主编：徐九南　万明

微积分

陕　西　出　版　集　团
陕西人民教育出版社

微 积 分

主编：徐九南 万明

陕 西 出 版 集 团
陕西人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/徐九南,万明主编.——西安:陕西人民教育出版社,2009.3

ISBN 978-7-5450-0275-1

Ⅰ.微… Ⅱ.①徐…②万… Ⅲ.微积分-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 143753 号

微 积 分

主 编	徐九南 万明
出版发行	陕西出版集团 陕西人民教育出版社(西安长安南路 181 号) 邮编:710061
印 刷	江西省人民政府印刷厂
开 本	787 毫米×1092 毫米 1/16
印 张	10
字 数	200 千
版 次	2009 年 3 月第 1 版 2009 年 3 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5450-0275-1
定 价	16.80 元

前　言

为了适应迅速发展的高等职业教育的需求,切实落实高等职业教育的培养目标,认真贯彻“理论够用,重在实践”的原则,根据高职、高专教育的特点,我们本着重能力、重应用、重素质、重创新的总体思路,编写了这本《微积分》教材。本教材适合于高职、高专等各专业学生使用,也适合于学生自学。

本教材在编写过程中,充分体现了高职、高专职业教育的特色,具体表现在:

1. 重视高等数学的实际应用。设计教材内容时,力求实现基础性、实用性、发展性。在不影响数学体系的前提下,加强数学知识的实践性,在教材中大量涉及实际问题。具体体现在:大量例题、习题涉及到包含工程数学、计算机数学和管理经济数学等不同领域。

2. 本教材考虑到高职、高专职业教育的特点,我们结合不同专业对数学基本理论知识的不同需求,对教材各章节的内容作出了相应的安排,配备的习题的难易度也有所区别。

3. 全书通俗易懂,深入浅出。根据数学的认知规律和教学规律,淡化深奥的数学理论,突出应用数学的思维方法,精简实用,条理清楚,便于自学。

本书讲述了函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分和常微分方程等内容,可作为高职、高专等各专业公共基础课的必修或选修教材。

本教材由徐九南、万明主编,罗成、邬叶琴、徐冲坤、殷小姣、陈文锋、丁娟等参与编写。本书在编写过程中,得到了编者所在院校领导的大力支持和协助,得到了陕西人民教育出版社的热情指导和关怀,在此一并致谢。

由于编者水平所限,加之数学改革中的一些问题还有待探索,不足之处,恳请批评指正。

编　者

2009 年 3 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

第二章　导数与微分

第三章　导数的应用

第一章　函数、极限与连续

微积分的核心和基础是极限,极限的思想自始至终贯穿于微积分之中.极限是建立在无限基础上的概念,它的研究对象是函数,它考虑的是一个动态过程.微积分就是以函数为研究对象,运用无穷小或无穷大等极限过程分析处理问题的一门学问.本章主要介绍函数、极限和函数连续性等基本概念以及它们的一些性质.

本章主要内容:

- 函数的概念
- 函数的极限
- 无穷小与无穷大
- 两个重要极限
- 函数的连续

学习要求:

掌握:

- 函数的概念
- 掌握函数的各种形态

了解:

- 函数的经济应用

本章重点:

- 函数的极限
- 极限的运算
- 函数的连续

本章难点:

- 函数连续
- 两个重要极限
- 极限的运算

第一节　函数的概念

一、几个基本概念

(一)变量与区间

在现实生活中,我们常常会遇到各种各样的量,如长度、温度、速度、体积、价格等.在某个过程中,数值不变的量称为常量,数值变化的量我们称之为变量.例如,用一根长度为 l 的

铁丝围成一个矩形的框架，用 x 表示矩形的长，则矩形的宽 $y=\frac{l}{2}-x$，矩形的面积 $S=x(\frac{l}{2}-x)$. 在这个问题中，l 是常量，x,y,S 都是变量. 变量在某一特定的过程中总是在一定的范围内取值，这个取值范围可以用区间来表示.

下面向读者介绍高等数学中常用的数集及其简明表示符号：

开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间：$[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$；

左半开区间（或右半闭区间）$(a,b]=\{x|a<x\le b\}$；

右半开区间（或左半闭区间）$[a,b)=\{x|a\le x<b\}$.

上述四个区间的长度都是有限长的，因此把它们统称为有限区间.

无穷区间有：

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$；$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$；$[a,+\infty)=\{x|x\ge a\}$；

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$；$(-\infty,b]=\{x|x\le b\}$.

如无特别声明，可用如下符号表示一些常用数集：

R——实数集；**Q**——有理数集；**Z**——整数集；**N**——自然数集.

有时为了讨论数轴上某点附近的性质，引入邻域的概念.

定义 1　设 α 是一个实数，δ 是正数（通常是指很小的数），数轴上到点 α 的距离小于 δ 的点的全体，称为点 α 的 δ 邻域，记为 $U(\alpha,\delta)$. 即：

$U(\alpha,\delta)=(\alpha-\delta,\alpha+\delta)=\{x||x-\alpha|<\delta\}$

数集 $\{x|0<|x-\alpha|<\delta\}$，称为 α 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(\alpha,\delta)$.

二、函数的概念

定义 2　设 x,y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 上的非空数集，对任意的 $x\in D$，通过某一个确定对应法则（或对应关系）f，在实数集 $\mathbf{R}$ 上有唯一的一个 y 与之对应，则称 y 是定义在 D 上的 x 的函数，记为：

$$y=f(x),x\in D$$

通常把 x 称为自变量，y 称为因变量（或 x 的函数），x 的取值范围称为函数的定义域（就是本定义中的 D）. 一般情况下，用 D_f 或 D 表示函数的定义域. 当取 $x=x_0$ 时，按照对应法则 f 有 $y_0=f(x_0)$ 与之相对应，并称其为函数在点 x_0 处的函数值；当 x 在区域 D 上取遍时，所对应的函数值的全体称为函数的值域，记为 R_f. 即：

$$R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

对于函数概念，以下几点是值得注意的：

1. 以上函数定义基本上是按照初等数学中所描述的方式给出的，它指的是单值函数；

2. 函数的实质是对应法则，只要两个变量之间能找到一种对应，我们就说它们之间确定了一个函数；

3. 确定函数有两个要素，这就是：定义域与对应法则. 只有当两个函数的对应法则和定义域都相同时，才称这两个函数是相同的. 例如函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$与$f(x)=x+1$是不同的，因为它们的定义域不同；而函数$f(x)=\sin^2x+\cos^2x$与$g(t)=1$是相同的，因为它们的定义域和对应法则完全相同.

4. 函数之间可以定义加、减、乘、除等运算，但是运算必须在所有函数都有意义的公共范围内进行.

有关函数的相等、函数的定义域、值域等概念和函数的四则运算在中学数学课本中已有介绍，这里就不再复述了.

下面我们来看几个具体的例子：

例 1. 由关系式$x^2+y^2=1$能确定两个变量x与y之间的一种对应关系，可以说是一个函数关系，但它不是我们所指的函数. 比如$x=0$时，相应的y可以等于 1，也可以等于 −1. 其实它们是$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=-\sqrt{1-x^2}$这样两段函数，这类函数我们称为多值函数.

例 2. 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域为 **R**，值域为$[0,+\infty)$，它称为绝对值函数，其图像如图 1－1. 通常这类函数称为分段函数.

所谓分段函数是指：函数在定义域的不同范围内的函数表达式不同，它实质上是一个函数，不能理解为两个或多个函数.

例 3.

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，这也是分段函数，记为 sgn x，它的定义域为$D=(-\infty,+\infty)$，值域为$W=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1－2 所示. 对任何实数x都有关系式$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$成立，所以它起着一个符号的作用.

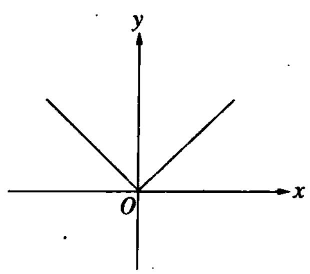

图 1－1

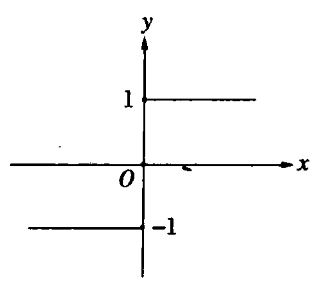

图 1－2

例 4. 狄利克雷函数(*Dirichlet*)

$$y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时}\\ 0, & x\text{ 为无理数时}\end{cases}$$

它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$,值域是 $W=\{0,1\}$. 该函数的图像无法画出.

三、函数的初等性质

微积分学的主要研究对象是函数,既然要对函数进行研究,自然要对函数有哪些基本几何性质有一定的了解,下面我们将逐一进行介绍.

定义 3(函数的单调性) 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对任意的 $x,y\in I$,当 $x<y$ 时,有 $f(x)\le f(y)$(或 $f(x)\ge f(y)$),则称 $f(x)$ 在区间 I 上为单调增加函数(或单调减少函数);

若对任意的 $x,y\in I$,当 $x<y$ 时,有 $f(x)<f(y)$(或 $f(x)>f(y)$),则称 $f(x)$ 在区间 I 上为严格单调增加函数(或严格单调减少函数).

单调增加函数(或单调减少函数)、严格单调增加函数(或严格单调减少函数)统称为单调函数(也称函数具有单调性).

在几何上,单调增加(减少)函数的图形是沿 x 轴的正向渐升的(或渐降的).(如图 1-3 和图 1-4 所示).

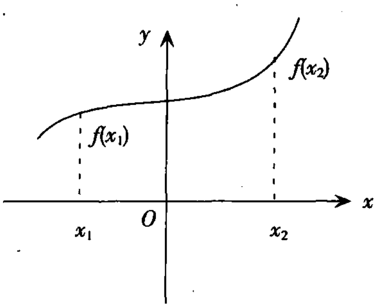

图 1-3

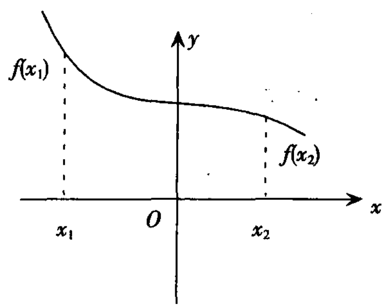

图 1-4

例 5. 函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上严格单调递减,而在区间 $[0,\infty)$ 上却严格单调递增,这在考虑函数的单调性时,是要特别注意的问题. 函数的单调性是函数在一个有定义区间内的特征性质,在不同的区间上可能有不同的单调性. 即使在各个不同的区间内单调性相同,但在整个定义域内仍有可能不单调.

比如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,函数图形如图 1-5所示,它不是单调函数,但它在 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$ 上分别单调递减.

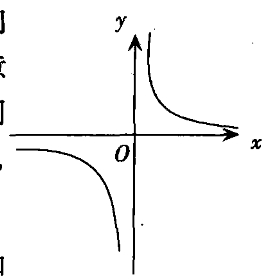

图 1-5

定义 4(函数的有界性) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若存在一个常数 $M>0$,使得对任意 $x\in I$,恒有 $|f(x)|\le M$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界,否则称为无界.

如果存在常数 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，恒有 $f(x)\le M$（或者 $f(x)\ge M$），那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有**上界**（或**下界**）. 其几何特征如图 1－6.

显然，$f(x)$ 在区间 I 上有界等价于它在区间 I 上既有上界又有下界.

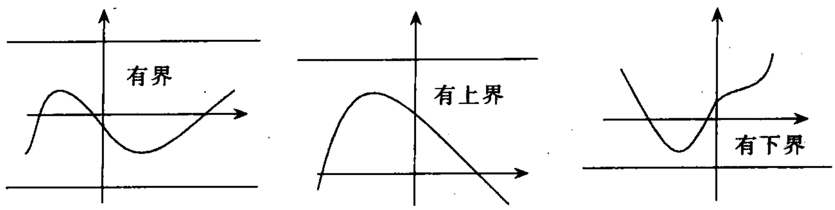

图 1－6

例如，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是有界函数. 因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $|\sin x|\le 1$，$|\cos x|\le 1$，因此它们在整个数轴上有界.

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无上界，但有下界（0 为一个下界）；而在 $(-\infty,0)$ 内无下界，但有上界（0 为一个上界）. 它在定义域内是无界的. 但是它在任何不包含原点的闭区间上是有界的.

定义 5（函数的奇偶性） (1) 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

(2) 若对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

从几何特征来说，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

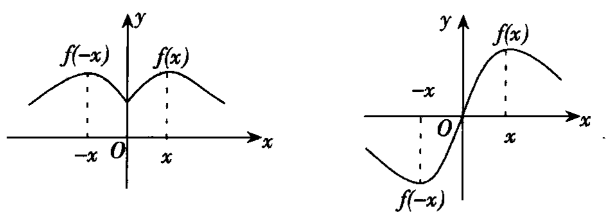

图 1－7

例如，$y=x^2$，$y=x^4$，$y=\cos x$ 是偶函数；而 $y=x^3$，$y=\sin x$ 是奇函数.

对于定义域相同的函数来说，有如下结论：

偶（奇）函数的和仍为偶（奇）函数；

两个偶（奇）函数的积为偶函数；

一偶一奇两个函数的积为奇函数.

但是，不是任何函数都有奇偶性的，如 $y=x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

四、初等函数

1. 基本初等函数

所谓基本初等函数就是指如下函数：

常量函数：$y=c$（c 是常数）；

幂函数：$y=x^a(a\neq0)$；

指数函数：$y=a^x(0<a\neq1)$；

对数函数：$y=\log_a x(0<a\neq1)$；

三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$.

上述函数的基本性质和几何特征中学数学已有比较透彻的讨论，这里不再一一复述.

2. 复合函数

在日常生活或生产实践中，表现事物之间的关系往往是错综复杂的，因此在数学中表示自然规律、生产规律的函数结构也是复杂的. 通常情况下，我们遇到的函数往往不是基本初等函数，而是由这些基本初等函数所构造的较为复杂的函数，也就是说需要把两个或两个以上的函数组合成另一个新的函数.

如设 $y=\sqrt{u}, u=1+x^2$，以 $1+x^2$ 代替第一式中的 u 得 $y=\sqrt{1+x^2}$，我们说，函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1+x^2$ 复合而成的复合函数.

对于这种函数，我们给出下面的定义：

定义 6 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，通过 u 将 y 表示成 x 的函数，即 $y=f[\varphi(x)]$，那么 y 就叫做 x 的复合函数，其中 u 叫做中间变量.

按定义的要求可知，构建复合函数的前提条件就是：**内层函数的值域与外层函数的定义域的交不空**. 也就是说，内层函数必须有函数值落在外层函数的定义域内，否则就会成为无意义的函数.

比如：$y=\sqrt{u}, u=\sin x-2$，复合起来 $y=\sqrt{\sin x-2}$ 在实函数范围内就无意义了.

例 6. 设 $f(x)=\dfrac{2}{2-x}$，求 $f[f(x)]$.

解 $f[f(x)]=\dfrac{2}{2-f(x)}=\dfrac{2}{2-\dfrac{2}{2-x}}=\dfrac{2-x}{1-x}$，

它的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

例 7. $y=\sqrt{2+\sin(1+\ln x)}$ 是由以下简单函数 $y=\sqrt{u}, u=2+\sin v, v=1+\ln x$ 复合而成的.

例 8. 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=(1+x)^{20}$；

(2) $y=\tan^2 x^2$；

(3) $y=\ln(\sin e^{x+1})$；

(4) $y=(\arccos\sqrt{1-x^2})^3$.

解 (1) 设 $y=u^{20}, u=1+x$，

那么 $y=(1+x)^{20}$ 是由以上两个函数复合而成.

(2)设 $y=u^2, u=\tan v, v=x^2$,

那么 $y=\tan^2 x^2$ 是由以上三个函数复合而成.

(3)设 $y=\ln u, u=\sin v, v=e^w, w=x+1$,

那么 $y=\ln(\sin e^{x+1})$ 是由以上四个函数复合而成.

(4)设 $y=u^3, u=\arccos v, v=\sqrt{w}, w=1-x^2$,

那么 $y=(\arccos\sqrt{1-x^2})^3$ 是由以上四个函数复合而成.

有时在实际应用中既要会由简单函数构造成复合函数,同时也要会将复合函数分解为简单函数.

3. 反函数

函数反映的是因变量随着自变量的变化而变化的规律,用另一种语言来说的话,就是:**有两个变量,一个是主动变量(自变量 x),另一个是被动变量(因变量 y),主动变量一旦取定了,被动变量也相继唯一确定.** 但是变量之间的制约是相互的,在我们研究的不同领域里,经常需要更换这两个变量的主次关系,当这种主次关系对换后,仍然成为函数关系,这就是我们所要介绍的反函数.

定义 7　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D,值域是 W,若对于 W 中任一值 $y=y_0$,必定在 D 中有唯一的 x_0,使得 $f(x_0)=y_0$. 这就定义了 W 上的一个函数,此函数称为 $y=f(x)$ 的反函数. 记为 $x=f^{-1}(y), y\in W$. 这时 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由反函数的定义不难发现,$y=f(x)$ 存在反函数当且仅当 f 是 D 到 W 的一一对应关系,并且反函数的定义域是直接函数的值域,反函数的值域是直接函数的定义域.

在数学上,我们总习惯用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,为了满足习惯记法的需要,最后我们会把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $y=f^{-1}(x)$.

既然这样,在几何上,直接函数与其反函数有何关系呢?其实它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

通常把反函数记为 $y=f^{-1}(x)$,$f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 称为互为反函数. 它们在同一直角坐标系下是关于直线 $y=x$ 对称的.

例如:

$y=f(x)=x^2, x\in[0,+\infty)$

$y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$(如图 1-8)

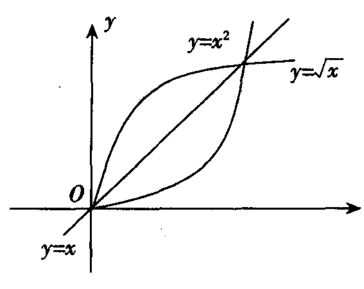

图 1-8

4. 初等函数

前面已经说过,在实际问题中我们遇到的不仅是基本初等函数,而且往往是较为复杂的函数,也就是指初等函数.

定义 8　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的,并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

如: $y=\sqrt[3]{x^2-1}+\log_{10}(1+x)-\sin(\ln(x^3-2))$

在高等数学中讨论的函数主要是初等函数.

五、经济函数

在经济领域中常见的几个经济函数：

1. 需求函数、价格函数

在经济学中，购买者（消费者）对某种商品的需求这一概念的意义是，购买者既有购买商品的愿望，又有购买的能力，也就是说，只有购买者同时具备了购买商品的欲望和支付能力两个条件，才称得上需求. 影响需求的因素有很多，如人口、收入、财产、价格、其他相关商品的价格以及消费者的偏好等. 在所考虑的时间范围内，如果把除该商品价格以外的上述因素都看作是不变的因素，则可把该商品价格 p 看作是自变量，需求量 Q 看作是因变量，即需求量 Q 可视为该商品价格 p 的函数，称为需求函数，记作：$Q=Q(p)$.

一般来说，需求函数是减函数，最常见的需求函数有以下三种：

(1)线性需求函数：$Q=b-ap,a>0,b>0$;

(2)幂需求函数：$Q=\dfrac{K}{p^{2}},K>0,a>0,p\neq 0$;

(3)指数需求函数：$Q=ae^{-bp},a>0,b>0$.

同样，也可把价格 p 表示成需求量 Q 的函数：

$$p=p(Q)$$

它是需求函数的反函数，也叫作价格函数.

2. 总成本函数

产品的成本是衡量一个企业管理水平高低的重要指标，根据会计学中的成本核算知识，产品的总成本是指生产一定数量的产品所需要的成本总数，它由固定成本与变动成本构成. 固定成本不受产量多少的影响，它是与产量无关的常数，而变动成本是随着产量的变化而变化的.

一般总成本函数 C 表示如下：

$$C=C(Q)=C_0+C_1(Q)$$

其中：Q 表示产量，C_0 为固定成本，C_1 为变动成本.

3. 平均成本函数

平均成本是指平均每个单位产品的成本，它也是产量 Q 的函数，一般用 $\dfrac{C(Q)}{Q}$ 来表示平均成本函数.

4. 收益函数

收益是指厂商出售商品的总收入，它与商品的价格 p 和销售量 Q 有关，一般总收益函数 R 可表示为：

$$R=R(Q)=pQ$$

注意：(1)由于商品在销售过程中，价格一般都是波动的，因此上式中的价格 p 一般指平均价格；

(2)总收益 R 应是关于销售量 Q 的函数;

(3)在实际中,产量、销量、需求量一般是不相等的.但是,在数学里,为研究问题方便,我们假设:

产量 = 销量 = 需求量

5. 利润函数

在总收益中减去总成本得到的就是利润 L,表示为:

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q)$$

注意:利润 $L(Q)$ 也是关于产量 Q 的函数.

例 9. 设某工厂的总成本中,固定成本为 20000 元,单位产品的变动成本为 3000 元,单价为 5000 元,求产量 Q 对总成本 C、平均成本、收益 R 及利润 L 的影响.

解:由前面的关系式可知:

总成本函数为:$C = 20000 + 3000Q$,

平均成本函数为:$\dfrac{C}{Q} = \dfrac{20000 + 3000Q}{Q} = 3000 + \dfrac{20000}{Q}$,

总收入函数为:$R = 5000Q$,

总利润函数为:$L = R - C = 2000Q - 20000$.

使 $L = 0$,即 $R = C$ 的产量 Q 的取值 Q_0 叫损益分歧点,当 $Q > Q_0$ 时,$L > 0$,这时赢利;当 $Q < Q_0$ 时,$L < 0$,这时亏损.

习题 1-1

1. 设 $f(x) = 5$,则 $f(x^2) = ($　　$)$

   (A)25　　(B)$\sqrt{5}$　　(C)5　　(D)不能确定

2. 说出下列函数的定义域:$y = \dfrac{8}{3x+5}$;$y = x^2 - 4x + 3$;$y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

3. 下列各题中,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?为什么?

   (1)$f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$　　(2)$f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$

   (3)$f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x-1}$　　(4)$f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$

4. 已知 $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$,求 $f(\sqrt{2})$,$f[f(3)]$,$f[f(x)]$.

5. 已知 $f(x) = \begin{cases} 0 (x<0) \\ \pi (x=0) \\ x+1 (x>0) \end{cases}$,求 $f(1)$,$f(-1)$,$f(0)$,$f\{f[f(-1)]\}$ 的值.

6. 江西移动公司开展了两种通讯业务:"全球通",月租 50 元,每通话 1 分钟,付费 0.4 元;"神州行"不缴月租,每通话 1 分钟,付费 0.6 元. 若一个月内通话 x 分钟,两种通讯方式的费用分别为 y_1, y_2(元).