数学才能的培养

CULTIVATION OF MATHEMATICAL ABILITY

傅学顺　王屏山　著

暨南大学出版社

责任编辑：吕葆华
封面设计：山　内

ISBN 7－81029－068－1/O·6

定价：5.80元

数学才能的培养

傅学顺　王屏山　著

暨南大学出版社
1991. 广州

前　言

本书与《数学思维能力的训练》、《中学生数学灵感的培育》（笔者与王屏山合著，下称《训练》、《培育》）两书配套。《训练》取材兼顾高初中，《培育》取材侧重初中几何，本书取材主要是高中三角。这套书汇集的思维方法、思维教学法、教学语言和教学艺术，发源于波里亚、华罗庚、关肇直、傅种孙、钱学森等教授的工作，而为中学生、中学教师、师范院校数学系学生和担任教学法课程的年青教师所急需。

如今，学生们和教师们急需的，显然不再是习题解，也非智商测定那一套，而是能够教人思维，使人变聪明，帮人撤除心理障碍，让人振作起来的东西。当然，“万能方法”的广告总是骗人的，我们只能提供数学思维的基本方法。而为了更加实用更有说服力，我们必须在高初中数学中，挑选一些既难教又难学但有后劲的课程来实施突破。于是形成了今天的系列著作，向人们展示数学思维教学法的概貌，连同它的实用性，让大家检阅一下我们所做的继承和发展，也在读者面前暴露我们的谬误；新东西犹如毛手毛脚的孩子，是不怕人家笑话的。

在本项目的研究过程中，曾得到江泽涵教授、丁石孙教授、潘云鹤教授、戴汝为教授、李未教授、严士健教授等的指导。也得到华南师大刘颂豪校长等领导的支持，并定为理科的选修课程。还得到1985年以来，参加傅学顺主讲的《数学思维教学法》讲习班的同仁的帮助。1981年以来，参加傅学顺任教的选修课程《思维

方法》的学生们，也曾提出许多宝贵意见。在此一并致谢。

本书分“思维方法”和“基本训练”两大部分，以适应各类学校和不同程度学生的需要和侧重。两部分是有机联系在一起的，可以根据自己的情况决定研读的先后次序。基础稍逊者，请先读第二章。带星号*的例题较难，可以缓做。一般学生在研读时，应当从中领悟自己与高材生的差距，并努力缩短之。

傅学顺

1991年8月于华南师范大学

目　录

三角反应块体系与典型例题集锦（细目）

第一章 思维方法

第一节 高一时机别错过

在《培育》一书中我们曾经提出，初中是培养人材的关键时期，错过良机将难于补救。然而，我们必须面对现实，再难，也要设法去补救。这正是撰写本书的主要目的之一。

何时补救，如何补救？这两个问题是核心。我们认为，就思维训练而言，高中的最重要阶段是高一，其次是高二，而不是高三。我们坚信，许多教师、家长将会认识到这一点，把高一扎扎实实的训练看得比高三的“百米冲刺”更重要，前者是后者的坚实基础。

第一，我国的初中教育还处在普及阶段，提高的问题一时难以解决，思维训练受到种种条件的限制，大多数初中毕业生不能形成一套精良的思维方法和学习方法，而且把思维缺陷甚至把不良学风带到高中来，滑过高一，并立即被高二的匆忙所掩盖。

第二，高一松驰，高二紧迫，高三忙乱是普遍现象。许多学校匆匆忙忙在高二就结束高中的全部课程，把高三变成“复习年”，把前两年囫囵吞下的知识再“过”一遍，然后是大搞题海战术、模拟考试、猜测试题……。结果，使尽一切招数，升学率却年年依旧，似乎一切都到了极限。看来，只有把高一、高二囫囵吞枣，高三事倍功半的战术，改为高一抓紧、高二略紧、高

三事半功倍，才有可能改变局面。由此可见，光把升学率视为教学目的，而忽视了人才素质培养，往往适得其反，所谓“欲速则不达”！

第三，平面三角是高中学生感到最难学的课程之一，公式最多，关系也杂，变化无穷，有些问题乍看还挺“怪”，知识和思维都令人眼花缭乱。可是，它的后劲却十足，其知识其思维对学好高等数学影响很大(不象平面几何，到最后只剩下思维的深远影响)，因而它在任何课程、教学改革中，都风雨不动安如山。

第四，高中是青年身体发育、思维发展的重要阶段。那些错过了初中严格训练的学生虽然难以补救，但不是不可以补救，特别是那些学风正而初中条件差的学生，一旦在高一得到优良的训练，犹如禾苗久旱之后得甘霖，其发展速度将是惊人的。学校应当为这些学生创造方便条件，让其在心理上、方法上、战术上都能得到正规训练，这是他们难得的一次机会。

第五，最迟在高一就应当让学生明瞭灵感与后天所获思维方法的必然联系，而不理睬灵感与先天(天赋)之间谁也说不清的模糊关系。使学生有机会品尝灵感降临的滋味，正确认识自己，萌发抱负。甘罗发早固然好，子牙迟来亦可嘉！

第二节　见微知著联想·反应法则

——灵感从突破口溜出来

在《训练》一书中我们曾经论述：联想和猜想一样，都是分析的动力，应当尽量多给学生提供而不是剥夺联想的机会（第二章第一节）。在《培育》一书中，我们进一步论证：第一，训练联想能力主要指训练见微知著的本领；第二，靠联想识破绽，引起反拐弯转化，拐回到编题者初编出来尚未拐弯的问题（不明真相者误以为灵感来自天赋）；第三，或靠转化露出破绽，进而引起联想，转化、联想、猜想贯穿思维始终；第四，启发式的关键是启，把学生引到“世外桃源”的洞口（突破口），让学生自己去“发”。为此，教师必须亲身经历思维过程，摸清突破口，萃取思维方法，设计师生“同步思维”教案，而不能依赖习题集！（第七节）。现在，让我们来继续这项研究：

例 1． 求证：在钝角或锐角$\triangle ABC$中，必有

$$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C \qquad ①$$

【分析】 没有一个三角公式含有三个tg之和，也没有一个公式含三个tg之积，套现成的公式不可能。但①的左边和右边都含有两个tg之和或积，这就应当联想到和角正切公式，并把①转化为：

$$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B=\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C-\mathrm{tg}C \qquad ②$$

进而 $\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B=\mathrm{tg}C(\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B-1)$（露出两突破口！） ③

进而 $\mathrm{tg}C=\dfrac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B-1}=-\mathrm{tg}(A+B)$ 当然！ ④

这就找到了解法：$\triangle ABC \to ④ \to ③ \to ② \to ①$

例 2．求证：

① $\operatorname{tg}3a-\operatorname{tg}2a-\operatorname{tg}a=\operatorname{tg}3a\operatorname{tg}2a\operatorname{tg}a$；

② $\operatorname{tg}(na+ma)-\operatorname{tg}na-\operatorname{tg}ma=\operatorname{tg}(na+ma)\operatorname{tg}na\operatorname{tg}ma$；

③ $\operatorname{tg}na-\operatorname{tg}ma-\operatorname{tg}(na-ma)=\operatorname{tg}na\operatorname{tg}ma\operatorname{tg}(na-ma)$．

【分析】有时候，突破口往往被一层“灰尘”蒙起来，但拂去灰尘易如反掌，仿例 1：

①原式可变为 $\operatorname{tg}3a(1-\operatorname{tg}2a\operatorname{tg}a)=\operatorname{tg}2a+\operatorname{tg}a$，突破口 $1-\operatorname{tg}2a\operatorname{tg}a$ 和 $\operatorname{tg}2a+\operatorname{tg}a$ 一起露了出来，也是公式

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$$

的两个组成部分。于是，“恢复”公式的行动开始：

只需 $\operatorname{tg}3a=\dfrac{\operatorname{tg}2a+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}2a\operatorname{tg}a}=\operatorname{tg}(2a+a)$，当然！

②依法突破：

欲原式成立，

需 $\operatorname{tg}(na+ma)(1-\operatorname{tg}na\operatorname{tg}ma)=\operatorname{tg}na+\operatorname{tg}ma$，

需 $\operatorname{tg}(na+ma)=\dfrac{\operatorname{tg}na+\operatorname{tg}ma}{1-\operatorname{tg}na\operatorname{tg}ma}$ 当然！

③是②的变种，可直接证明，留给读者去完成。

例 3．①不查表求 $\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}10^\circ$；

②自编这类题目． $10°+20°+60°=90°$

【分析】①去“灰尘”：

$$\text{原式}=\operatorname{tg}20^\circ(\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}60^\circ)+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}10^\circ,$$

有两处使我们联想到公式

$$\frac{\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}60^\circ}{1-\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}60^\circ}=\operatorname{tg}70^\circ$$

从而采取行动：

$$\text{原式}=\text{tg}20°\text{tg}70°(1-\text{tg}10°\text{tg}60°)+\text{tg}60°\text{tg}10°$$
$$=\text{tg}20°\text{ctg}20°(1-\text{tg}10°\text{tg}60°)+\text{tg}60°\text{tg}10°$$
$$=1-\text{tg}10°\text{tg}60°+\text{tg}60°\text{tg}10°=1$$

②由$10°+20°+60°=90°$可悟出新题无数，比如不查表求：

$\text{tg}11°\text{tg}21°+\text{tg}21°\text{tg}58°+\text{tg}58°\text{tg}11°$，

$\text{tg}\alpha\text{tg}\beta+\text{tg}\beta\text{tg}(90°-\alpha-\beta)+\text{tg}(90°-\alpha-\beta)\text{tg}\alpha$

解法留给读者去完成。还可以通过诱导拐弯，使题目变得更难。

例4．不查表而求下式的值：（留给学生去完成）

$$①\frac{\text{tg}15°+\text{tg}25°}{\text{ctg}50°}+\frac{\text{tg}25°+\text{tg}50°}{\text{ctg}15°}+\frac{\text{tg}50°+\text{tg}15°}{\text{ctg}25°};$$

$$②\text{tg}42°-\text{tg}28°-\text{tg}14°-\frac{2\text{tg}21°\text{tg}28°\text{tg}14°}{1-\text{tg}^2 21°}.$$

例5．设x^2+px+q的两根为$\text{tg}\alpha,\text{tg}\beta,q\neq1$．求下式的值：

$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$．

【分析Ⅰ】由韦达定理得出：

$$\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta=-p,\quad \text{tg}\alpha\text{tg}\beta=q, \qquad ①$$

备用。不料触发联想：①是那个公式组成部分，因而推出

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{-p}{1-q}=\frac{p}{q-1} \qquad ②$$

备用。为了利用已有成果②，采取行动：

$$\text{原式}=\cos^2(\alpha+\beta)[\text{tg}^2(\alpha+\beta)+p\text{tg}(\alpha+\beta)+q]$$

$$=\frac{1}{1+\text{tg}^2(\alpha+\beta)}[\text{tg}^2(\alpha+\beta)+p\text{tg}(\alpha+\beta)+q]$$

$$=\frac{(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}\left[\frac{p^2}{(q-1)^2}+\frac{p^2}{q-1}+q\right]$$

$$=\frac{(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}\cdot\frac{p^2+p^2(q-1)+q(q-1)^2}{(q-1)^2}$$

$$=q.$$

既知答案，便可以"凑"出巧办法：

【分析Ⅰ】首先凑出答案q来：

$$\text{原式}=\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q[1-\sin^2(\alpha+\beta)]$$

$$=q+(1-q)\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$$

$$=q+\cos^2(\alpha+\beta)[(1-q)\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+p\operatorname{tg}(\alpha+\beta)]$$

$$=q+\cos^2(\alpha+\beta)\left[\frac{p^2}{1-q}+\frac{p^2}{q-1}\right]$$

$$=q+\cos^2(\alpha+\beta)\cdot 0=q.$$

上述推导中设$\cos(\alpha+\beta)\neq 0$，请读者考虑它能否由$q\neq 1$推出来？

例6．求$(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)\cdots(1+\operatorname{tg}43^\circ)\times(1+\operatorname{tg}44^\circ)(1+\operatorname{tg}45^\circ)$.

【分析】联想到例3的一般结果和$\operatorname{tg}45^\circ=1$，进行如下分组计算：

$$\text{原式}=(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}44^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)(1+\operatorname{tg}43^\circ)\times\cdots(1+\operatorname{tg}22^\circ)(1+\operatorname{tg}23^\circ)(1+\operatorname{tg}45^\circ)$$

$$=(1+\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}44^\circ+\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}44^\circ)\times(1+\operatorname{tg}2^\circ+\operatorname{tg}43^\circ+\operatorname{tg}2^\circ\operatorname{tg}43^\circ)\cdots\times(1+\operatorname{tg}22^\circ+\operatorname{tg}23^\circ+\operatorname{tg}22^\circ\operatorname{tg}23^\circ)(1+\operatorname{tg}45^\circ)$$

$$=[1+\operatorname{tg}45^\circ(1-\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}44^\circ)+\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}44^\circ]\times[1+\operatorname{tg}45^\circ(1-\operatorname{tg}2^\circ\operatorname{tg}43^\circ)+\operatorname{tg}2^\circ\operatorname{tg}43^\circ]\cdots\times[1+\operatorname{tg}45^\circ(1-\operatorname{tg}22^\circ\operatorname{tg}23^\circ)+\operatorname{tg}22^\circ\operatorname{tg}23^\circ]\times(1+\operatorname{tg}45^\circ)$$

$$=2\cdot 2\cdots 2\cdot 2=2^{23}.$$

例7．求证：在锐角$\triangle ABC$中，$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B>1$，$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}C>1$，$\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C>1$．

【分析】有了例 1－6 的训练，见微知著联想本领大了，不难发现诸不等式左端都是两个正切之积，因此想起是和角正切公式或差角正切公式的分母的一部分（"洞口"够小了！"仿佛若有光"的光够弱了！），于是采取行动：

$$\because \qquad \mathrm{tg}(A+B)=\frac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B}{1-\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B}$$

$$\therefore \qquad 1-\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B=\frac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}(A+B)}$$

则

$$\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B=1-\frac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}(A+B)}$$

与目标 $\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B>1$ 比较，便有了主意：

$$\therefore \qquad \mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B=1-\frac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B}{-\mathrm{tg}C}$$

$$=1+\frac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}C}>1.$$

其他两式同理可证.

例 8．设 $0<\alpha,\ \beta,\ \gamma<\frac{\pi}{2}$，则 $\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\gamma)$

$+\mathrm{tg}\beta(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\gamma)+\mathrm{tg}\gamma(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta)\geqslant 6$.

【分析】先把函数统一就可以发现一些规律：

$$\text{原式左}=\left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}+\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\gamma}\right)+\left(\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha}+\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\gamma}\right)+\left(\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\alpha}+\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\beta}\right)$$

$$=\left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}+\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)+\left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\gamma}+\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)+\left(\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\gamma}+\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\beta}\right)$$

$$\geqslant 2+2+2 \qquad \text{（据本节附录推论 I ）}$$

例 9．设 $\alpha,\ \beta,\ \gamma>0$ 且 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$，则

$$\sqrt{\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta+4}+\sqrt{\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma+5}+\sqrt{\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha+6}\leqslant 4\sqrt{3}.$$

【分析】联想到例 3 以及分散在各根式下的成份，用本节附录推论Ⅳ试试：

$$
\begin{aligned}
\text{原式左} &\leqslant \sqrt{3(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+4+5+6)} \\
&=\sqrt{3[\operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma)+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+15]} \\
&=\sqrt{3[\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\gamma)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma)+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+15]} \\
&=\sqrt{3[(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma)+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+15]}=4\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

例10. 在$\triangle ABC$中，求$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}$的最小值.

【分析】本题的“洞口”较小且隐蔽，透光更弱更是“仿佛”．但有了例 1－9 的经验，就有可能想起本节附录推论Ⅲ的妙用，把问题转化为易：$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

$$\text{原式} \geqslant \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

其中等号当且仅当$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}$即$A=B=C=60^\circ$时成立。

迈出了这一步，自然联想到例3，采取下列行动：

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \\
&=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \\
&=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \\
&=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \\
&=\left(1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \\
&=1.
\end{aligned}
$$

则 $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1$，当$A=B=C=60^\circ$时等号成立，

即 $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}$的最小值为1．

例11． 在锐角△ABC中，求证：①$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\geqslant 3\sqrt{3}$，

②$\operatorname{tg}^n A+\operatorname{tg}^n B+\operatorname{tg}^n C\geqslant 3^{\frac{n+2}{2}}$．

【分析】 由①左端自然联想到例1的结论：

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

而 $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}$，（附录推论Ⅴ）

∴ $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}$，

则 $(\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C)^{\frac{2}{3}}\geqslant 3$，

∴ $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C\geqslant 3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$， ①

则 $\operatorname{tg}^n A+\operatorname{tg}^n B+\operatorname{tg}^n C\geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^n A\operatorname{tg}^n B\operatorname{tg}^n C}$

$$=3(\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C)^{\frac{n}{3}}$$

$$\geqslant 3\cdot(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{n}{3}}=3^{\frac{n}{2}+1}.$$ ②

例12． 在△ABC中，$A<B<C$，且A，B，~~C成等差~~数列（即$B-A=C-B$），设$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}C=2+\sqrt{3}$，而$AC$，$AB$为方程

$$\lg(x^2+4)=\lg x+\lg\sin\frac{3\pi}{4}+\lg 12$$

的两根，求BC。

【分析】 ∵$B-A=C-B$，∴$2B=A+C$，$3B=\pi$，$B=\frac{\pi}{3}$．

$A+C=\frac{2}{3}\pi$．由$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}C=2+\sqrt{3}$，立即联想到公式

$$\operatorname{tg}(A+C)=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}C},$$