给出一般化的（从而也是抽象化的）形式，并进一步加以讨论．尽管在本课程中用公理化的形式规定这些概念时并不直接用到分析学中的内容，但良好的分析学基础是理解这部分内容的前提．反过来，学习这部分内容又能加深对分析学中相应内容的理解．

点集拓扑部分还要求对集合和集合到集合的映射（变换）等概念预先有较好的了解．

代数拓扑的特点是以代数为工具来研究拓扑，在拓扑空间上建立某种代数结构，从而可援引代数学的方法、结论来反映拓扑性质．学习代数拓扑部分的内容要求预先对抽象代数中的一些基本概念和基本性质（主要是群、交换群、同态与同构、子群与商群等）有较好的了解．

拓扑学是几何学的一个分支，它的许多概念都有直观形象的几何背景．但是另一方面，它在形式上又是很抽象的．它的概念都是直接或间接地用公理化的方法建立的，计算少而推理、论证多．因此，虽然它并不要求很多准备知识，但却要求有一定的数学能力，而学习本课程对于提高和培养抽象思维和逻辑推理能力有很大帮助．

本书即按照上述的要求编写而成．其内容和顺序，基本上是沿大纲所列来写．但在某些细节的处理，材料的取舍及次序的安排上，做了局部的调整，以利于自学，或适应理论自身的要求．

拓扑学的理论是重要的，作为数学专业的学生应该学习和掌握．同时，通过这门课的学习得到数学修养方面的提高，也是一个重要目的．这也源于拓扑课自身的特点．因此，编写此书，要照顾到这两方面的目的，并将其结合起来．这方面，经过课堂学

习的大学生是都有体会的．自学的读者能否达到这个目的，尚需实践的检验．

我们在编写的过程中时刻记着这个目的．但是，编写者自己只有课堂教学的经验，缺少指导自学的经验．对于自学的读者将要遇到的问题、困难、苦恼，只能凭道理推测，而无感性的认识．因此，可以肯定这书是不完善的．

万事总要起个头，只好先编出来再说．故使用这本书的读者还负有反馈信息之责任．把自学过程中发现的矛盾，对本书改编之意见令出版者知道，以利于修改，是非常必要的．我们不拟在此按公式写道“本人水平有限(谁人水平无限?)，缺点错误难免，敬希批评指教”，而是请求最有发言权的读者与我们一起，为不断完善本书而共同努力，造福后人．先行致谢！

本书由干丹岩先生主持审校，河北师范大学吴振德先生、北京师范学院郑崇友先生、南开大学陈吉象先生参加．并于 1988 年 11 月在湖北省宜昌举行的审稿会议上审定．本书在插图的绘制过程中，华南师范大学蔡永櫆先生给予热情的指导和帮助．编者在此向上述各位师友，以及一切关心和参加过本书出版工作的同志致谢．

*　　　　　　*

本书共分八章．

第一章是从一些古典问题入手介绍拓扑学的思想．目的是先使读者有个直观的、粗略的了解，知道拓扑学这个听起来陌生的名字并不是从天上掉下来的怪物，其思想，其问题，都是人类在长期认识和改造客观世界的过程中提出来的．拓扑学的入门书常安排这么一个引子，这是与其它学科的入门书不同之处．这样写法，也是为了避免一上来就是一大串抽象的概念搞昏读者的头脑，为自学者先引起一些兴趣．这章的学习当然就是阅读，不必初读时便深究．

第二、三、四章及第五章的第一节是点集拓扑部分．

点集拓扑学是把空间形式的许多构造都去掉，单抽象出一个拓扑结构来定义及研究的．因此，只要承认了朴素的集合论的一些约定和结论，便可以严格地用一条条不会误会的公理来定义拓扑空间及有关的概念；并从此出发展开讨论，得到一系列的结论．这无疑将对学习带来很多的方便，及使各结论的证明都易于用明确的是非标准来判断．通过这部分的学习，对读者的论证能力，也包括举反例的本领，以及理解概念的实质，都会有很大的益处．

但是也会有其烦恼之处．一大堆概念一股脑儿地抛出来，既易混淆，又显枯燥．

但是，一旦深入学习下去，就会越学越有兴趣．这是很多学过的人都有过的体会．

另一方面，也可以在编书及阅读时采取一些措施，适当补救一下．建议读者在学习时，经常回想已在实变函数论中学习过的实数的相应概念，便于理解和记忆．我们在编写时也尽量举些几何直观强的例子．但是，在考虑这些特例时，一定要注意到，既系特例，便是特殊之例，已加了其它条件了．它们的一部分属性可以表现出所学概念之性质，另一部分属性则无代表性．不顾及这点，就会造成误解．“从特殊到一般”的学习方法，是通常行之有效的好方法．要注意的就是这里有个抽象的过程，必须排除其不具有一般性的属性．

证明结论，在点集拓扑的部分分成两大类型．

一类是较一般的，其推理论证或构造反例就是集合的运算．主要是集合的并、交、差、积，元素是否属于某集合，函数的对应关系，等等的运算和判别．通过这些学习和练习，读者将会受到较严格的逻辑的锻炼．

另一类则是较深一些的，即应用集合论中的选择公理（多用与其等价的 Zorn 引理）来论证．这对读者是很陌生的．读者从一踏入数学大门，实质上就在不自觉地承认选择公理．否则连数学分析也没法学．但要正面利用它来论证那些非它不可的命题（其实是与

选择公理等价的命题)，多数读者不会接触过. 如果能够通过这门课程学会这套方法，将会帮助读者在数学修养方面得到较大的提高. 可惜的是，本书的篇幅和读者用来自学本课程的时间都不允许收入这部分内容了. 有志于学习的读者可参阅[8].

点集拓扑学的概念太多了. 至今仍在不断涌现各式各样的空间. 例如，介于 T_2 和 T_3 之间便已发现无穷多种互不重合的分离公理. 任何一本书皆不可能包罗万象，只能择其要者叙述. 那么，哪些是要者呢？要视教学的目的及学时的限制而定. 我们以为，本书所选入的内容就是要者. 它们是读者在所给定的学时限制内通过自学可以掌握的必要的知识，必需的训练，及为今后学习进一步课程作必要的准备. 有了这些，今后学习其它课程，或有兴趣于深入研究点集拓扑学，都具备了基础. 只是上述应用选择公理的方面，尚令人遗憾地欠缺一些.

从第五章开始，就进入代数拓扑学的部分，依次介绍闭曲面分类、基本群、单纯同调群. 这些是到本世纪 30 年代以前比较成熟的代数拓扑学的成果. 学习了这几章所选入的概念和结论，可以认为具备了代数拓扑学的入门知识，并了解了代数拓扑学处理问题的基本方法.

这段时期，代数拓扑学的最辉煌的成就是单纯逼近定理的发现及证明. 单纯逼近的方法成功地解决了用离散的代数工具研究连续的几何对象的关键问题，使许多重要的几何问题得到漂亮的解决. 直至本世纪 50 年代以前，尽管诞生了同伦论并得到迅速的发展，其基本的工具仍是单纯逼近. 因此，这部分学习的核心是单纯逼近定理及单纯逼近方法.

这个定理是直到第八章才证明的. 但第六章的基本群的计算实质上用了其方法，第五章的闭曲面分类定理则要到其证明之后才能完成证明. 所以，它实际上贯穿了这四章. 学习时，要抓住这个纲.

闭曲面分类、示性数不变性、Brouwer 不动点定理、毛球定理

等我们介绍到的结论，就是这一时期的漂亮的结果的几个突出的例子．球的自映射的层数及 Hopf 分类定理，则揭开了同伦论诞生的序幕．有兴趣的读者还可从参考文献上查阅这时期的其它成果．有了本书所介绍的内容，接受那些成果便不会有本质的困难了．

因为理论性质的改变，读者会发现，这部分读来与点集拓扑部分味道迥异．

一是几何直观增多了．这部分处理的对象，都是可以在欧氏空间中实现的．即使基本群是针对一般拓扑空间定义的，所用的道路概念也有明显的直观形象．于是涉及的内容便易于想象和理解．二是使用了代数的工具，群的概念和性质经常应用．这不仅要求读者具有这方面的知识，也要求在学习中时刻注意引入这些代数工具的好处何在．三是习题少了．这是由内容决定的，各书皆如此．习题多的书，其实是利用习题来补充一些课文中讲不到的概念及结论．作为消化及加深理解课文的练习并不多，充其量补充一些课文中省略的证明．这样，读者在做题方面用的时间少了，便相应地在读课文时增加了时间．而事实上，由于代数拓扑学处理问题的方法与点集拓扑不同，不再仅是集合运算的反复使用，而是综合解析几何、线性代数、近世代数、点集拓扑等各方面的知识，技巧性较强，因此也确实需要初学者多花费一些精力在钻研课文上，体会其方法的实质．

至于这些章的内容、要求及说明，在大纲中都已指出．读者不妨先翻阅一下，心中有一些数．由于每章自身还有引言及小结，在这个总序中就不多述了．

本书和其它数学书一样，大量使用外文字母．其代表的意思，用时自会交代．但有几个黑体的英文字母，全书统一使用，这里预先规定如下：

$\mathbf{N}$　代表全体自然数的集合．

$\mathbf{Z}$　代表全体整数的集合，也代表它所做成的整数加群．

$\mathbf{Z}_m$　代表 m 个元素组成的循环群．

R 代表全体实数的集合，也代表它所做成的实数域，也代表1维向量空间及欧氏空间.

C 代表全体复数的集合，也代表它所做成的复数域.

Q 代表全体有理数的集合.

*　　　　　　　　*

高等教育自学考试，是个人自学、社会助学和国家考试相结合的一种新的教育形式，也是造就和选拔人才的一种新途径. 我们衷心祝愿读者们成功，早日成材，闯出一条路来!

左再思　黄锦能

1988年于华南师范大学

目　录

第一章　拓扑学的直观概念

这门课讲的是拓扑学的一些入门知识．拓扑这个名字是从其英文名字 Topology 音译过来的．第一个使用这个译名的是近代中国数学界的伟大的先行者姜立夫先生(1890—1978)．

代数拓扑学现在公认是以 1895 年 H. Poincaré 的论文为其纪元．当时还不叫这个名字．尽管这个词汇在上世纪中已出现，用于这个学科则已是本世纪初了．现代拓扑空间的定义则是 1912 年 F. Hausdorff 给出的，尽管点集拓扑学的研究实际上在上个世纪也已经开始出现了．

我们不妨从这门学科诞生以前人类在认识世界的过程中即已提出的一些拓扑问题谈起．

我们介绍这几个问题，是直观地谈的，目的是要这本书的读者对拓扑的思想先有个粗略的了解．所以这一章读过也就行了，不必深入去探讨这几个问题，以免耗去过多的时间．

1　一笔画问题

读者大约早已从通俗读物上见到过著名的 Königsberg 七桥问题了．它讨论的是：一个人能否把图 1．1 中的七座桥全走过一遍而不重复？

这个问题中，其实还有些话没有说，是做为当然的约定．一是这个人只会走，不会飞．换言之，他要“连续地”移动．如果允许他从河上跨过去而不走桥，那就没有任何意义了．二是在每块陆地(岸或岛)上，他允许经过的次数并没有限制，从一桥的端

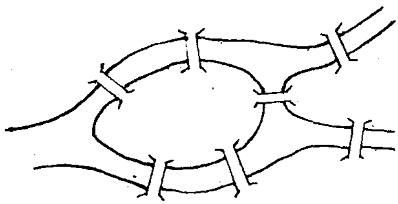

图 1. 1

点走向另一桥的端点，只要是在同一块陆地上，走什么路线也无所谓. 这样，我们完全可以认为，当他走到一桥的端点，他立即站在了同块陆地上任何一桥的端点上了. 这样，我们便可以简化图形，将每块陆地仅画成一点，变成了图 1. 2.

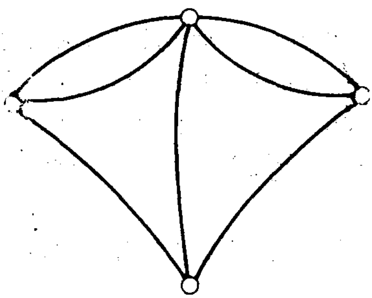

图 1. 2

在这个图中，4 个交汇点代表 4 块陆地，它们之间的线代表桥. 这里，桥的长度变了，夹角变了，还有的直的变成了弯的. 但于问题的解答一点影响也没有. 长也好，短也好，直也罢，弯也罢，过一次就是一次. 只要其两端没通错地方，怎么画都任由君便.

从这个问题，人们自然可以引伸出一个较一般的问题：任意给出这么个由一些线段及其交汇点组成的图形，比如图 1. 3 所举的例子，问可否一笔画出全图来？

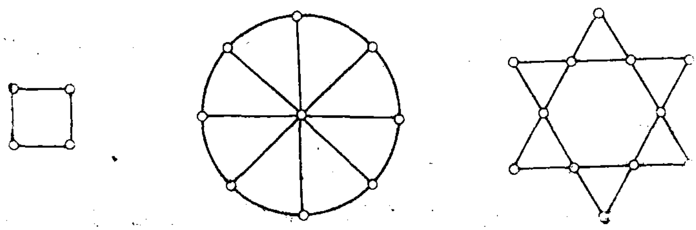

图 1. 3

这里所谓一笔画出，是指用笔从图上某点出发，沿所有线段(直的和弯的)画一遍.每个线段只许过一次(相当于每桥走一次)，每个交汇点过几次不限(相当于每块陆地去几次不限)，但笔不许离开纸(相当于人不会飞). 这就叫做一笔画问题.

这个问题在生活和生产中是有用的. 早在1735年，L. Euler即已给出了解决. 有兴趣的读者可以直观地找到答案，并且只用到中学学过的数学归纳法就给出证明. 这里不详述了.

我们首先举这个例子是要分析一下这个问题的性质.

既然研究的是图形，当然是几何的问题. 它确实也与我们中学时学过的几何问题有共同之处. 比如说，这七座桥用什么材料建造的就与本问题无关. 正如一个学生从不会问老师：那黑板上画的直角三角形如改用红粉笔画时勾股弦公式还是否成立一样，因为这些材料、颜色等，都不是几何性质.

但我们也注意到，它又与我们学过的几何有所不同. 比如，线段的长度，夹角，直还是弯，这些度量的性质，过去学的欧氏几何就不许乱改变，否则还成什么勾股弦公式？而一笔画问题中就允许任意. 但它也有不许任意的地方. 比如，线段的个数，两条是否有共同端点，每个交汇点发出的线段的个数等，一个图形中都是确定的. 至于每条桥不许断成几截，也不许绕成圈子，两条桥不许中间交叉，更是不言而喻的. 在问题中，笔不许离纸，每线仅画一次，交汇点过的次数不限，这些规定也是不许改变的. 这些，形成了另一套几何的性质，正是提出问题的多年之后才出现的这门学科所精确地总结的东西，并称之为拓扑性质.

拓扑学研究空间形式的拓扑性质.

2 地图着色问题

读者都看过地图. 一幅行政区图，每个省印上一种颜色. 这样，一眼便辨别出一个省的轮廓. 不言而喻，相邻的省份，必须使用不同的颜色. 假如全用同一色，比如绿色，那便成了在绿纸