高等学校经济管理学科数学基础系列教材

线性代数

◎ 张学奇　主编

中国人民大学出版社

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

线性代数

◎ 张学奇　主编

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/张学奇主编.
北京：中国人民大学出版社，2009
高等学校经济管理学科数学基础系列教材
ISBN 978-7-300-11594-8

Ⅰ. ①线…
Ⅱ. ①张…
Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 231063 号

高等学校经济管理学科数学基础系列教材
线性代数
张学奇　主编
Xianxing Daishu

出版发行	中国人民大学出版社				
社　址	北京中关村大街 31 号		**邮政编码**	100080	
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）		
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）		
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）		
网　址	http://www.crup.com.cn				
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)				
经　销	新华书店				
印　刷	三河汇鑫印务有限公司				
规　格	170 mm×228 mm　16 开本		**版　次**	2010 年 1 月第 1 版	
印　张	14 插页 1		**印　次**	2010 年 1 月第 1 次印刷	
字　数	255 000		**定　价**	19.00 元	

内容简介

本书是依据高等学校经济管理类本科数学基础课程的教学基本要求，在总结线性代数课程教学改革成果，吸收国内外同类教材的优点，结合我国高等教育发展趋势的基础上编写而成。

本书在为学生提供必要的基础知识和基本技能的同时，优化构建教学内容与课程体系，注重课程的思想性和结构特征，突出数学应用和建模能力的培养，力求实现理论教学与实际应用、知识传授与能力培养的统一。

全书内容包括矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性代数应用与模型。本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，注重应用，例题典型，习题丰富，内容组织上力求做到自然直观，通俗易懂，教与学结合，易教易学。本书还配有辅导用书《线性代数辅导教程》、《线性代数习题全解》、电子教案、线性代数网络课程等立体化教学资源。需要教学课件的老师，请发邮件到 math@crup. cn 索取。

本书适合于高等学校经济类和管理类各专业学生使用，也可供理工科学生和科技工作者阅读参考。

前　言

本书是依据高等学校经济类、管理类各专业对线性代数课程的教学要求，在总结线性代数课程教学改革成果，吸收国内外同类教材的优点，结合我国高等教育发展趋势的基础上编写的.

本书的编写以强化概念理解，突出思想方法，培养数学思维和应用能力为指导，力求实现理论教学与实际应用、知识传授与能力培养的统一. 本书注重突出以下特点：

优化构建教学内容与课程体系. 在概念的引入上，注意从具体实际问题入手，从具体到抽象，从特殊到一般，由浅到深，由易到难，突出概念的思想性，逐步深化对概念的理解. 在内容的组织上，注重思想方法和知识的内在特征的强化，理论与应用的结合，知识和能力的统一.

注重课程的思想性和结构特征. 对内容的处理在保证内容自身的系统性和科学性的基础上，更加突出内容主题、思想和结构. 例如，突出矩阵的初等变换和秩的作用，贯穿课程始终；强化矩阵的秩、向量组的相关性和线性方程组的解三者之间的联系，形成有机的整体；注重实对称矩阵对角化和二次型标准化思想方法的一致性等.

突出数学应用和建模能力的培养. 在加强概念与理论应用背景介绍的基础上，结合课程内容编写了"线性代数应用与模型"一章，通过有步骤、专题式的建模过程学习，逐步培养学生用数学的意识、获取新知识的能力和数学建模能力.

注重教材的实效性. 教材的编排在体现结构上的严谨、逻辑上的清晰、叙述上的通俗易懂的同时，合理地分散难点，恰当地处理内容，渗透教学思想，使得教师和学生都方便使用，有利于教学质量的提高.

全书内容包括矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值和特征向量、二次型、线性代数应用与模型. 本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，注重应用，可作为高等学校线性代数课程的教材.

在例题与习题的设计与编选上，注重体现例题典型，习题覆盖面宽、题型丰

富、难易适度的原则. 按节配有适量的基本练习题，按章配有适当的提高练习题，书末附有答案与提示，便于检查参考.

为了使学生更好地掌握线性代数的内容，提高学生分析问题和解决问题的能力，拓展学生的学习空间，我们还编写了与教材配套的辅导用书《线性代数辅导教程》和《线性代数习题全解》.《线性代数辅导教程》包括教学基本要求、内容概要、知识结构图、要点剖析、释疑解难、典型例题解析、单元自测题等内容，思路清晰，突出对教学内容的提炼、要点的剖析和解题方法的点拨，注重典型例题的分析和总结，对提高学生学习兴趣、培养分析和解决问题的能力具有积极的促进作用.《线性代数习题全解》对教材的全部习题都给出了完整、典型、详实的解答，对重点习题给出了分析和解题指导.

为适应教育信息化发展的需要，我们结合现代化教育手段编制了与教材配套的线性代数电子教案、线性代数网络课程等教学资源，为教师组织教学和学生自主学习创造了条件.

本书由张学奇教授主编，参加本书编写的还有贺家宁、李芳. 本书的编写参阅了国内外一些优秀教材，从中受到了有益的启发，吸取了先进的经验. 本书的出版受到了中国人民大学出版社编辑潘旭燕、刘冬的支持与帮助，在此一并表示感谢!

限于编者的水平，加之时间仓促，本书难免存在不足之处，殷切期望专家、同行和读者批评指正，以使本书不断完善和提高.

张学奇

2009 年 12 月

目　　录

第一章 矩 阵

矩阵是线性代数中的一个最重要的基本概念，线性代数的许多内容都可以借助矩阵进行讨论. 作为一种重要的数学工具，矩阵在自然科学的各个领域以及经济分析、经济管理中都有着广泛的应用. 本章主要介绍矩阵的概念、矩阵的运算、方阵的行列式、可逆矩阵、分块矩阵、矩阵的初等变换和矩阵的秩.

§1.1 矩阵的概念

一、矩阵的概念

在解决生活中的很多实际问题时都要处理一些数表，矩阵就是在处理这些数表时，抽象出来的一个数学概念.

例 1 某工厂生产 A、B、C 三种产品，它们的成本包括三类：原料费、工资、管理费和其他费用，生产单位产品的成本（单位：元）见表 1—1，该厂每季度每种产品的产量（单位：件）见表 1—2.

表 1—1 **生产单位产品的成本**

成 本	产 品		
	A	B	C
原料费	1	3	1.5
工资	3	4	2.5
管理费和其他费用	1	2	1.5

表 1—2 **每季度每种产品的产量**

产 品	季 度			
	夏季	秋季	冬季	春季
A	4 000	4 500	4 500	4 000
B	2 000	2 600	2 400	2 200
C	5 800	6 200	6 000	6 000

表 1—1 和表 1—2 中的数据可以简单地记为下面的形式：

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1.5\\3 & 4 & 2.5\\1 & 2 & 1.5\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}4\,000 & 4\,500 & 4\,500 & 4\,000\\2\,000 & 2\,600 & 2\,400 & 2\,200\\5\,800 & 6\,200 & 6\,000 & 6\,000\end{pmatrix}$$

这样的矩形数表分别称为 3 行 3 列矩阵和 3 行 4 列矩阵.

例 2 某航空公司在四个城市之间的单向航线如图 1—1 所示，城市间的连线和箭头表示城市之间航线的线路和方向，如果将此图对应一个 4 行 4 列的矩形表格，记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其中 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列交叉点的数 a_{ij} 定义为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 从\ i\ 市到\ j\ 市有一条单向航线\\0, & 从\ i\ 市到\ j\ 市没有单向航线\end{cases}\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant 4$$

则图 1—1 可以简单地记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

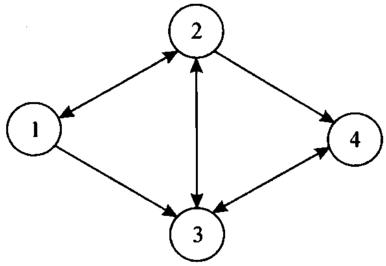

图 1—1

该矩形数表称为 4 行 4 列矩阵.

许多实际问题都可以用矩形数表表示，去掉数表中数据的具体含义，可以用如下矩阵的概念来表述.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$) 排成的一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列的**矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵. 横的每排称为**矩阵的行**，纵的每排称为**矩阵的列**. 这 $m\times n$ 个数称为矩阵的**元素**，a_{ij} 为该矩阵的第 i 行第 j 列的元素.

通常用大写的黑斜体字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, …表示矩阵. 有时为了指明矩阵的行数和列数，也把 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 若 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$)，则也可把 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记为 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij}).

当 $m=n$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数等于列数时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶方阵**，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中从左上角到右下角的对角线上的元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 称为主对角线元素.

当 $m=1$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 1 行 n 列时，矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

称为**行矩阵**，即 $1\times n$ 矩阵.

当 $n=1$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 行 1 列时，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**，即 $m\times 1$ 矩阵.

当 $m=n=1$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 1 行 1 列时，把一阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{11})$ 视同普通的数 a_{11}.

当 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有的元素均为零时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，在明确行、列的情况下，可简记为 $\boldsymbol{O}$.

定义 2　如果两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的对应元素相等，即满足

$$a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}=(b_{ij})_{m\times n}$.

例 3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ b-2 & -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} c-1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，试求 a，b，c.

解　由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，有

$$1=c-1,\ 1-a=2,\ b-2=0$$

解得 $a=-1$，$b=2$，$c=2$.

二、几种特殊的矩阵

1. 对角矩阵

如果一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 主对角线以外的元素都为零，即 $a_{ij}=0$，$i\neq j(i, j=1,2,\cdots,n)$，则这个方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**对角矩阵**，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

通常也把对角矩阵记为 $A=\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

2. 数量矩阵

如果一个 n 阶对角方阵 A 中，$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$，则称 A 为**数量矩阵**，即

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

特别地，当 $a=1$ 时，该数量矩阵称为 n 阶**单位矩阵**，记为 E_n 或 E，即

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. 三角矩阵

如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 中，非零元素只出现在主对角线（包括主对角线）的右上方，即满足 $a_{ij}=0$，$i>j(i, j=1, 2, \cdots, n)$，则称矩阵 A 为**上三角矩阵**，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 中，非零元素只出现在主对角线（包括主对角线）的左下方，即满足 $a_{ij}=0$，$i<j(i, j=1, 2, \cdots, n)$，则称矩阵 A 为**下三角矩阵**，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4. 对称矩阵

如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，则称矩阵 A 为**对称矩阵**，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例如，$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$为二阶对称矩阵，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$为三阶对称矩阵.

5. 反对称矩阵

如果 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，则称矩阵 A 为**反对称矩阵**. 对于反对称矩阵 A，有 $a_{ii}=-a_{ii}$，即 $a_{ii}=0\ (i=1, 2, \cdots, n)$，因此反对称矩阵的主对角线元素全为零，即

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

例如，$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$为二阶反对称矩阵，$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$为三阶反对称矩阵.

习题 1.1

1. 某工厂生产 A、B、C 三种产品，它们的成本包括三类：原料费、工资、管理费和其他费用，生产单位产品的成本（单位：元）见下表. 试将其用矩阵表示.

成 本	产 品		
	A	B	C
原料费	2	6	3
工资	6	8	5
管理费和其他费用	2	4	3

2. 某班 4 名学生甲、乙、丙、丁的 3 门课程（数学、计算机、英语）的期末考试成绩见下表. 试将其用矩阵表示.

学 生	课 程		
	数学	计算机	英语
甲	91	85	93
乙	78	81	72
丙	93	90	95
丁	65	76	78

3. 试确定 a，b，c 的值，使得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ a+b & 3 & 5 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

§1.2　矩阵的运算

矩阵的作用不仅在于把一组数排成矩形数表，而且还在于对矩阵定义了一些有理论意义和实际意义的运算，从而使其成为理论研究和解决实际问题的重要工具. 本节介绍矩阵的基本运算.

一、矩阵的加法

定义 1　设两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，将矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 对应位置元素相加得到的 $m\times n$ 矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

需要注意的是，两个矩阵只有当行数相同、列数也相同时才能相加.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{O}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，由矩阵加法定义容易验证，矩阵的加法满足下列运算规律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

(2) 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

(4) 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，称矩阵 $(-a_{ij})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记为 $-\boldsymbol{A}$，则有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$$

由矩阵加法及负矩阵的定义，可以定义矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

即　$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij})+(-b_{ij})=(a_{ij}-b_{ij})$

例 1　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

解 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1+4 & 2+3 & 3+2\\ 0+5 & 3+(-3) & -2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 5\\ 5 & 0 & -2\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1-4 & 2-3 & 3-2\\ 0-5 & 3-(-3) & -2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 1\\ -5 & 6 & -2\end{pmatrix}$

二、数与矩阵的乘法

定义 2 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，k 为任意数，以数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个元素的运算称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘法，所得到的矩阵记为 $k\boldsymbol{A}$，即

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，k、h 为任意实数，由数与矩阵的乘法定义，容易验证数与矩阵的乘法具有下列运算规律：

(1) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

(2) $(k+h)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{A}$

(3) $(kh)\boldsymbol{A}=k(h\boldsymbol{A})$

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

(5) 若 $k\neq0$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $k\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7 & 5 & -2 & 4\\ 5 & 1 & 9 & 7\\ 3 & 2 & -1 & 6\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 在等式中移项得 $2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$，再除以 2 得 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$，所以

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}7 & 5 & -2 & 4\\ 5 & 1 & 9 & 7\\ 3 & 2 & -1 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 1 & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -1\end{pmatrix}$$

三、矩阵的乘法

例 3 某企业有两个工厂Ⅰ、Ⅱ，生产甲、乙、丙三种类型的产品，生产每种类型产品的数量如表 1—3 所示，生产每种产品的单位价格（单位：元）和单位利润（单位：元）如表 1—4 所示. 试求各工厂的总收入和总利润.