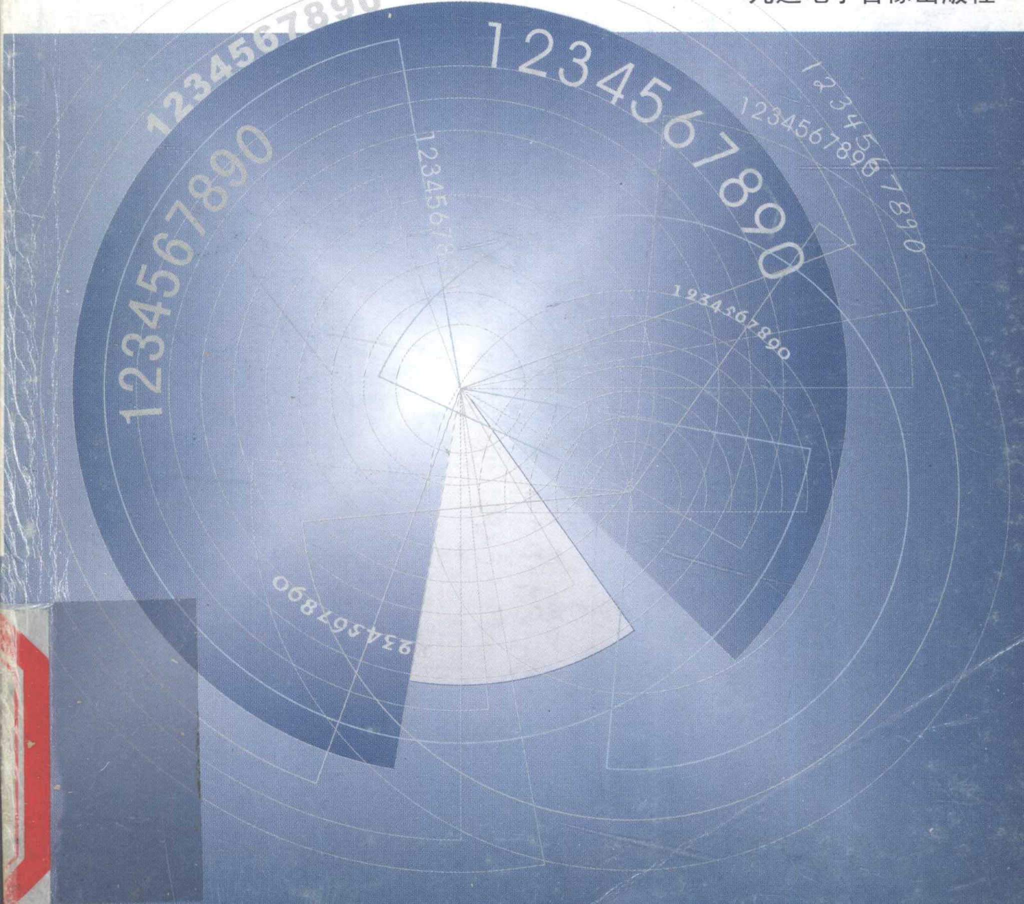
◉ 编著：刘岚　胡钋

非线性系统沃尔特拉理论及其应用

FEIXIANXINGXITONG
WOERTELA
LILUNJIQIYINGYONG

九通电子音像出版社



非线性系统的沃尔特拉理论及其应用

刘岚　胡钋　编著

非线性系统沃尔特拉理论及其应用
刘岚　胡钋　编著
九通电子音像出版社　出版发行
（武汉市武昌雄楚大街268号湖北出版文化城C座12楼　430070）
华中理工大学印刷厂　印装
字数：158 000　　开本：850毫米×1168毫米　1/32
印数：1-1 000
2005年8月第一版　　2005年8月第一次印刷
责任编辑：余辉燕　　编　审：冬　子
封面设计：赵增耀　　出 品 人：袁定坤
ISBN 7-900383-13-1/G
定价：48.00元
如发现印装质量问题，请于印刷厂调换。

此书献给我们尊敬的导师张金如教授，

张先生当年的言传身教使我们受益终身。

序　言

非线性问题的研究历来是科学界所关注的热点，而沃尔特拉（Volterra）理论则是解决众多非线性问题的一个行之有效的工具，其应用范围极其广泛，诸如在电工、电子、电力、通信、控制工程、生物学、医学以及生物物理等领域。

本书首先介绍沃尔特拉理论的基本内容，然后着重介绍国内外、包括著者在这方面所做的富有理论和实际意义的一些研究成果。全书分为七章，分别介绍沃尔特拉理论基础，以及非线性系统的沃尔特拉核的计算、测量、估计、辨识方法及其应用。

武汉理工大学刘泉教授、湖北工业大学王粟副教授等学者曾经在沃尔特拉理论方面所进行的卓有成效的研究，对于本书的撰写颇有帮助。武汉大学杭小庆副教授对本书的成稿给予了大力的支持，在此一并表示诚挚的感谢。

由于著者的水平有限，恳请广大读者对书中的不足之处给予批评指正。

著者　　2005 年 6 月

目　录

第一章　绪　论

非线性系统理论历来都受到各门类学科的重视，对于从事通信技术、自动控制、电子技术以及电力系统等专业的科研人员和工程技术人员来说，它更是一种重要的理论基础。特别是随着微电子与集成电路技术的高速发展，许多高度非线性的新型器件不断出现，使得非线性系统理论越来越显示出其重要性。

本书将围绕着一种描述非线性动态系统的数学模型来展开讨论，这个数学模型被称之为沃尔特拉（Volterra）级数。可以证明，任意一个动态非线性系统都有其确定的、唯一的沃尔特拉级数表示。

所谓模型，通常有两种含义，即系统模型和数学模型。前者是用一些标准的理想单元以一定的关系联接后所构成的模型来模拟实际系统，后者则是用一些数学关系式作为模型来模拟实际系统。这两种模型之间相辅相承，具有一定的内在联系。从另外一个角度来看，数学模型又可以简单地分为隐式模型和显式模型。

隐式模型是指那些系统输入与系统响应之间是用隐式运算来描述的模型。若用一组线性微分方程和一组线性代数方程来描述系统输入与系统响应之间的关系时，就属于一种隐式模型，例如下列方程：

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu(t) \\ y = Cx + Du(t)\end{cases}$$

式中 x 为状态向量，$u(t)$ 为系统输入向量，$y(t)$ 为系统响应向

量。同样，若用一组非线性微分方程和一组非线性代数方程来描述系统输入与系统响应之间的关系时，也属于一种隐式模型，例如下列方程：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u(t)) \\ y = g(x,u(t)) \end{cases}$$

隐式模型法又称为状态变量法，因为在用这种方法求解给定输入激励下的输出响应时，需先求解状态变量。

显式模型是指那些系统输入与系统响应之间是用显含运算来描述的模型，所谓显含运算是指可直接描述输出响应与输入激励间的关系。例如下列卷积积分：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

当系统输入与系统响应之间的关系用卷积分的形式进行描述时，就属于一种显式模型。显式模型又称为输入—输出法，输入—输出法特别适宜用傅里叶变换和拉普拉斯变换进行运算，并且特别适宜于变量为周期性正弦变化的复杂动态系统的性能分析。

显然，这两类模型从构成到运算都具有它各自不同的特点，所以，在对系统进行描述时到底采用哪一类模型最为适宜，就必须根据系统的具体情况和系统的运算规律来进行确定。例如，在对系统的振荡特性进行研究时通常适宜于采用隐式模型进行分析，而对系统在随机信号输入下的响应谱进行分析时，采用显式模型进行分析则较为适宜。本书叙述的非线性系统的沃尔特拉模型属于显式模型。

沃尔特拉级数理论本身属于数学范畴，其核心是一个以多

重卷积积分形式表示的泛函级数，称之为沃尔特拉级数，它是由意大利数学家 Vito Volterra（1860-1940）于十九世纪八十年代作为多变量函数的泰勒(Taylor)级数的推广而提出的[1-1]。1912 年，Volterra 将这种泛函级数用于研究某些积分方程以及积分～微分方程，直到现在，各种形式的沃尔特拉积分方程、沃尔特拉积分微分方程仍是数学界研究的重要课题，每年都有许多文献公开发表。值得指出的是，沃尔特拉级数更为严格的数学基础是由法国数学家 Frechet 在 1910 年为之奠定的[1-2]，他所得出的结果是 Weierstrass 定理（任何一个连续函数都可以用一个均匀收敛于每一个紧致点集的多项式来表示）的推广。Frechet 指出，任何一个连续泛函都可以用一个均匀收敛于所有连续函数之紧致集的整数阶泛函级数来表示。这里所说的整数阶泛函级数中的每一项均对应着沃尔特拉泛函级数中的一项，如果采用算子形式表示，就是

$$y(t)=H[x(t)]=H_1[x(t)]+H_2[x(t)]+\cdots+H_n[x(t)]+\cdots$$

Frechet 所做的工作具有十分重要的意义，因为根据 Weierstrass 定理，函数集合 $\left\{f_n(x)=x^n\right\}$ 是完备的。类似地可以得出 Frechet 定理：沃尔特拉泛函集合 $\left\{H_n[x(t)]\right\}$ 也是完备的。

第一个将沃尔特拉级数应用于非线性系统分析和研究的是控制论的创始人维纳（Norbert Wiener）。1942 年，他采用沃尔特拉级数分析了一个带有非线性电阻的串联 RLC 电路对于高斯白噪声激励的响应，获得了可喜的成果，从而作出了开创性的工作[1-3]。维纳的研究表明，对于非线性不很严重的系统，

只要取沃尔特拉级数的前几项就足以表示该系统的输出与输入的关系。二十世纪五十年代后期，人们一直继续在为沃尔特拉级数应用于非线性系统作出努力，第一个在这方面进行全面系统研究的是 Barrett，1957 年，他应用沃尔特拉级数理论分析了非线性微分方程和非线性反馈系统[1-4]。George 扩展了 Barrett 的工作，1959 年，George 提出了一种系统代数，并使用一种重要的数学工具～多维 Laplace 变换，来研究沃尔特拉算子及其在非线性反馈系统分析中的应用[1-5]。1958 年，Brilliant 研究了非线性串联系统的沃尔特拉级数表示，以及沃尔特拉级数的收敛性问题[1-6]。以算子观点出发来研究沃尔特拉级数的是 Zames，1959 年，他运用压缩映象原理获得了一些非线性反馈系统的各种算子展开式及其稳定性的有关分析结论[1-7]。在这一领域开展工作的还有 I. W. Sandberg[1-8,9]和 Schetzen 以及 Chu. L. O 等人。1963 年，Schetzen 研究了能够用有限个沃尔特拉算子表征的系统，1965 年，他又提出了测量沃尔特拉核的方法[1-10]。Chu. L. O 等人在 1983 年提出了对多频测量方法的一种改进[1-11]。1964 年至 1965 年，Alper 和 Bush 分别对离散系统的沃尔特拉级数进行了研究，从而开辟了沃尔特拉级数应用的新领域[1-12]。Schetzen 在 1976 年提出了 p 阶逆理论[1-13]，应用该理论可对某些特定的非线性系统进行线性化处理，而应用沃尔特拉级数进行非线性系统的频域分析的理论则是由 Chu. L. O 等人在 1979 年提出来的[1-14,15]。

沃尔特拉级数用于研究具有实际意义的非线性电路问题是在 1967 年由 S. Narayanan 进行的，他分析了使用结型晶体管的非线性 T-模型的晶体管放大器的失真情况[1-16]。1969 年，Narayanan 又分析了串联晶体管放大器及反馈放大器的失真问题[1-17,18]。1972 年，Poon 采用沃尔特拉级数对电流控制晶体管

模型及其在三阶放大器中的失真问题进行了研究[1-19]。同年Kuo和Witkowski提出了一个用沃尔特拉级数计算放大电路失真问题的计算机程序，该程序可以计算到三阶电路[1-20]，Meyer等人分析了高频下的交叉调制和内调制问题[1-21]。1974年，A.M.KHADR分析了高频场效应管放大器的失真。1982年，A.Borys进行了运放的非线性失真分析[1-22]。以后又有大量沃尔特拉级数用于通讯网络，电路分析的文献发表。由于对实际电路问题的分析和研究具有重要意义，所以过去和现在采用沃尔特拉级数来进行实用性方面研究的工作一直在积极开展[1-23,24]，探讨的内容甚为广泛，文献也为数不少。

长期以来，非线性微分方程的求解一直是人们研究的重要内容。非线性微分方程～状态方程的解法一般说来有下面几种：（1）数值分析法，它借助于计算机进行，常用的是Runge-kutta算法；（2）几何方法，有相平面法和相空间法，虽然可以处理高阶问题但多以二阶为主；（3）分段线性化法；（4）模拟法，借助于模拟计算机进行；（5）解析法，常用的是一些近似解析法，如平均法、等值线性化法、谐波平衡法、摄动法、描述函数法、嘎勒金（Galerkin）法等；（6）沃尔特拉级数法。

沃尔特拉级数法是求解非线性微分方程的一种重要方法，最早用它来分析非线性微分方程的主要有Wiener、Barrett和George，此外还有Parente.、Flake.、Waddington和Fallside等，他们的工作大大促进了这一课题的研究。采用沃尔特拉级数求解非线性微分方程的主要方法有：（1）解析函数理论法，它是用解析函数理论的观点来研究非线性微分方程解的沃尔特拉级数展开式；（2）多项式级数求逆法，由于微分方

程的求解可以看作是算子形式方程 $H[y(t)] = x(t)$ 的求逆，而沃尔特拉级数又正是一个 H 的多项式形式，所以微分方程的求解可以由多项式级数的算子求逆来进行；（3）分离法；等等。

在系统分析、设计和控制等诸多问题中，往往需要确定对象系统准确的数学模型，即进行所谓“黑箱造型”，沃尔特拉级数理论特别适合于解决这一问题。由于一大类非线性系统都有其固有的沃尔特拉核，而沃尔特拉核又完全确定地表征了非线性系统，因此，“黑箱造型”问题就归结为“黑箱系统”的沃尔特拉核的辨识、估计与测量。沃尔特拉级数理论在辨识、估计与测量这三方面问题的研究具有极其丰富的内容，不仅对于物理系统，在生物系统及神经系统等的“建模”中都具有重要的实际意义。

有关沃尔特拉核测量与估计的研究直到目前为止进行得仍很不够，尤其是沃尔特拉核的测量，对于电子工业的发展具有积极意义，有关学者建议投入更多的力量从事这一课题的研究。相比之下，在沃尔特拉核的辨识方面所开展的工作以及发表文献的内容和数量都要多一些，尽管如此，却仍还有许多问题需要解决。

由于解析方法具有众所周知的优点，所以用解析方法来确定非线性微分方程～状态方程的沃尔特拉核是沃尔特拉级数理论研究中的又一重要内容。目前主要有：（1）多维 Laplace、Fourier 变换法;（2)指数输入法;（3)迭代计算法;（4)Carleman 线性化法；（5）变量方程法；等等。

沃尔特拉级数理论具有为数众多的研究分支，它可以应用到科学和工程中的很多领域，如通信、生物学、神经生理学等。沃尔特拉级数的研究拥有多种方法，目前大致可以分为四种：

（1）多维 Laplace-Fourier 变换方法；（2）微分几何方法；（3）泛函分析方法；（4）代数方法。作为一个新兴的研究领域，沃尔特拉级数理论还有相当多的课题有待研究和解决，诸如非线性电路和系统的暂态响应，多个非线性元件振荡电路的分析，输入不为正弦波时系统的响应，多输入系统的辨识，等等。

二十世纪八十年代，国内一些学者也开始了对沃尔特拉级数理论的研究，虽然国内学术界对沃尔特拉级数理论在非线性系统分析中的应用开始重视起来，相继发表了一些有关论文，但为数仍是不多，研究的内容也很有限[1-25~35]。

多年来，对于沃尔特拉级数的研究主要停留于理论上的探讨，直到最近这些年，由于计算机技术和数字电路的飞速发展，沃尔特拉级数理论的实际应用价值才开始显示出来。比如，沃尔特拉滤波及其在信号处理方面的应用是在 90 年代才引起人们注意的[1-36~40]。

最后应该指出，继沃尔特拉级数理论之后发展起来的维纳（Wiener）理论也是一个深受重视的研究领域，特别是在研究随机情况，非线性系统辩识，生物系统，神经系统辩识等方面，Wiener 理论起着重要的作用。

第二章 沃尔特拉级数理论基础

§2.1 系统的描述

2.1.1 系统的定义与分类

能够完成某种数学运算功能的集合体称为系统。通过数学运算，系统将输入激励信号映射成为系统响应。如图 2-1 所示，其中的符号 $H[\bullet]$ 称为算子，它表示将输入信号 $x(t)$ 进行某种运算后即得输出信号 $y(t)$。

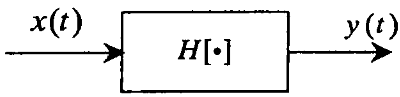


图 2-1

根据不同的分类原则，系统可分为

一、动态（记忆）系统与非动态（无记忆）系统

若系统在 t_0 时刻的响应 $y(t_0)$ 不仅与 t_0 时刻的激励 $x(t_0)$ 有关，同时还与区间 $(-\infty,t_0)$ 的激励有关，则这种系统称为动态系统，也称为记忆系统；若系统在 t_0 时刻的响应 $y(t_0)$ 只与 t_0 时刻的激励 $x(t_0)$ 有关，而与区间 $(-\infty,t_0)$ 的激励无关，则这种系统称为非动态系统或静态系统，也称为无记忆系统或即时系统。

二、 线性系统与非线性系统

线性系统必须同时满足下列两个特性：

（1）系统响应具有可分解性，即响应可以分解为零输入响应与零状态响应之和。

设系统响应为 $y(t)$，则有 $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$，其中 $y_{zi}(t)$ 为零输入响应，它是令系统的全部外施激励为零，仅由初始状态产生的响应；$y_{zs}(t)$ 为零状态响应，它是系统的初始状态为零时，系统相对于外加激励的响应。

（2）系统满足线性性。

设激励 $x(t)$、$x_1(t)$、$x_2(t)$ 产生的响应分别为 $y(t)$、$y_1(t)$、$y_2(t)$，a、a_1、a_2 为任意常数，则有

【齐次性】在图 2-1 中，当激励为 $ax(t)$ 时，所产生的响应为 $ay(t)$，则称系统满足齐次性。

【叠加性】在图 2-1 中，当激励为 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ 时，所产生的响应为 $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$，则称系统满足叠加性。满足叠加性是线性系统的必要条件。

若在图 2-1 中，激励 $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$，所产生的响应 $y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$，则称系统满足线性性。即只有同时

满足齐次性和叠加性的系统才称为线性系统，否则称为非线性系统。

三、 时不变系统与时变系统

设在图 2-1 中，激励 $x(t)$、$x_1(t)$、$x_2(t)$ 产生的响应分别为 $y(t)$、$y_1(t)$、$y_2(t)$，若当激励为 $x_2(t)=x_1(t-\tau)$ 时，所产生的响应为

$$y_2(t)=y_1(t-\tau)$$

则称系统为时不变系统，否则称为时变系统。系统的时不变性又称为定常性或延迟性。

四、 因果系统与非因果系统

如果一个系统在任一给定时刻的输出皆与未来的输入无关，则称为因果系统。对于因果系统来说，任一给定时刻为 t_1 时的响应 $y(t_1)$ 并不取决于 $t>t_1$ 时的输入激励 $x(t)$ 的值，或者说，$t>t_1$ 时作用于系统的激励 $x(t)$ 在 $t<t_1$ 时不会在系统中产生响应，即

$$y(t)=0 \qquad \forall t<t_1$$

不满足上述因果关系的系统称为非因果系统。