數　學　全　書

第三册　解析

Von H. Weber 著

鄭 太 朴 譯

商 務 印 書 館 發 行

中華民國二十六年三月初版

（55784C）

數學全書 第三册 解析

Enzyklopädie der Elementarmathematik

Drittes Buch, Analysis

每册實價國幣壹元捌角

外埠酌加運費匯費

原著者 Von H. Weber

譯述者 鄭太朴 上海河南路

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

（本書校對者王養吾）

✠E三三五

周

目　次

第十九章

無盡級數

第二十章

乘方級數　二項式級數

第二十一章

指數函數及三角函數

第二十二章

自然對數　反三角函數　三角級數

第二十三章

π 之乘積表法　乘方和數 $\zeta(2n)$　歐氏常數

第二十四章

與 π 之超絕性

數學全書

第三册 解析

第十九章 無盡級數

§ 116. 收斂與發散

1. 級數係按照規律而構成的數目序列:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots$$

此項數目名爲級數之項.倘此規律可無限使用,因而對於任何一標數 n, 可求得其相當之 a_n, 則此級數謂之無盡者.今茲所欲論者,姑先以實數所成者爲限.

例如自然數 $1, 2, 3,\cdots\cdots$, 實構成一無盡級數,又如算術級數之項 $a, a+b, a+2b, a+3b,\cdots\cdots$ 或幾何級數之項 $1, a, a^2, a^3,\cdots\cdots$ 或 $1^k, 2^k, 3^k,\cdots\cdots$($k$ 爲任何指數)等數目,均可構成無盡級數.

廣之,吾人亦可將級數之項,視爲一函數之值 $f(\nu)$, 於此,其中之變數遍取 $\nu=1, 2, 3,\cdots\cdots$ 整值[1].任何一整數 n 所構

註: (1) 因之,變數取整值以外之值時,函數可不確定,例如 $f(\nu)$ 爲第 ν 個質數.

成之式 $f(n)$ 或 a_n 吾人名之爲級數之普通項.

2. 設有一級數

(1) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,$$

則可設
$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n,$$

以得一新級數

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\cdots\cdots\cdots$$

$s_1, s_2, s_3, \cdots$ 名爲級數 (1) 之部分和數 (Partialsummen).

吾人今按 § 28 內之概念,作一定義如下:

倘一無盡級數之部分和數,構成一收斂的數列,則此級數謂之收斂者.

因之,倘極限值

(2) $$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$

存在,則級數 (1) 係收斂者.倘部分和數所成之數列,無有極限值,則此級數謂之發散者.

按之 § 28 之 **1.**, 吾人可云:

倘有一確定的數目 S, 且對於每一已知正數 ε, 可有

一標數n,能

(3) $$|S-s_{n+\nu}|<\varepsilon, \qquad (\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$$

則無盡級數(1)爲收斂者.

倘級數爲收斂者,則其極限值S名爲級數(1)之和數或値,寫作:

$$S=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots$$

此項寫法之意義,在表明求級數之和時,祇須取其充分多之項,則可隨吾人之意,以與S相接近.因之,吾人每可用無盡級數,以求S之值,其近似可隨吾人之意爲之,且在事實上,吾人求某種數目或函數之值時,級數往往爲最重要之法門,甚或爲唯一之法門也.

3. 略去(1)中首數項而得之級數

(4) $$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots\cdots$$

名爲(1)之餘級數(Restreihen)[1].此級數之爲收斂或發散,與原級數(1)同.蓋(4)之部分和數爲

$$\sigma_1=s_{n+1}-s_n,\ \sigma_2=s_{n+2}-s_n,\cdots\cdots$$

$$\sigma_\nu=s_{n+\nu}-s_n,\cdots\cdots,$$

故如$\lim\limits_{\nu\to\infty}s_{n+\nu}$存在,即(1)爲收斂時則$\lim\limits_{\nu\to\infty}\sigma_\nu$亦存在,且僅

註: (1) 無盡級數之收斂或發散雖尚未能決定,但在書寫上,不妨先以和數之形式出之.

於此時方能存在也;此時(4)之和數爲 $\lim \sigma_\nu = S - s_n$. 差數

$$\rho_n = S - s_n \qquad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

名爲收斂級數 (1) 之餘數,而按 (3), 則可知對於任何一正數 ε, 可有一標數 n, 能

$$|\rho_{n+\nu}| < \varepsilon, \qquad (\nu=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

是卽在收斂級數方面,其餘數向極限值 0 收斂.

4. 用 § 28, **6.** 之定理,吾人可無須先對於 S 有所假定,卽不難決定一級數之收斂性. 蓋

如對於每一正數 ε, 可有一標數 n, 能

$$(5) \qquad |s_{n+\nu} - s_n| < \varepsilon, \qquad (\nu=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

則無盡級數(1)爲收斂者,亦僅於此時方爲收斂者. 但 $s_{n+\nu} - s_n = \sigma_\nu$ 爲餘級數(4)之部分和數:

$$s_{n+\nu} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots\cdots + a_{n+\nu},$$

故可得定理如下:

倘對於每一正數 ε, 可有一餘級數,其部分和數之絕對值恆小於 ε, 則此無盡級數爲收斂者,亦僅於此時方爲收斂者.

5. 今試以

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots\cdots$$

爲例[1]，其中之分母，係三角數（§ 56, 3.）所成．此級數亦可如下寫之：

$$\frac{2}{1\cdot2}+\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4}+\frac{2}{4\cdot5}+\cdots\cdots,$$

其普通項爲

$$a_n=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

其部分和數，則爲

$$s_1=1=2\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$s_2=\frac{4}{3}=2\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$s_3=\frac{3}{2}=2\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

廣之，有

$$s_n=2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots$$
$$+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

由此可見 $\lim_{n\to\infty} s_n$ 存在，且

註：(1) 此級數爲最初所研究及的無盡級數中之一，Lord Brouncker 已於其 Phil. Trans. (1668) 中及之．

$$\lim s_n = 2,$$

故此級數爲收斂者,其和爲2.吾人於是可寫之作

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots=2.$$

同時,吾人復可見此級數之收斂甚緩.故如欲所得之和,準確至三位小數,其差不及0.0005,則由 s_n 之值,已可見所用之項須至4000之多.

6. 試再一論以下之級數:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots,$$

其普通項爲(1)

$$a_n=\frac{1}{2^n},$$

其部分和數則爲

$$s_0 = 1 = 2-1$$

$$s_1=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}$$

$$s_2=\frac{7}{4}=2-\frac{1}{4}$$

$$s_3=\frac{15}{8}=2-\frac{1}{8},$$

廣之,有

註: (1) 此處吾人用 a_0 以表首項,其部分和數則相當的用 s_0, s_1, s_2,……表之.

$$(6)\qquad s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$$
$$=2-\frac{1}{2^n}.$$

由此可知 $\lim s_n=2$, 此級數爲收斂者,而

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots=2.$$

由 (6), 吾人復可知推求部分和數時,所至之準確程度可如何.倘欲使級數之和其差小於 $\frac{1}{1000000}$, 則須取 21 項 $(n=20)$ 用之.

7. 上節內所論之級數,實爲一無盡的幾何級數

$$(7)\qquad 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots$$

之特例,其中之 x 可爲任何一實數.按 § 20, **11.**, 其部分和數 s_n 爲

$$(8)\qquad s_n=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}$$
$$=\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}.$$

倘 x 爲一眞分數(正或負), 則 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$, 故 $\lim s_n$ 存在,而得如次之定理:

倘 $|x|<1$, 則此無盡級數係收斂者,其和爲

$$(9)\qquad 1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

今如以 $-x$ 代 x, 則可知該級數仍係收斂者,而有

$$(9a)\qquad 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots\cdots=\frac{1}{1+x}.\qquad (|x|<1)$$

倘 $x\geqq1$, 則 (7) 之部分和數,卽無極限值,蓋其值可超過任何大之數也.又如 $x<-1$, 則(8)中之 x^n 卽無有界限.因而 s_n 亦然,而如 $x=-1$, 則其部分和數交替的爲 1 與 0, 故亦無有極限值可求.因之:

倘 $|x|\geqq1$, 則此無盡幾何級數爲發散者.

循環小數亦在收斂的幾何級數之範圍內.蓋如

$$\gamma=\{0,\overline{z_1z_2\cdots\cdots z_f}\cdots\cdots\}$$

爲一無盡小數,其週期爲 $\overline{z_1z_2\cdots\cdots z_f}$, 而其十進寫法之數作

$$\{z_1z_2\cdots\cdots z_f\}=m,$$

則此小數實與以下之級數[1]相同:

$$\gamma=\frac{m}{10^f}+\frac{m}{10^{2f}}+\frac{m}{10^{3f}}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{m}{10^f}\left(1+\frac{1}{10^f}+\frac{1}{10^{2f}}+\cdots\quad\right).$$

此處括弧中卽爲一無盡幾何級數,於此, $x=\dfrac{1}{10^f}=10^{-f}$, 故

$$\gamma=\frac{m}{10^f}\cdot\frac{1}{1-10^{-f}}=\frac{m}{10^f-1},$$

註: (1) 此處吾人已先用此定理,卽凡收斂之級數,倘用一定數 c 乘其各項,亦仍收斂,且其和亦被 c 所乘,蓋其每一部分和數 s_n 轉成爲 cs_n, 而有

$$\lim cs_n=c\lim s_n=cS$$

也 (參觀 § 29, 1.).

此則吾人於§31, 3. 中已以他法求得之矣.

不循環之無盡小數,亦可視之爲無盡級數:

$$\{0, z_1z_2z_3\cdots\cdots\} = \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \frac{z_3}{10^3} + \cdots\cdots \qquad (0 \leqq z_i \leqq 9)$$

此級數亦爲收斂者,其部分和數爲§30內用 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ 表出之有盡小數,而用小數所表出之實數 $\alpha = \lim A_n$ 則爲級數之和.

8. 數學家從事於無盡級數以來,爲時已久,但鮮有注意及其收斂及發散者. 十八世紀時代所致力者,都爲不收斂之級數,例如公式(9a),實僅可於 $|x|<1$ 之前提下用之,但彼時之人則往往於其中設 $x=1$ 或 $x=2$, 因而求得 $1-1+1-1+\cdots\cdots$ 之和爲 $\frac{1}{2}$, $1-2+4-8+16-\cdots\cdots$ 之和爲 $\frac{1}{3}$, 且對於此項可注意之結果,力求玄學的及神學的理由,以補充數學論證之不足(Leibniz 1696, Grandi 1703). Euler 氏亦曾以同法($x=1$ 時之級數值)求 $1^n-2^n+3^n-4^n+\cdots\cdots$ 及 $1!-2!+3!-4!+\cdots\cdots$ 等級數之和. 如是,彼時之人,實將每一公式視爲普遍可用,獨立存在,不問其來源如何,以爲其中之變數,任何值均可取者(1). 彼時固已有人對此發生

註: (1) 試以二項級數爲例,即可知其結果將如何:

$$\sqrt{1-z} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2\cdot4}z^2 - \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}z^3 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}z^4 - \cdots\cdots$$

今於其中設 $z=2$, 則實數之和,將成爲一虛數矣.

疑問,如 Varignon (1712), Nikolaus II, Bernoulli (1743). d'Alembert (1768) 等,但大率爲偶然的,對於彼時之思想,可謂毫無影響.直至十九世紀時,始發生此確信,知唯有收斂之級數,乃能有其存在之理由,亦唯有收斂之級數,方可由之以推論確切之結果. Gauss, Abel 及 Cauchy 諸人,於此方面貢獻尤多[1],自是以來,論證上之精密謹嚴,乃成爲數學研究上之特徵

9. 及至輓近,有極多發散的級數,始亦成爲精密研究之對象.於此,所用之方法殊多,但其共同之根本思想,則在將發散的級數與某種收斂的數列相關,而將後者之極限值視爲級數之值.凡發散級數,如能適用此種方法,則謂之可求其和者,且可按收斂數列之性質而分別之.例如在某種狀況下,吾人可對發散級數與一收斂的連分相關,因而將連分之値視爲級數之值.但關於發散級數之詳盡理論,則尤以某種平均值之構成爲其基礎.今姑以最簡單之例示其一斑.

註: (1) Gauss 氏曾於其 Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (1812) 中,謂"吾人之研究,自僅可限於收斂的事例方面,故如 $x>1$ 而欲求其值,此爲無意義之問題". 四十年之後, Gauss 於其致 Schumacher 之信中,復謂"收斂之級數,有清晰之意義可言,如此條件不存在,則其意義亦即隨而失去……余始終未承認發散的級數之亦可應用……無論何處,余僅能用及收斂之級數……" Abel 氏之 Untersuchung der binomischen Reihe (1826) 以及 Cauchy 之 Cours d'analyse (1821) 亦可參閱.

級數

$$(\mathfrak{A})\qquad a_1+a_2+a_2+\cdots\cdots$$

之爲收斂與否,隨其部分和數之數列

$$(\mathfrak{S})\qquad s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\cdots\cdots$$

是否爲收斂而定.今試作部分和數之算術平均數:

$$(\mathfrak{S}')\qquad s_1,\ \frac{s_1+s_2}{2},\ \frac{s_1+s_2+s_3}{3},\cdots\cdots,$$

則可知 $(\mathfrak{S})$ 收斂時, $(\mathfrak{S}')$ 亦必收斂,且其極限值相同.但有時亦可 $(\mathfrak{S}')$ 收斂而 $(\mathfrak{S})$ 則不然,於是 $(\mathfrak{A})$ 即發散,但吾人藉 $(\mathfrak{S}')$ 之助,仍不失其爲有和可求者,且可將

$$s=\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots\cdots+s_n}{n}$$

視爲其值.

試以

$$1-1+1-1+1-\cdots\cdots$$

爲例,則有

$$1,0,1,0,1,\cdots\cdots$$

爲 $(\mathfrak{S})$, 因而其 $(\mathfrak{S}')$ 爲

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\cdots\cdots$$

故如 n 爲奇數,則

$$\frac{s_1+s_2+\cdots\quad+s_n}{n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},$$

而如 n 爲偶數,則爲 $\frac{1}{2}$,故可知

$$\lim \frac{s_1+s_2+\cdots\cdots+s_n}{n}=\frac{1}{2}.$$

此卽上述意義下,級數

$$1-1+1-\cdots\cdots$$

之値也.

10. 級數中之特爲重要且其屬性亦以簡單見殊者,厥爲各項均爲正數之級數.於此,其部分和數構成一單調上升之數列(§ 27, **1**.),而由 § 28, **7**., 則可知:

各項均爲正數之級數,倘其部分和數所成之數列爲有界者,則此級數收斂,亦祇於此時方收斂,此項部分和數之上界,等於級數之和數.

但如部分和數之數列非爲有界者,則對於每一數目 N,可有一標數 n,自 s_n 以下,一切部分和數均大於 N,而級數爲發散者.

11. 級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots \tag{10}$$

之普通項爲 $a_n=\frac{1}{n}$,名爲調和級數 (harmonische Reihe).今試指出其發散性.因