


高等学校经济管理学科数学基础系列教材

# 线性代数

◎ 张学奇 主编

 中国人民大学出版社

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

---

# 线性代数

◎ 张学奇 主编

中国人民大学出版社  
· 北京 ·

## 图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数/张学奇主编.

北京: 中国人民大学出版社, 2009

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

ISBN 978-7-300-11594-8

I. ①线…

II. ①张…

III. ①线性代数-高等学校-教材

IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 231063 号

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

线性代数

张学奇 主编

Xianxing Daishu

---

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

电 话 010-62511242 (总编室)

010-82501766 (邮购部)

010-62515195 (发行公司)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com>(人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 三河汇鑫印务有限公司

规 格 170 mm×228 mm 16 开本

印 张 14 插页 1

字 数 255 000

邮政编码 100080

010-62511398 (质管部)

010-62514148 (门市部)

010-62515275 (盗版举报)

版 次 2010 年 1 月第 1 版

印 次 2010 年 1 月第 1 次印刷

定 价 19.00 元

---

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

## 内容简介

本书是依据高等学校经济管理类本科数学基础课程的教学基本要求，在总结线性代数课程教学改革成果，吸收国内外同类教材的优点，结合我国高等教育发展趋势的基础上编写而成。

本书在为学生提供必要的基础知识和基本技能的同时，优化构建教学内容与课程体系，注重课程的思想性和结构特征，突出数学应用和建模能力的培养，力求实现理论教学与实际应用、知识传授与能力培养的统一。

全书内容包括矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性代数应用与模型。本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，注重应用，例题典型，习题丰富，内容组织上力求做到自然直观，通俗易懂，教与学结合，易教易学。本书还配有辅导用书《线性代数辅导教程》、《线性代数习题全解》、电子教案、线性代数网络课程等立体化教学资源。需要教学课件的老师，请发邮件到 [math@crup.cn](mailto:math@crup.cn) 索取。

本书适合于高等学校经济类和管理类各专业学生使用，也可供理工科学生和科技工作者阅读参考。

# 前 言

本书是依据高等学校经济类、管理类各专业对线性代数课程的教学要求，在总结线性代数课程教学改革成果，吸收国内外同类教材的优点，结合我国高等教育发展趋势的基础上编写的。

本书的编写以强化概念理解，突出思想方法，培养数学思维和应用能力为指导，力求实现理论教学与实际应用、知识传授与能力培养的统一。本书注重突出以下特点：

优化构建教学内容与课程体系。在概念的引入上，注意从具体实际问题入手，从具体到抽象，从特殊到一般，由浅到深，由易到难，突出概念的思想性，逐步深化对概念的理解。在内容的组织上，注重思想方法和知识的内在特征的强化，理论与应用的结合，知识和能力的统一。

注重课程的思想性和结构特征。对内容的处理在保证内容自身的系统性和科学性的基础上，更加突出内容主题、思想和结构。例如，突出矩阵的初等变换和秩的作用，贯穿课程始终；强化矩阵的秩、向量组的相关性和线性方程组的解三者之间的联系，形成有机的整体；注重实对称矩阵对角化和二次型标准化思想方法的一致性。

突出数学应用和建模能力的培养。在加强概念与理论应用背景介绍的基础上，结合课程内容编写了“线性代数应用与模型”一章，通过有步骤、专题式的建模过程学习，逐步培养学生用数学的意识、获取新知识的能力和数学建模能力。

注重教材的实效性。教材的编排在体现结构上的严谨、逻辑上的清晰、叙述上的通俗易懂的同时，合理地分散难点，恰当地处理内容，渗透教学思想，使得教师和学生都方便使用，有利于教学质量的提高。

全书内容包括矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值和特征向量、二次型、线性代数应用与模型。本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，注重应用，可作为高等学校线性代数课程的教材。

在例题与习题的设计与编选上，注重体现例题典型，习题覆盖面宽、题型丰

富、难易适度的原则。按节配有适量的基本练习题，按章配有适当的提高练习题，书末附有答案与提示，便于检查参考。

为了使学生更好地掌握线性代数的内容，提高学生分析问题和解决问题的能力，拓展学生的学习空间，我们还编写了与教材配套的辅导用书《线性代数辅导教程》和《线性代数习题全解》。《线性代数辅导教程》包括教学基本要求、内容概要、知识结构图、要点剖析、释疑解难、典型例题解析、单元自测题等内容，思路清晰，突出对教学内容的提炼、要点的剖析和解题方法的点拨，注重典型例题的分析和总结，对提高学生学习兴趣、培养分析和解决问题的能力具有积极的促进作用。《线性代数习题全解》对教材的全部习题都给出了完整、典型、详实的解答，对重点习题给出了分析和解题指导。

为适应教育信息化发展的需要，我们结合现代化教育手段编制了与教材配套的线性代数电子教案、线性代数网络课程等教学资源，为教师组织教学和学生自主学习创造了条件。

本书由张学奇教授主编，参加本书编写的还有贺家宁、李芳。本书的编写参阅了国内外一些优秀教材，从中受到了有益的启发，吸取了先进的经验。本书的出版受到了中国人民大学出版社编辑潘旭燕、刘冬的支持与帮助，在此一并表示感谢！

限于编者的水平，加之时间仓促，本书难免存在不足之处，殷切期望专家、同行和读者批评指正，以使本书不断完善和提高。

张学奇

2009年12月

# 目 录

第一章 矩阵 .....	1
§ 1.1 矩阵的概念 .....	1
一、矩阵的概念 .....	1
二、几种特殊的矩阵 .....	3
习题 1.1 .....	5
§ 1.2 矩阵的运算 .....	6
一、矩阵的加法 .....	6
二、数与矩阵的乘法 .....	7
三、矩阵的乘法 .....	7
四、矩阵的转置 .....	12
习题 1.2 .....	14
§ 1.3 方阵的行列式 .....	15
一、二阶、三阶行列式 .....	15
二、排列与逆序 .....	17
三、 $n$ 阶行列式的定义 .....	18
四、行列式的性质 .....	20
五、行列式按行(列)展开 .....	23
六、行列式计算 .....	28
七、方阵的行列式 .....	31
习题 1.3 .....	32
§ 1.4 可逆矩阵 .....	34
一、可逆矩阵 .....	34
二、矩阵可逆的条件 .....	35
三、可逆矩阵的运算性质 .....	38
习题 1.4 .....	39
§ 1.5 分块矩阵 .....	40
一、矩阵的分块 .....	40
二、分块矩阵的运算 .....	41
习题 1.5 .....	45

§ 1.6 矩阵的初等变换	45
一、矩阵的初等变换与初等矩阵	46
二、矩阵的等价标准形	49
三、利用初等变换求逆矩阵	53
习题 1.6	55
§ 1.7 矩阵的秩	56
一、矩阵的秩	56
二、利用初等变换求矩阵的秩	57
习题 1.7	59
总习题一	60
<b>第二章 线性方程组</b>	64
§ 2.1 线性方程组	64
一、线性方程组的概念	64
二、克拉默 (Cramer) 法则	67
三、高斯 (Gauss) 消元法	70
四、线性方程组有解的判定定理	75
习题 2.1	82
§ 2.2 $n$ 维向量及其线性运算	83
一、 $n$ 维向量的概念	83
二、向量的线性运算	85
习题 2.2	87
§ 2.3 向量间的线性关系	87
一、向量组的线性组合	87
二、向量组的线性相关性	91
三、向量组的线性组合与线性相关关系定理	95
习题 2.3	97
§ 2.4 向量组的秩	97
一、向量组的等价	98
二、极大线性无关组和向量组的秩	99
三、向量组的秩与矩阵的秩的关系	101
习题 2.4	104
§ 2.5 线性方程组解的结构	105
一、齐次线性方程组解的结构	105
二、非齐次线性方程组解的结构	111



习题 2.5 .....	114
总习题二 .....	115
<b>第三章 向量空间</b> .....	120
§ 3.1 向量空间 .....	120
一、向量空间与子空间 .....	120
二、 $\mathbf{R}^n$ 的基与向量的坐标 .....	121
三、 $\mathbf{R}^n$ 的基变换与坐标变换 .....	123
习题 3.1 .....	125
§ 3.2 向量的内积 .....	126
一、向量内积 .....	126
二、正交向量组 .....	127
习题 3.2 .....	129
§ 3.3 正交矩阵 .....	130
一、标准正交基 .....	130
二、正交矩阵 .....	131
习题 3.3 .....	132
总习题三 .....	133
<b>第四章 矩阵的特征值和特征向量</b> .....	135
§ 4.1 矩阵的特征值和特征向量 .....	135
一、矩阵的特征值和特征向量的概念 .....	135
二、矩阵的特征值和特征向量的求法 .....	137
三、矩阵的特征值和特征向量的性质 .....	140
习题 4.1 .....	142
§ 4.2 相似矩阵与矩阵对角化条件 .....	142
一、相似矩阵的概念与性质 .....	143
二、矩阵可对角化的条件 .....	144
习题 4.2 .....	148
§ 4.3 实对称矩阵的对角化 .....	149
一、实对称矩阵特征值的性质 .....	149
二、实对称矩阵对角化方法 .....	150
习题 4.3 .....	153
总习题四 .....	154
<b>第五章 二次型</b> .....	157

§ 5.1 二次型及其矩阵表示 .....	157
一、二次型及其矩阵表示 .....	157
二、线性变换 .....	159
三、矩阵合同 .....	160
习题 5.1 .....	161
§ 5.2 二次型的标准形与规范形 .....	161
一、二次型的标准形与标准化方法 .....	161
二、二次型的规范形与惯性定理 .....	166
习题 5.2 .....	167
§ 5.3 正定二次型 .....	168
习题 5.3 .....	171
总习题五 .....	172
<b>第六章 线性代数应用与模型</b> .....	174
§ 6.1 应用实例 .....	174
一、生产总值问题 .....	174
二、营养食谱问题 .....	175
三、信息编码问题 .....	176
四、信息检索问题 .....	177
§ 6.2 网络流模型 .....	179
§ 6.3 递归关系模型 .....	181
一、污染水平与工业发展问题 .....	181
二、劳动力就业转移问题 .....	182
§ 6.4 种群增长模型 .....	184
一、动物繁殖模型 .....	184
二、莱斯利 (Leslie) 人口预测模型 .....	186
§ 6.5 投入产出模型 .....	187
一、投入产出表 .....	188
二、平衡方程组 .....	189
三、直接消耗系数 .....	189
四、完全消耗系数 .....	191
五、模型的应用 .....	192
总习题六 .....	194
<b>习题答案与提示</b> .....	197

# 第一章 矩 阵

矩阵是线性代数中的一个最重要的基本概念,线性代数的许多内容都可以借助矩阵进行讨论.作为一种重要的数学工具,矩阵在自然科学的各个领域以及经济分析、经济管理中都有着广泛的应用.本章主要介绍矩阵的概念、矩阵的运算、方阵的行列式、可逆矩阵、分块矩阵、矩阵的初等变换和矩阵的秩.

## § 1.1 矩阵的概念

### 一、矩阵的概念

在解决生活中的很多实际问题时都要处理一些数表,矩阵就是在处理这些数表时,抽象出来的一个数学概念.

**例 1** 某工厂生产 A、B、C 三种产品,它们的成本包括三类:原料费、工资、管理费和其他费用,生产单位产品的成本(单位:元)见表 1—1,该厂每季度每种产品的产量(单位:件)见表 1—2.

表 1—1 生产单位产品的成本

成 本	产 品		
	A	B	C
原料费	1	3	1.5
工资	3	4	2.5
管理费和其他费用	1	2	1.5

表 1—2 每季度每种产品的产量

产 品	季 度			
	夏季	秋季	冬季	春季
A	4 000	4 500	4 500	4 000
B	2 000	2 600	2 400	2 200
C	5 800	6 200	6 000	6 000

表 1—1 和表 1—2 中的数据可以简单地记为下面的形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ 3 & 4 & 2.5 \\ 1 & 2 & 1.5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4\,000 & 4\,500 & 4\,500 & 4\,000 \\ 2\,000 & 2\,600 & 2\,400 & 2\,200 \\ 5\,800 & 6\,200 & 6\,000 & 6\,000 \end{pmatrix}$$

这样的矩形数表分别称为 3 行 3 列矩阵和 3 行 4 列矩阵.

**例 2** 某航空公司在四个城市之间的单向航线如图 1—1 所示, 城市间的连线和箭头表示城市之间航线的线路和方向, 如果将此图对应一个 4 行 4 列的矩形表格, 记为  $A=(a_{ij})$ , 其中  $A$  的第  $i$  行第  $j$  列交叉点的数  $a_{ij}$  定义为

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有一条单向航线} \\ 0, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线} \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq 4$$

则图 1—1 可以简单地记为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

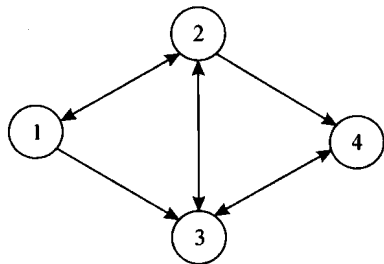


图 1—1

该矩形数表称为 4 行 4 列矩阵.

许多实际问题都可以用矩形数表表示, 去掉数表中数据的具体含义, 可以用如下矩阵的概念来表述.

**定义 1** 由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ) 排成的一个  $m$  行  $n$  列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个  $m$  行  $n$  列的矩阵, 简称  $m \times n$  矩阵. 横的每排称为矩阵的行, 纵的每排称为矩阵的列. 这  $m \times n$  个数称为矩阵的元素,  $a_{ij}$  为该矩阵的第  $i$  行第  $j$  列的元素.

通常用大写的黑斜体字母  $A, B, C, \dots$  表示矩阵. 有时为了指明矩阵的行数和列数, 也把  $m \times n$  矩阵  $A$  记为  $A_{m \times n}$ . 若  $m \times n$  矩阵  $A$  的第  $i$  行第  $j$  列的元素为  $a_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ), 则也可把  $m \times n$  矩阵  $A$  记为  $(a_{ij})_{m \times n}$  或  $(a_{ij})$ .

当  $m=n$ , 即矩阵  $A$  的行数等于列数时, 称  $A$  为  $n$  阶方阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中从左上角到右下角的对角线上的元素  $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$  称为主对角线元素.

当  $m=1$ , 即矩阵  $A$  为 1 行  $n$  列时, 矩阵

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

称为行矩阵, 即  $1 \times n$  矩阵.

当  $n=1$ , 即矩阵  $A$  为  $n$  行 1 列时, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

称为列矩阵, 即  $m \times 1$  矩阵.

当  $m=n=1$ , 即矩阵  $A$  为 1 行 1 列时, 把一阶方阵  $A = (a_{11})$  视同普通的数  $a_{11}$ .

当  $m \times n$  矩阵  $A$  中所有的元素均为零时, 矩阵  $A$  称为零矩阵, 记作  $O_{m \times n}$ , 在明确行、列的情况下, 可简记为  $O$ .

**定义 2** 如果两个  $m \times n$  矩阵  $A$ 、 $B$  的对应元素相等, 即满足

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$$

则称矩阵  $A$  与矩阵  $B$  相等, 记作  $A=B$  或  $(a_{ij})_{m \times n} = (b_{ij})_{m \times n}$ .

**例 3** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ b-2 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} c-1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ , 且  $A=B$ , 试求  $a, b, c$ .

**解** 由  $A=B$ , 有

$$1=c-1, 1-a=2, b-2=0$$

解得  $a=-1, b=2, c=2$ .

## 二、几种特殊的矩阵

### 1. 对角矩阵

如果一个  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  主对角线以外的元素都为零, 即  $a_{ij} = 0, i \neq j (i, j=1, 2, \cdots, n)$ , 则这个方阵  $A$  称为对角矩阵, 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

通常也把对角矩阵记为  $\mathbf{A} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$ .

## 2. 数量矩阵

如果一个  $n$  阶对角方阵  $\mathbf{A}$  中,  $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = a$ , 则称  $\mathbf{A}$  为数量矩阵, 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

特别地, 当  $a=1$  时, 该数量矩阵称为  $n$  阶单位矩阵, 记为  $E_n$  或  $E$ , 即

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

## 3. 三角矩阵

如果  $n$  阶方阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  中, 非零元素只出现在主对角线 (包括主对角线) 的右上方, 即满足  $a_{ij} = 0, i > j (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ , 则称矩阵  $\mathbf{A}$  为上三角矩阵, 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果  $n$  阶方阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  中, 非零元素只出现在主对角线 (包括主对角线) 的左下方, 即满足  $a_{ij} = 0, i < j (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ , 则称矩阵  $\mathbf{A}$  为下三角矩阵, 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

## 4. 对称矩阵

如果  $n$  阶方阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  中的元素满足  $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ , 则称矩阵  $\mathbf{A}$  为对称矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例如,  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  为二阶对称矩阵,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  为三阶对称矩阵.

### 5. 反对称矩阵

如果  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$  中的元素满足  $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ , 则称矩阵  $A$  为反对称矩阵. 对于反对称矩阵  $A$ , 有  $a_{ii} = -a_{ii}$ , 即  $a_{ii} = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 因此反对称矩阵的主对角线元素全为零, 即

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

例如,  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  为二阶反对称矩阵,  $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  为三阶反对称矩阵.

## 习题 1.1

1. 某工厂生产 A、B、C 三种产品, 它们的成本包括三类: 原料费、工资、管理费和其他费用, 生产单位产品的成本 (单位: 元) 见下表. 试将其用矩阵表示.

成 本	产 品		
	A	B	C
原料费	2	6	3
工资	6	8	5
管理费和其他费用	2	4	3

2. 某班 4 名学生甲、乙、丙、丁的 3 门课程 (数学、计算机、英语) 的期末考试成绩见下表. 试将其用矩阵表示.

学 生	课 程		
	数学	计算机	英语
甲	91	85	93
乙	78	81	72
丙	93	90	95
丁	65	76	78

3. 试确定  $a, b, c$  的值, 使得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ a+b & 3 & 5 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

## § 1.2 矩阵的运算

矩阵的作用不仅在于把一组数排成矩形数表, 而且还在于对矩阵定义了一些有理论意义和实际意义的运算, 从而使其成为理论研究和解决实际问题的重要工具. 本节介绍矩阵的基本运算.

### 一、矩阵的加法

**定义 1** 设两个  $m \times n$  矩阵  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ , 将矩阵  $A, B$  对应位置元素相加得到的  $m \times n$  矩阵  $(a_{ij} + b_{ij})$ , 称为矩阵  $A$  与矩阵  $B$  的和, 记作  $A + B$ , 即

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

需要注意的是, 两个矩阵只有当行数相同、列数也相同时才能相加.

设矩阵  $A, B, C, O$  均为  $m \times n$  矩阵, 由矩阵加法定义容易验证, 矩阵的加法满足下列运算规律:

- (1) 交换律:  $A + B = B + A$
- (2) 结合律:  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (3)  $A + O = O + A = A$
- (4) 设  $m \times n$  矩阵  $A = (a_{ij})$ , 称矩阵  $(-a_{ij})$  为矩阵  $A$  的负矩阵, 记为  $-A$ , 则

有

$$A + (-A) = O$$

由矩阵加法及负矩阵的定义, 可以定义矩阵的减法为

$$A - B = A + (-B)$$

即  $A - B = (a_{ij}) + (-b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$

**例 1** 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ , 求  $A + B$ ,  $A - B$ .



$$\begin{aligned} \text{解 } \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -1+4 & 2+3 & 3+2 \\ 0+5 & 3+(-3) & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -1-4 & 2-3 & 3-2 \\ 0-5 & 3-(-3) & -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 二、数与矩阵的乘法

**定义 2** 设  $m \times n$  矩阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ,  $k$  为任意数, 以数  $k$  乘矩阵  $\mathbf{A}$  中的每一个元素的运算称为数  $k$  与矩阵  $\mathbf{A}$  的乘法, 所得到的矩阵记为  $k\mathbf{A}$ , 即

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

设  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  都是  $m \times n$  矩阵,  $k$ 、 $h$  为任意实数, 由数与矩阵的乘法定义, 容易验证数与矩阵的乘法具有下列运算规律:

- (1)  $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
- (2)  $(k+h)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + h\mathbf{A}$
- (3)  $(kh)\mathbf{A} = k(h\mathbf{A})$
- (4)  $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$ ,  $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$
- (5) 若  $k \neq 0$ ,  $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ , 则  $k\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$

**例 2** 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ , 已知  $\mathbf{A} + 2\mathbf{X} = \mathbf{B}$ , 求  $\mathbf{X}$ .

**解** 在等式中移项得  $2\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ , 再除以 2 得  $\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{A})$ , 所以

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

## 三、矩阵的乘法

**例 3** 某企业有两个工厂 I、II, 生产甲、乙、丙三种类型的产品, 生产每种类型产品的数量如表 1—3 所示, 生产每种产品的单位价格 (单位: 元) 和单位利润 (单位: 元) 如表 1—4 所示. 试求各工厂的总收入和总利润.