蒋　声编著

高中立体几何妙题巧解

Gaozhong Liti Jihe
Miaoti Qiaojie

Shanghai Keji Jiaoyu Chubanshe

上海科技教育出版社

高中立体几何妙题巧解

蒋　声　编著

内容简介

本书介绍高中立体几何中的妙题巧解，内容丰富新颖，富有启发性，注重揭示思路，利于理解和掌握，可供高中师生和师范院校数学系学生阅读，并可供数学方法论和解题教学研究人员参考.

高中立体几何妙题巧解

蒋 声 编著

上海科技教育出版社出版发行

（上海冠生园路 393 号 邮政编码 200233）

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 140 000

1998 年 6 月第 1 版 1998 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—5000

ISBN 7－5428－1677－2/O·175

定价：6.00 元

如有质量问题，请与厂质量科联系。T：56628900×13

前　　言

上海科技教育出版社1989年出版了我编写的《初中代数妙题巧解》和《初中几何妙题巧解》以后，近几年间多次重印，仍然供不应求. 这说明精彩的数学题目和巧妙的解题方法就像好歌、好画、好电影，使人曲不离口、爱不释手，看了还要再看.

为了满足广大读者需要，上海科技教育出版社决定继续编辑出版《高中三角妙题巧解》、《高中代数妙题巧解》(上、下册)、《高中立体几何妙题巧解》和《高中平面解析几何妙题巧解》，将原有的一套2本初中数学妙题巧解扩大为一套7本中学数学妙题巧解，盛情邀我继续承担新编5本的写作任务，我非常感谢读者的鼓励和出版社的信任，愿尽最大努力写好书稿.

“巧解”读物的通常写法是每题先讲一种“常规”讲法，然后介绍巧妙解法，通过比较判断优劣. 本书写法单刀直入，不拿“常规”解法作陪衬，专讲巧解. 这样可使篇幅减少一半以上，书价降低一半以上，阅读时间节省一半以上.

这套巧解书的着眼点在于帮助提高数学素质，试图揭示怎样从巧妙思路导致巧妙解法. 中学数学老师和中学生们可以从中吸取前人的宝贵经验，用来帮助自己节省解题时间，把自己的解题能力推向新的高度. 数学方法论和解题教学理论的研究者们可从中发现众多闪耀智慧火花的解题实例，借以

印证自己的理论和发展新的构思.

顺便向正在中学读书的同学们提个建议:做作业或考试时宜于以巧求快,空闲无事时不妨慢慢琢磨巧上加巧.

本书酝酿和编写过程中参考了大量中文和外文资料,难以一一列举,在此谨向各位有关作者表示衷心感谢.编写时自然会带进很多个人工作的痕迹,疏漏及错误在所难免.陈瑞琛同志仔细阅读了全部书稿,提出了多处批评和改进意见.恳切地希望能够听到更多同志的批评和建议,谨向所有阅读和关心本书的朋友们预先说一声“谢谢”!

众人拾柴火焰高,一道妙题和一种巧解往往要经过很多人很长时间改进、发展和完善,才能具有今天的形式。让我们都来参加这“拾柴助焰”的行列,使数学的和谐美更加光华焕发,使数学的创造力为人类作出更大贡献!

蒋　声

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

1. 新事物

在平面几何里，各边都相等的四边形是菱形，因而两组对边一定分别平行.

在立体几何里，情形如何呢？请看下面的问题 1.

问题 1　在空间里，一个四边形的四条边都相等，那么它的对边是否一定互相平行？

解　如图 1-1，设正方体的棱长为 1，那么由它的四个面上的对角线组成的四边形 $AFCH$ 各边长度相等，都等于 $\sqrt{2}$. 但是它的对边 AF 和 HC 是异面直线，FC 和 AH 也是异面直线.

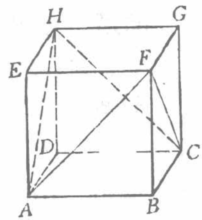

图 1-1

由此可见，在空间里，一个四边形的四条边都相等，它的对边可能是异面直线，不一定平行.

下面是一个类似的问题.

问题 2　在空间里，一个六边形的三组对边分别平行，那么这个六边形是否一定全部位于某一平面内？

解　如图 1-1，由正方体的六条棱组成的六边形 $ABCGHE$ 中，

$$AB \parallel HG, BC \parallel EH, CG \parallel AE.$$

所以它的三组对边分别平行. 但是 AB 和 CG 是异面直线，所以这个六边形不是平面图形.

从平面几何转入立体几何，研究对象从一个平面内的图

形扩大到全空间，遇见许多新事物．在上面的问题 1 和问题 2 中，都要与异面直线打交道．异面直线就是立体几何中特有的概念，在空间图形里大量存在异面直线．忽视了异面直线，该答“否”的问题可能答成“是”．注意观察和研究异面直线，可以帮助我们提高空间想象能力．

2．对角线中点连线

问题　已知空间四边形的对边相等，求证：它的两条对角线的中点的连线垂直于两条对角线．

证明　如图 2-1，在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB = CD$，$AD = BC$，E、F 分别是 AC、BD 的中点．连结 AF、CF、BE、DE．

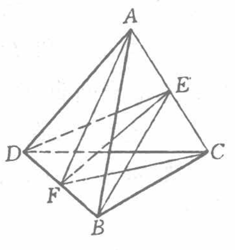

图 2-1

$\triangle BAC$ 和 $\triangle DCA$ 的三边对应相等，所以

$$\triangle BAC \cong \triangle DCA.$$

全等三角形的对应中线相等，所以

$$BE = DE.$$

在等腰$\triangle EBD$ 中，EF 是底边 BD 上的中线，因而也是底边上的高，即

$$EF \perp BD.$$

同理可证

$$EF \perp AC.$$

本题的条件和任务看上去毫不相干，南辕北辙，似乎很难

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.

下手.解题时,抓住任务中的“中点”和“垂直”,联想到线段的垂直平分线.如果结论正确,EF 应该是线段 BD 的垂直平分线,也是线段 AC 的垂直平分线.垂直平分线上任意点到线段两端等距离.由此想到连结 BE、DE、AF、CF,只用了几个简单的平面几何定理,就轻松地解决了貌似困难的立体几何问题.

3. 等腰梯形扭曲

设想等腰梯形的上、下底和两底中点连线是用金属杆做的,两腰是用橡皮筋拉紧而成的.让它的下底固定不动,上底绕着两底中点连线旋转一个角度,两腰的橡皮筋跟着拉长,结果得到一个空间四边形.这种特殊的空间四边形有些什么性质呢?这就是下面的问题所要讨论的.

问题 设在空间四边形 $ABCD$ 中,AD、BC 的中点分别为 M、N,并设 $MN \perp AD$,$MN \perp BC$.求证:

(1) $AB = DC$;

(2) $AC = BD$;

(3) MN 与 AB、DC 成等角.

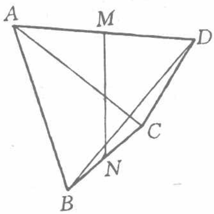

图 3-1

证法一 如图 3-1,把整个图形绕直线 MN 旋转 $180°$,那么由于 $MN \perp AD$ 和 $MA = MD$,A 点将和 D 点交换位置;同理 B 点将与 C 点交换位置.

线段 AB 经过旋转后与线段 DC 重合,所以

$$AB = DC.$$

线段 AC 经过旋转后与线段 BD 重合，所以

$$AC = BD.$$

旋转把 AB 变到 DC ，同时把 MN 仍变到 MN . 这样，就使直线对 MN、AB 旋转到直线对 MN、DC 的位置，所以 MN 与 AB 所成的角等于 MN 与 DC 所成的角.

说明 证法一是旋转法. 通过观察条件，发现图形内在的对称性，绕轴旋转 180°，使图形的一部分与另一部分重合，从而证明线段相等、角相等.

证法一特别简便，只是不大容易想到. 下面的证法二，思路也很简洁自然，比较容易掌握.

证法二 如图 3-2，在平面 ADN 内，过点 N 作 $EF \parallel AD$ ，又作 $AE \parallel MN$，$DF \parallel MN$，分别交 EF 于点 E 和点 F ；连结 BE、CF .

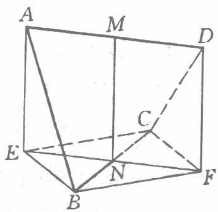

图 3-2

由条件 $MN \perp AD$，$MN \perp BC$，得 $AE \perp EF$，$AE \perp BC$. 所以 $AE \perp$ 平面 BEF . 由此推出 $AE \perp BE$. 同理 $DF \perp FC$.

从平行四边形 $AEFD$ 得到

$$AE = DF. \qquad ①$$

在 $\triangle BEN$ 和 $\triangle CFN$ 中，

$$\angle BNE = \angle CNF, BN = NC,$$
$$EN = AM = MD = NF,$$
$$\therefore \triangle BEN \cong \triangle CFN.$$
$$\therefore BE = CF. \qquad ②$$

由①式和②式得

$$Rt\triangle AEB \cong Rt\triangle DFC.$$

$$\therefore AB = DC, \qquad ③$$

$$\angle BAE = \angle CDF. \qquad ④$$

这里的③式就是问题的结论(1),④式表明 MN 与 AB 所成的角等于 MN 与 DC 所成的角,即问题的结论(3).

最后,连 EC、FB (如图 3-2),则

$$AE \perp EC,$$

$$DF \perp FB.$$

仿上可证

$$Rt\triangle AEC \cong Rt\triangle DFB.$$

$$\therefore AC = DB.$$

这样就完全证明了问题的三个结论.

说明 证法二是平移法.利用垂直条件和相等条件,通过将线段 AD 平行移动到 EF 的位置,造成一些辅助三角形,化立体几何问题为平面几何问题,利用三角形全等证明线段相等、角相等.

将问题 2 中这种特殊空间四边形的边 AD 绕 MN 任意旋转,性质(1)、(2)、(3)保持不变.特例当图形变成等腰梯形时,这些性质仍然成立.

4. 过中点的平面

在平面几何里,$\triangle ABC$ 的 AB 边的中点与 BC 边的中点的连线平行于第三边 AC .

下面是在立体几何里的一个对应的问题.

问题 1 设 AB、BC、CD 是不在同一平面内的三条线段,

则过这三条线段中点的平面平行于 AC 和 BD.

证明 如图 4-1,设线段 AB、BC、CD 的中点分别是 E、F、G,过三点 E、F、G 的平面是 M. 连结 AC 和 BD,则由 $\triangle ABC$ 得

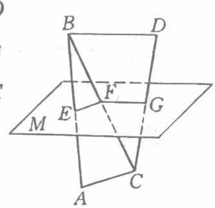

图 4-1

$$EF \parallel AC.$$

现在证明 AC 不在平面 M 内. 用反证法.

假定线段 AC 在平面 M 内,那么因为点 G 在平面 M 内,则过点 C 和点 G 的直线 CD 就要在平面 M 内. 同理 AB、BC 也都在平面 M 内. 但是已知 AB、BC、CD 不在同一平面内,因而导致矛盾. 所以 AC 不在平面 M 内.

平面 M 外的直线 AC 平行于平面 M 内的直线 EF,所以

$$AC \parallel \text{平面 } M.$$

同理

$$BD \parallel \text{平面 } M.$$

解答问题 1 的时候,知道了 AC 平行于平面 M 内的一条直线 EF,不能立刻断定 AC 平行于平面 M,还必须证明直线 AC 不在平面 M 内. 这是一个关键,很容易被忽略.

问题 1 推广了三角形中位线的一个性质. 反过来对不对呢? 这样就提出了下面的问题.

问题 2 设 AB、BC、CD 是不在同一平面内的三条线段. 试问:过其中一条线段的中点且平行于 AC 和 BD 的平面,是否一定通过另两条线段的中点?

问题 2 的答案是肯定的,证明也不难,请读者自己试一试.

5. 空间四边形与比例线段

在平面几何里，经常用到平行线截割线段成比例的定理. 在立体几何里也有类似的性质，下面就是一个有关问题.

问题 1 求证：平行于空间四边形一组对边的平面，把另一组对边分成的四条线段成比例.

证明 如图 5-1，设 $ABCD$ 是空间四边形，平面 $M \parallel AB$，平面 $M \parallel CD$，并设平面 M 分别交 BC、DA 于点 E、F. 要证明 E、F 把 BC、AD 分成的四条线段成比例.

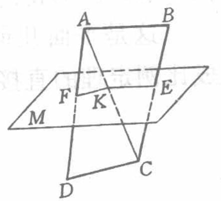

图 5-1

为此，设平面 M 交直线 AC 于点 K. 于是 EK 是平面 ABC 和平面 M 的交线.

因为平面 $M \parallel AB$，所以 $EK \parallel AB$.

$$\therefore \frac{BE}{EC} = \frac{AK}{KC}.$$

同理 $FK \parallel DC$，因而

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AK}{KC}.$$

$$\therefore \frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD}.$$

这正是所要证明的.

可以把问题 1 的图形变化得复杂一些.

因为平面 M 同时平行于直线 AB 和 CD，所以可通过 AB 作平面 $N \parallel$ 平面 M，并且通过 CD 作平面 $P \parallel$ 平面 M.

这样就将问题 1 改头换面，变成下面的问题.

问题 2 已知两条异面直线分别与一组平行平面 N、M、P 顺次相交于点 A、F、D 和 B、E、C. 求证：$\frac{AF}{FD}=\frac{BE}{EC}$.

问题 2 的证明很容易归结为问题 1（如图 5-2），所以不详细写了.

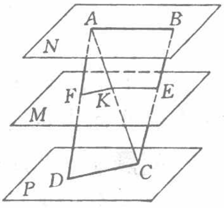

图 5-2

问题 2 的结论可以看成平行平面截割线段成比例定理：

空间两直线 AD 和 BC 被一组平行平面 N、M、P 截得的对应线段成比例.

这是平面几何中的平行线截割线段成比例定理的直接推广.

6. 空间四边形对边夹角

问题 如图 6-1，在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$CD=20$，E、F 分别是边 AD 和 BC 上的点，$EF=7$，并且 $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}=\frac{1}{3}$. 求 AB 和 CD 所成的角.

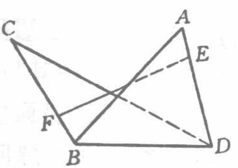

图 6-1

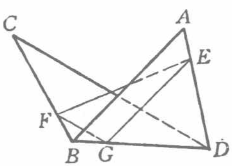

图 6-2

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com