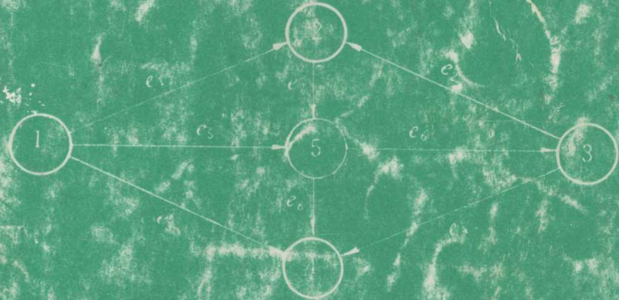
数学模型与建模方法

主　编　彭祖赠



大连海事大学出版社

数学模型与建模方法

SHUXUE MOXING YU JIANMO FANGFA

主　编　彭祖赠

编　者　黄崇超　孙韫玉
　　　　邰淑彩　杨晓光

大连海事大学出版社

数 学 模 型

主　　编　彭祖赠

责任编辑　刘宗德　杨万柏

封面设计　木　易

*

大连海事大学出版社出版、发行

武汉市长江印刷厂印刷

*

开本:787×1092 毫米　1/16　印张:15　字数:350 千

1997 年 12 月第 1 版　1997 年 12 月第 1 次印刷

印数:0001—3000 册　定价:18.00 元

ISBN 7-5632-1175-6/O・71

前　言

我们常把生产和科学实验中的各种实际对象或过程称为原型。例如，一架飞机，一条生产线，一个部门等都是原型。为了某个特定的目的，将原型的某些信息进行简化，抽象、归纳后得到的原型的替代物称为模型。因此，由于目的不同，模型的形式与构造可以完全不同。例如，放在展览厅里的飞机模型，只要外形与飞机完全相同，并不要求它能飞。然而参加航模竞赛的飞机模型，则要求能飞，外形上稍有差异是允许的。为了改进飞机的某种性能，工程研究人员头脑中的理论模型则完全没有具体实物对应。

依据已知条件，在确定的目标和要求下，用数学语言和方法，刻画原型各种特性的数量特征的数学结构称为原型的数学模型。

当前计算机正以速度快、功能齐全、入门容易、价格低廉，并具一定"智能"性等特点迅速发展，使得现代科学技术发展的一个重要特征是各学科的日益精确化、数量化。从而数学的应用已经渗透到自然科学、工程技术、经济管理以及社会生活等各个领域。利用数学并通过计算机进行定量分析已成为衡量一个学科是否成熟的重要标志。然而一个学科要能成功地运用数学，其首要任务就是建立它的数学模型，以定量描述系统内各事物之间的本质的量的联系。这就使得怎样建立原型的(合理的)数学模型越来越受到人们的重视。

对于给定的实际问题(原型)，为了建立它的合理的数学模型，需要注重以下几个方面：

1. 根据需要对原型作一些合理的假设。一个原型，常有众多的特性，这些特性所具有的数量特征，常与众多的因素有关。在一定条件下，有的因素是主要的和本质的；有的因素是次要的和非本质的；有的因素与我们所考虑的特性的数量特征之间遵循某种理论规律(如物理学中的定律)；有些因素却没有理论规律可以遵循(如地面上运动物体的速度与空气阻力之间的关系)。为了获得可靠的并且通过计算机可以得到必要解答的数学模型，必须对原型作出适当的假设。例如，为了突出主体，可以略去那些次要的非本质的因素，达到简化的目的；又如，将那些没有理论规律可以遵循的关系，作出明确的假设，达到确定化目的。但所有假设都必须是合理的，即符合或近似地符合自然规律。

2. 恰当地使用数学方法。很多数学方法可以用来建立实际问题的数学模型。然而，对于一个给定的原型，并非一切数学方法都是适用的。一般说来，对于不确定性问题常适宜于用概率统计等数学方法；对于确定性问题常适宜于用微分方程或代数方程等数学方法。例如，我国 1992 年大学生数模竞赛中的 A 题——施肥效果分析(参见 §5.5)，因为所给实验数据具有随机性，只宜建立不确定性模型，如使用回归分析方法等；其 B 题——实验数据分解，应建立确定性模型。因此，在建立数学模型之前，对原型作确定性与非确定性判断，再确定数学方法是非常重要的。此外，变量取连续值的模型，称为连续性模型；变量取离散值的称为离散性模型。因为计算机的发展，直接就原型建立起离散模型(如差分方程

方法）或对已建立起来的连续性模型寻找合理的离散方法，达到能使用计算机进行计算的目的，已成为当今科学计算方面的一个热门课题。

3. 对建立起来的模型进行必要的分析和检验。怎样断定在建模过程中所作的假设是合理的，使用的数学方法也是恰当的呢？一种有效的方法就是对建立起来的模型进行分析检验。当使用不确定性数学方法建模时，方法本身的适用性要进行检验，例如，使用层次分析法建立模型时，需要作一致性检验（参见第四章）；在进行回归分析时，要作回归效果的显著性检验（参见第五章）；在作判别分析时要作判别效果的检验（参见第六章）等等。在使用确定性方法建模时，通常并没有完整的适用性检验方法，但仍需对所得结果进行分析，看是否与实际情况相符。例如，在使用微分方程或差分方程建立数学模型时，常希望某些平衡解能具有稳定性，这需要对平衡解作稳定性分析（参见第二章和第三章）。总之，任意一个数学模型，都应进行分析和检验，以确定它是否确能反映现实原型的有关特征。

为了进一步说明怎样建立合理的数学模型，我们来考察一个例子。

设某地区正在流行某种传染病。用 $x(t)$ 表示在 t 时刻已受到感染的居民人数占居民总人数的比率，则 $x(t)\in[0,1]$，且尚未受感染的居民人数占居民总人数的比为 $1-x(t)$。考虑到由于已被感染者与尚未被感染者的有效接触而进一步扩大感染者，故可设 $\dfrac{dx(t)}{dt}$ 正比于 $x(t)(1-x(t))$，设初始时被感染居民的比率为 x_0，得如下微分方程的定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=\lambda x(t)(1-x(t))\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\lambda, x_0>0$ 是常数，λ 称为固有传播率。这是有名的逻辑（Logistic）模型，它的解为

$$x(t)=\frac{1}{1+(\frac{1}{x_0}-1)e^{-\lambda t}}$$

易知 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=1$。说明天长日久，每个人都要得这种病的。这与我们通常见到的事实是不相符的。问题在于模型(1)没有考虑到被感染者还是可以治愈的。若用 μ 表示治愈率，则可将模型(1)改写成

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=\lambda x(t)(1-x(t))-\mu x(t)\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{2}$$

容易获得(2)的解答为

$$x(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}+(\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu})e^{-(\lambda-\mu)t}\right)^{-1} & \lambda\neq\mu\\ (\lambda t+\dfrac{1}{x_0})^{-1} & \lambda=\mu\end{cases}$$

从而

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=\begin{cases}1-\dfrac{\mu}{\lambda} & \lambda>\mu\\ 0 & \lambda\leqslant\mu\end{cases}$$

这说明当治愈率大于或等于固有传播率时，这种疾病将会完全消失；反之，则可能总有一

部分人害有这种疾病，且这部分人占全部居民的比率随治愈率的增大而减小，随固有传播率的增大而增大，这是符合情理的。此外，有的传染病治愈后还有免疫力，对此情形，模型(2)需要作进一步的改进。

美国从 1985 年开始在大学生中开展了一年一度的大学生数学建模竞赛，我国也从 1992 年开始在全国大学生中开展了大学生数学建模竞赛，为了更好地进行数学建模教学，有效地组织同学参加数学建模竞赛，我们组织编写了这本教材。经过 3 年的教学实践和认真的修改、补充才以目前的形式与读者见面。

迄今为止，在很多领域(如生态学、医学、计量经济学等)建立了很多很有价值的数学模型。这些模型一方面解决了这个领域中的某个实际问题，另一方面也提供了由实际问题建立数学模型的一般方法，有些模型还有一定的普遍意义。对这些前人的工作作适当介绍是非常必要的，因此本书前三章比较集中地介绍了这些模型。中国和美国一年一度的大学生数学建模竞赛留下了大量的竞赛题，我们也在适当的章节，给出了某些竞赛题的解答。

考虑到对给定的原型，为了建立它的数学模型，必然涉及较多的数学方法。仅仅只熟悉一些经典的数学模型，或了解一些竞赛题的解答，面对形形色色的实际问题，未必可以找到恰当的方法建立它们的合理的数学模型。因此，与现今已公开出版的数学模型教材的不同之处是，本书既不以介绍经典的数学模型为主，也不以解答已经出现过的竞赛题为主，而是以系统地介绍若干数学建模方法为主。故在第四章至第十一章中依次介绍了与数学建模密切相关的层次分析法、回归分析、判别分析、聚类分析、线性规划、动态规划、图论与神经网络等数学内容，并结合这些内容解答了某些竞赛题。3 年的实践证明了使用这本教材进行数学建模教学效果是良好的。

学习工程技术及经济管理等非数学专业的同学，对学习数学都有一个共同的特点，即只想知道它的最后结论和使用方法。对于这些结果成立的条件，获得这些结果的推算过程等都不想深究。然而数学是严谨的，只有在对它有着深入理解的情况下，才能应用自如，甚至给出某些创造发明。对于从事数学教学的老师，当他们按教材的编排，向学生讲授某个过去不甚了解的，而被略去了证明或推算过程的定理或计算方法时，免不了要花一定的时间去翻阅参考书籍。考虑到这些实际情况，本书在编排上遵循了以下原则：一是让学习者尽可能多地了解每个数学公式的实际意义和推算过程，能够深入地理解它的实质；二是使全书起点尽可能低，使讲授者基本上不必过多地查阅其他书籍和资料。例如，对效益分配问题(参见 § 1.2)，很多数模教材都只给出了 Shapley 的计算公式，本书则先对这个公式作了直观的解释，并给出了它的(对非数学专业学生不必讲授的)证明。对于在差分方程和层次分析法中都用到的代数学中的 Perron 定理的证明，则列入 § 3.5 中。又如逐步回归，只使用了较少的篇幅，就比较清楚地介绍了它的原理与方法，使教者和学者都无须阅读其他书籍就能对它有比较清楚的了解。我们深信这样的处理方法对教和学都是有利的。

1994 年以来，我们开始在二年级和三年级的本科生中开设数学建模选修课，这本教材的部分内容是在选修课上讲授的，另一部分内容则只在参加数学模型竞赛的学生中讲授。

这本教材的编写大纲由彭祖赠和黄崇超拟定，各章内容分别由五位教师编写。其中第一章、第三章、第十章、第十一章及第四章初稿由彭祖赠编写；第二章由杨晓光编写；第五章由部淑彩编写；第六、第七章及第四章修改稿由孙韫玉编写；第八章和第九章由黄崇

超编写。限于我们的经验和水平，不妥和疏漏之处在所难免，恳请广大师生提出宝贵意见，以便于我们进一步修改。

彭祖赠　黄崇超

1997年8月于武昌

目　录

第一章 一般模型

在这一章里我们将介绍几个有趣的数学模型。它是我们日常工作甚至生活中常常遇到的实际问题，它的解答可以使我们明白，在日常工作中，人们按常规处理的一些事务，未必是合理的。这些模型的特点是不必依赖很多高深的数学知识就能够获得比较满意的结果，同时也给出了由实际问题建立数学模型的基本方法。

§1.1 公平的席位分配方法

设有 A,B 两个单位，各有 p_1,p_2 个人，现需按人数多少选出 q 个代表召开一次代表会。怎样分配这 q 个席位呢？自然可令

$$q_1^* = \frac{p_1}{p_1+p_2}q \qquad q_2^* = \frac{p_2}{p_1+p_2}q \tag{1.1-1}$$

若 q_1^*,q_2^* 恰好是两个正整数，以 q_1^*,q_2^* 分别作为 A,B 两个单位的席位，即可获得一个完全合理的席位分配方案。但一般说来，q_1^*,q_2^* 不会恰好是两个正整数。当 q_1^*,q_2^* 不是正整数时，怎样分配才是合理的呢？我们来讨论这个问题，并提出如下三种分配方法。

第一分配方法：首先给出一种自然的想法，这也是通常的执行方法。即由(1.1-1)式计算出 q_1^*,q_2^*，用$[q_i^*]$表示 q_i^* 的整数部分，并记 $q_i=[q_i^*](i=1,2)$。当 $q_1^*-q_1>q_2^*-q_2$ 时，则用 q_1+1 与 q_2 分别作为 A,B 两单位的席位；当 $q_2^*-q_2>q_1^*-q_1$ 时，则用 q_1,q_2+1 分别作为 A,B 两单位的席位；而当 $q_1^*-q_1=q_2^*-q_2=0.5$ 时就只有由 A,B 两单位协商来确定了。这个方法的优点是简单、方便，并能被很多人所接受，也很容易推广到 m 个单位$(m>2)$的席位分配问题。例如，设有 m 个单位 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，各自有 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 个人，共同分配 q 个席位，则先令

$$q_k^* = \frac{p_k}{\sum_{i=1}^{m} p_i}q,\ k=1,2,\cdots,m \tag{1.1-2}$$

令 $q_k=[q_k^*]$，$\Delta_k=q_k^*-q_k$，令

$$r = q - \sum_{k=1}^{m} q_k \tag{1.1-3}$$

若 $r>0$，则当

$$\Delta_i = \max_k \Delta_k \tag{1.1-4}$$

时，将第 i 个单位增加一席，得新的 $q_k(k=1,2,\cdots,m)$，再重新计算 Δ_k，并由(1.1-3)式计算出 r。若还有 $r>0$，则再利用(1.1-4)式给另一个单位增加一席，直至 $r=0$ 为止，最后获得一个完整的分配方案。但这个分配方法是存在弊病的，它有明显的不合理性。

例1 设有 3 个单位，各单位分别有 103 人、63 人和 34 人，共分配 20 席位。由(1.1-

2)式计算出 $q_1^*=10.3, q_2^*=6.3, q_3^*=3.4$。利用(1.1-4)式立即可得第1单位应分配10席,第2单位6席,第3单位4席。但当席位增加到21席,仍由(1.1-2)式计算出 $q_1^*=10.815, q_2^*=6.615, q_3^*=3.570$,再利用(1.1-4)式得:1,2,3三个单位应分别分得席位为11,7,3。即当总席位增加1席时,第3个单位反而减少了一席,这显然是不公平的。

在以下的讨论中,我们始终假设每个单位最少有1个人,最少被分配有1个席位。

第二分配方法:为了找到公平的分配方法,需建立新的不同于(1.1-4)的计算方法。并以两个单位为例建立所谓"相对不公平"指标。

设有 A, B 两个单位,各自的人数分别为 p_1, p_2,又各分得 q_1, q_2 个席位。若 $\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}$,则这个分配方案是合理的;若 $\frac{p_1}{q_1}>\frac{p_2}{q_2}$ 则对 A 单位不公平。以 $\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}$ 作为对 A 的绝对不公平值,并以

$$r_A(q_1,q_2)=\frac{\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}}{\frac{p_2}{q_2}}=\frac{q_2p_1}{q_1p_2}-1 \tag{1.1-5}$$

作为 A 相对 B 的相对不公平值。若 $\frac{p_2}{q_2}>\frac{p_1}{q_1}$ 则对 B 单位不公平。以 $\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}$ 作为对 B 的绝对不公平值,并以

$$r_B(q_1,q_2)=\frac{\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_1}{q_1}}=\frac{q_1p_2}{q_2p_1}-1 \tag{1.1-5*}$$

作为 B 相对 A 的相对不公平值。

现在考虑增加一个席位,即使总席位为 q_1+q_2+1。不失一般性可设原分配对 B 不公平,即 $\frac{p_2}{q_2}>\frac{p_1}{q_1}$。若将增加的1席分配给 B 后仍对 B 不公平,即 $\frac{p_2}{q_2+1}>\frac{p_1}{q_1}$,则无疑应将增加的1席分配给 B。因此,以下只讨论将增加的1席分配给 B 后对 A 不公平,即 $\frac{p_1}{q_1}>\frac{p_2}{q_2+1}$。由(1.1-5)式得

$$r_A(q_1,q_2+1)=\frac{(q_2+1)p_1}{q_1p_2}-1$$

又由原假设 $\frac{p_2}{q_2}>\frac{p_1}{q_1}$,故必有 $\frac{p_2}{q_2}>\frac{p_1}{q_1+1}$。由(1.5-5*)式得

$$r_B(q_1+1,q_2)=\frac{(q_1+1)p_2}{q_2p_1}-1$$

我们的目的是要尽可能地减少相对不公平值。因此,当

$$r_A(q_1,q_2+1)<r_B(q_1+1,q_2)$$

即当

$$\frac{p_1^2}{q_1(q_1+1)}<\frac{p_2^2}{q_2(q_2+1)}$$

时应将这增加的1席分配给 B 单位。而当

$$r_B(q_1+1,q_2)<r_A(q_1,q_2+1)$$

即当

$$\frac{p_2^2}{q_2(q_2+1)} < \frac{p_1^2}{q_1(q_1+1)}$$

时应将增加的 1 席分给 A 单位。

据此，可以给出一般的方法如下：设有 m 个单位，各自有 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 个人，且各自已分配了 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 个席位。现增加 1 席，即使总席位为 $1+\sum_{i=1}^{m} q_i$。先对每个 i，计算出

$$Q_i = \frac{p_i^2}{q_i(q_i+1)}, i = 1, 2, \cdots, m \tag{1.1-6}$$

若有 k 使

$$Q_k = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} Q_i \tag{1.1-7}$$

则应将增加的 1 席分配给第 k 个单位。

例 2　单位与人数均同例 1，若总席位是 20 席。则先由(1.1-2)式计算出 $q_1^* = 10.3$，$q_2^* = 6.3$，$q_3^* = 3.4$，取整数部份得 $q_1 = 10$，$q_2 = 6$，$q_3 = 3$，而 $q_1 + q_2 + q_3 = 19$，应增加 1 席。由(1.1-6)式计算出

$$Q_1 = 96.445, Q_2 = 94.500, Q_3 = 96.333$$

由(1.1-7)式得增加的 1 席应分配给第 1 单位，即最后分配结果是第 1,2,3 三个单位各分别得 11,6,3 个席位。若再增加 1 席，即设总席位为 21 席。仍由(1.1-6)式计算出

$$Q_1 = 80.371, Q_2 = 94.500, Q_3 = 96.333$$

由(1.1-7)式知，增加的 1 席应分配给第 3 单位，即 21 个席位的情形 1,2,3 三个单位应分别得 11,6,4 个席位。

这个结果消除了前述方法的明显的不合理性(参见例 1)，使得在各单位总人数不变的条件下，随着总席位的增加，各单位被分配的席位肯定是不减的。

第三分配方法：仍设 m 个单位的人数分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_m$，$p = \sum_{i=1}^{m} p_i$，总席位为 q。设 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 是一个席位分配方案，$q = \sum_{i=1}^{m} q_i$。我们来寻求合理的 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 使

$$\begin{aligned} &\min J(q_1, q_2, \cdots, q_m) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{p_i}{q_i} - \frac{p}{q}\right)^2 \\ &\text{s.t.} \quad q_1, q_2, \cdots, q_m \geqslant 1 \quad \text{是整数} \end{aligned} \tag{1.1-8}$$

即将原问题归结为(非线性)"整数规划"问题(参见第八章)。可以通过试算得到(1.1-8)的解。

例如对给定的 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 和 q，先由(1.1-2)式计算出 $q_1^*, q_2^*, \cdots, q_m^*$，取整数部分后得 $q_1, q_2, \cdots, q_m$，并设对任意 i，$q_i \geqslant 1$。又由(1.1-3)计算出 $r = q - \sum_{i=1}^{m} q_i$，且 $r \geqslant 1$。任取 1, 2, $\cdots$, m 的一个子列 $i_1, i_2, \cdots, i_r$，并记这种子列的全体为 I。任取 $(i_1, i_2, \cdots, i_r) \in I$，令

$$q_i^* = \begin{cases} q_i & i \overline{\in} \{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \\ q_i + 1 & i \in \{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \end{cases}$$

再由(1.1-8)式计算出 $J(q_1^*, q_2^*, \cdots, q_m^*)$。若有

$$J(q_1^{(0)},q_2^{(0)},\cdots,q_m^{(0)})=\min_{I}\{J(q_1^*,q_2^*,\cdots,q_m^*)\}$$

则 $q_1^{(0)},q_2^{(0)},\cdots,q_m^{(0)}$ 就是一组合理的席位分配方案。

例 3 单位人数均同例 1，若总席位为 20 席。取 $q_1=10,q_2=6,q_3=3$。分别就(q_1+1,q_2,q_3)，(q_1,q_2+1,q_3)及(q_1,q_2,q_3+1)计算出 J 值如下：

$$J(11,6,3)=2.433,J(10,7,3)=2.868,J(10,6,4)=2.590$$

故以 11，6，3 为合理分配方案。

若总席位为 21 席，则仍取 $q_1=10,q_2=6,q_3=3$。$r=21-\sum_{i=1}^{3}q_i=2$，分别就(q_1+1,q_2+1,q_3)，(q_1+1,q_2,q_3+1)及(q_1,q_2+1,q_3+1)由(1.1-8)式计算出 J 值如下：

$$J(11,7,3)=3.574,J(11,6,4)=2.027,J(10,7,4)=4.151$$

故以 11，6，4 为合理席位分配。

以上结果与例 2 计算出的结果完全相同。

§1.2 效益的合理分配方法

设有 n 个实体(如个人、公司、集团等)，它们各自单独经营或 $k(k\leqslant n)$个单位联合经营都有一定的经济效益。如果它们相互间的利益不是对抗性的，又有科学的管理方法，一般说来，联合经营的总效益可以超过各自单独经营所得效益之和，并且合作单位越多，总效益越高。因为各自的实力(如设备、资金、技术力量等)不同，在各自参加的不同情形的合作经营中，各自的"贡献"必定存在差异。为了巩固合作经营的形式，必须有一种合理的分配制度。我们来讨论这个问题。

一种最简单的分配方法是：设 n 个实体各自单独经营时所得效益分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n(x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n)$，联合经营时所得总效益为 x，且 $x>\sum_{i=1}^{n}x_i$。记

$$x_k^*=\frac{x_k}{\sum_{i=1}^{n}x_i},k=1,2,\cdots,n \tag{1.2-1}$$

即可以 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$ 作为对第 1，第 2，……，第 n 个实体的效益分配值。

考虑到联合经营的组合方式很多，对于 n 个实体而言，可以任意 2 个进行联合，也可以任意 3 个进行联合，……，直到全体联合。如果各种组合方式都有实际效益，而又以全体联合的总效益最高，而(1.2-1)式并不能体现其他联合形式的效益。应如何进行合理分配呢？基本原则应该是使每个实体在全体联合中的实际收入比它参加的除全体联合的形式之外的其他任何形式的联合的收入都高，至少应相等。

例 1 设乙、丙受雇于甲经商，并已知甲独自经营每月获利 1 万元；只雇乙可获利 2 万元；只雇丙可获利 3 万元；乙、丙都雇用可获得 4 万元。问应如何合理分配这 4 万元的收入。

设甲、乙、丙应分别获利 x_1,x_2,x_3(万元)。因为乙、丙只能受雇于甲，故没有单独经营能力(即它们各自独立经营时获利为 0)；且乙、丙联合也没经营能力(获利也为 0)。依上所述全体联合经营每人获利比除全体联合外其他任何形式的获利都高，至少应相等的原则，

可将这个问题归结为数学问题：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+x_2\geqslant 2, x_1+x_3\geqslant 3, x_2+x_3\geqslant 0 \\ x_1\geqslant 1, x_2, x_3\geqslant 0 \end{cases} \tag{1.2-2}$$

但这个问题并没有唯一解。例如，取 $x_1=2.5, x_2=0.5, x_3=1$ 是它的解；而取 $x_1=2, x_2=x_3=1$ 也是它的解。又因乙、丙单独经营时获利为 0，由(1.2-1)计算的结果应该是 $x_1=4$，$x_2=x_3=0$，这显然是不可接受的。能否给出合理的唯一解答呢？下文给出了肯定的答案。

首先注意到对 n 个单位(实体)的组合，可视为 n 个单位的集。并且这 n 个单位的集可以简单地记作 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 共 n 个自然数的集，其中 $i\in I$ 就表示第 i 个单位。设 $S=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 是 I 的子集(即 $S\subset I$)，则 S 就是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 单位的集。

现在考虑效益问题。设 $S\subset I$，且 $S=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$。以下总用 $v(S)$ 表示 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 共 k 个单位合作(简称为 S 合作)的效益。若不考虑负效益，则 $v(S)$ 总是一个非负实数。因此，$v(I)$ 就是全体合作的效益；若 $i\in I$，则简记 $v(\{i\})$ 为 $v(i)$，它表示 i 单位单干时的效益；并规定 $v(\varnothing)=0$。

一般地，总认为合作单位越多效益越高。故对于 v 还可补充假设：若 $S_1,S_2\subset I$，且 $S_1\cap S_2=\varnothing$，则

$$v(S_1\cup S_2)\geqslant v(S_1)+v(S_2) \tag{1.2-3}$$

又设 $S\subset I$，且 $i\in S$，记 $S-\{i\}=S\backslash i$，称 $v(S)-v(S\backslash i)$ 为 i 在 S 合作中的贡献。因为 $S=(S\backslash i)\cup\{i\}$，且 $(S\backslash i)\cap\{i\}=\varnothing$，由(1.2-3)式得 $v(S)\geqslant v(i)+v(S\backslash i)$。因此，任何单位在任意合作中的贡献都是非负的。

现将以上所述抽象为如下数学问题。

设 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 是 n 个自然数的集，用 $P(I)$ 表示 I 的幂集(即 I 的一切子集的集)，用 R^+ 表示非负实数全体。若 v：$P(I)\to R^+$，满足条件：

(1) $v(\varnothing)=0$；

(2) 若 $S_1,S_2\in P(I)$，且 $S_1\cap S_2=\varnothing$，则

$$v(S_1\cup S_2)\geqslant v(S_1)+v(S_2)$$

称 v 为 I 上的特征函数。

关于效益分配问题，就是要对给定的 $\langle I,v\rangle$，寻求 $\Phi(v)=(\varphi_1(v),\varphi_2(v),\cdots,\varphi_n(v))$，使

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(v)=v(I) \tag{1.2-4}$$

其中 $\varphi_i(v)$ 就是第 i 单位的收益。

为了找到唯一的 $\Phi(v)$，Shapley 引入了如下三条看来毫无疑义的公理：

(1) 对称性。联合经营中每个单位应得的收益与这个单位的编号无关。即若有 π 是 I 的一个排列(亦即 π：$I\to I$ 是一一对应)，πi 对应 i，又对任意 $S\in P(I)$，πS 对应 S。令 $v(\pi S)=u(S)$，则 u 也是 I 上的特征函数，且 $\varphi_{\pi i}(v)=\varphi_i(u)$。

(2) 有效性。联合经营中每个单位应得的收益只与这个单位在各种形式的联合中的贡献有关，贡献越大，收益越高。即设 $i\in S_j\in P(I)$，令 $x_{ij}=v(S_j)-v(S_j\backslash i)$，则 $\varphi_i(v)=f_i(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iN})$(其中 $N=2^{n-1}$ 是 i 所参加的各种形式联合的总数)，且 f_i 关于每个变元

是单增的。

(3) 可加性。当有 n 个相同的单位参加了两次合作，则它们两次合作所得的收益，应等于分别计算这两次合作所得收益之和。即对确定的两个特征函数 $u,v,\Phi(u+v)=\Phi(u)+\Phi(v)$。

加入这 3 条公理后，在本节末尾将证明每个单位的收益是唯一的，且

$$\varphi_i(v)=\sum_{S\in S(i)}\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}(v(S)-v(S\backslash i)),i=1,2,\cdots n \qquad (1.2\text{-}5)$$

其中 $|S|$ 表示 S 中元素的个数；$S(i)$ 表示 I 中所有包含有 i 的子集的集。例如，设 $I=\{1,2,3,4,\}$，则

$$S(1)=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1\}\}$$

且 $|S(i)|=2^{n-1}$。因为 $v(S)-v(S\backslash i)$ 是在 S 合作中第 i 个单位的贡献，又对任意 $1\leqslant k\leqslant n$，I 中包含了 i，且元素个数恰好等于 k 的子集 S 的个数应为

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{(|S|-1)!(n-|S|)!}$$

故对固定的 k，则

$$\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{(n-1)!}\sum_{\substack{S\in S(i)\\|S|=k}}(v(S)-v(S\backslash i))$$

$$=\sum_{\substack{S\in S(i)\\|S|=k}}\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{(n-1)!}(v(S)-v(S\backslash i))$$

是第 i 个单位在所有有它参加的，共有 k 个单位的合作中它所作贡献的平均值。而

$$\varphi_i(v)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{\substack{S\in S(i)\\|S|=k}}\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{(n-1)!}(v(S)-v(S\backslash i))$$

这说明在 n 个单位的合作中，第 i 个单位的收益是它在有它参加的，由 $1,2,\cdots,n$ 个单位的合作中它所作贡献的平均值的平均值。

例 2 合作关系如例 1，其特征函数是 $v(\{1,2,3\})=4,v(\{1,2\})=2,v(\{1,3\})=3,v(\{2,3\})=v(2)=v(3)=v(\varnothing)=0,v(1)=1$。代入(1.2-5)式得

$$\varphi_1(v)=\frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}(1-0)+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[(2-0)+(3-0)]+\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}(4-0)=2.5$$

$$\varphi_2(v)=0.5,\ \varphi_3(v)=1.0$$

即甲的收益为 2.5 万元，乙的收益为 0.5 万元，丙收益 1 万元。

例 3 设沿河有 A,B,C 三个城镇，地理位置及各城之间的距离如图 1-1 所示。规定各城镇污水需经处理才能排入河中。三城可以单独建立污水处理厂，也可以用管道将污水输送至下游适当城镇(如 A 输至 B，或 A,B 都输至 C 等)再联合建厂。用 Q 表示污水量(t/s)，L 表示管道长(km)，按经验公式，建厂费 $p_1=73Q^{0.712}$(千元)，铺设管道费用 $p_2=0.66Q^{0.51}L$(千元)。且已知三镇污水量分别为 $Q_A=5,Q_B=3,Q_C=5$，L 的数值如图示。试从节约三镇总投资的原则出发提出合理的建厂方案，并向三镇合理分配所需资金。

首先注意到可以建厂的方案有以下 5 种。

(1) 三镇各自建厂，则无需管道费，依据各自的污水量，各镇投资额(千元)分别为

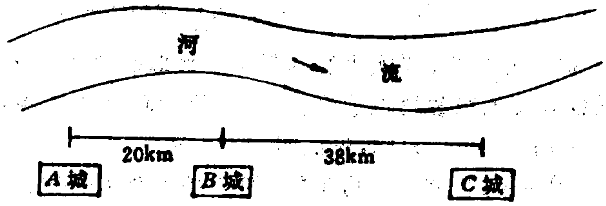


图 1-1

$$x_1 = 73 \times 5^{0.712} = 229.6, x_2 = 159.6, x_3 = 229.6$$

三镇总投资为 $x_1^* = x_1 + x_2 + x_3 = 618.8$。

(2) A,B 两镇合作,在 B 镇建厂,C 单独建厂,则 A,B 两镇总投资(千元)为

$$x_{12} = 73 \times (3+5)^{0.712} + 0.66 \times 5^{0.51} \times 20 = 350.9$$

三镇总投资为 $x_2^* = x_{12} + x_3 = 580.5$。

(3) B,C 两镇合作,在 C 镇建厂,A 单独建厂,则 B,C 两镇总投资(千元)为

$$x_{23} = 73 \times (3+5)^{0.712} + 0.66 \times 3^{0.51} \times 38 = 364.8$$

三镇总投资为 $x_3^* = x_1 + x_{23} = 594.4$。

(4) A,C 合作在 C 镇建厂,B 单独建厂,则 A,C 的总投资(千元)为

$$x_{13} = 73 \times (5+5)^{0.712} + 0.66 \times 5^{0.51} \times 58 = 463.1$$

三镇总投资为 $x_4^* = x_{13} + x_2 = 622.7$。

(5) 三镇合作在 C 镇建厂,则三镇总投资(千元)为

$$x_5^* = x_{123} = 73 \times (5+3+5)^{0.712} + 0.66 \times 5^{0.51} \times 20 + 0.66 \times (3+5)^{0.51} \times 38 = 555.8$$

比较以上 5 个方案以三镇联合建厂投资额最少。各镇投资分配可转换成效益分配。

考虑到最一般的情形是三镇各自建厂,这时的效益为 0,故应有 $v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0$;而 A,B 联合建厂的效益 $v(\{1,2\}) = 229.6 + 159.6 - 350.9 = 38.3$;$B,C$ 联合建厂的效益 $v(\{2,3\}) = 24.4$;A,C 联合建厂没有效益(负效益),故 $v(\{1,3\}) = 0$;而三镇联合建厂的效益 $v(\{1,2,3\}) = x_5^* - x_1^* = 63.0$。利用(1.2-5)式得

$$\varphi_1(v) = 19.2,\quad \varphi_2(v) = 31.5,\quad \varphi_3(v) = 12.3$$

由单独建厂时各自的投资减去三镇联合建厂时各自的“收益”得三镇各自的投资额(千元)分别为 210.4,128.1,217.3。

例 4 有一个 197 人的团体,分为 4 个派别,其人数分别为 58,51,49,39 人。若任意一项决议需要有过半数人投赞成票才能通过.已知各派别成员或全部投赞成票,或全部投反对票。求各派别在表决中的权重。

注意到没有一个派别的人数超过半数,故任何派别都不能操纵表决。依题意建立特征函数 v。因 4 个派别都投赞成票时决议通过,故 $v(\{1,2,3,4\}) = 1$。又 1,2,3 派;1,2,4 派;1,3,4 派及 2,3,4 派总人数都超过半数,故 $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2,4\}) = v(\{1,3,4\}) = v(\{2,3,4\}) = 1$。而 1,2 派;1,3 派;2,3 派总人数也超过半数,故 $v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1$。但 1,4 派;2,4 派;3,4 派的总人数都不超过半数,因此,$v(\{1,4\}) = v(\{2,