

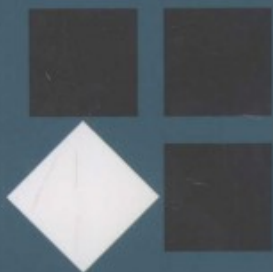
GAO DENG SHU XUE

高等数学

(上册) 宋礼民 杜洪艳 主编



复旦大学出版社



21 世纪普通高等教育应用型规划教材

高等数学

(上册)

宋礼民 杜洪艳 主编

复旦大学出版社

内 容 提 要

本教材是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准,以培养学生的专业素质为目的,充分吸收编者多年来教学实践与教学改革成果编写而成的.

本书分为上、下册.上册含函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容.下册含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容.每节均配有习题,每章配有综合练习题,书末附有习题参考答案,便于教与学.

本书可供高等本专科院校工科各专业使用,也可供其他专业参考.

前 言

《高等数学》是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准,以培养学生的专业素质为目的,充分吸收多年来教学实践和教学改革成果而编写的.

在编写中,力求贯彻“够用、管用、会用”的三用原则,删去传统本科教材中难而繁的内容,保留在工、农、医、管各本科专业的最基本内容,达到满足本科高校所必需的最低限度,够用即可.增添以往传统教材中没有的同时又是必须的知识内容,尤其是精选了一批各学科领域中的应用型例题和习题,使教材适合各专业的需要.淡化传统本科教材偏重理论的倾向,删去理论性较强的内容,强调数学知识的应用,会用为本.

在编写中,注重强调数学的方法和技巧,注重培养学生的数学思维能力,注重提高学生的数学素质,体现出数学既是一种工具,同时也是一种文化的思想.本书基本概念和原理讲解通俗易懂,同时又兼顾数学的科学性和严谨性;数学的基本技能和技巧叙述准确清晰,每节后有练习题,围绕本节知识内容进行学习和训练,每章后有综合练习,供学有余力的学生进一步提高数学水平选用,本书可供高等本科院校各专业使用,也可供各专科专业选用.

参加《高等数学》(上)编写人员有吴跃、高萍、姚维山、耿协春、张姝清、宋礼民等.全书的框架结构、统稿定稿由主编宋礼民负责.另外,还要感谢复旦大学竺秀山老师对本书的审读工作作出了一定贡献.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请专家读者批评指正.

编者

2007.6

目 录

第1章 函数与极限	1
1.1 函数	1
1.1.1 预备知识	1
1.1.2 函数的概念	2
1.1.3 函数的基本性质	4
1.1.4 反函数	6
1.1.5 初等函数	8
1.1.6 建立函数关系式举例	12
习题 1.1	15
1.2 极限的概念	17
1.2.1 序列极限的概念	17
1.2.2 函数的极限	19
习题 1.2	23
1.3 极限运算法则与两个重要极限	24
1.3.1 极限的四则运算	24
1.3.2 两个重要极限	26
习题 1.3	29
1.4 无穷小与无穷大	30
1.4.1 无穷小	30
1.4.2 无穷大	31
1.4.3 无穷小的比较	33
习题 1.4	35
1.5 函数的连续性	36
1.5.1 函数连续的概念	36
1.5.2 函数的间断点	40
1.5.3 初等函数的连续性	42
1.5.4 闭区间上连续函数的性质	44

习题 1.5	45
综合练习 1	47
第 2 章 导数与微分	50
2.1 导数的概念	50
2.1.1 引入导数概念的实例	50
2.1.2 导数的定义	51
2.1.3 导数的几何意义	53
2.1.4 单侧导数	53
2.1.5 可导与连续的关系	54
习题 2.1	55
2.2 求导法则	56
2.2.1 函数的和、差、积、商的导数	56
2.2.2 反函数的导数	58
2.2.3 复合函数的导数	59
2.2.4 基本初等函数的导数公式	61
习题 2.2	61
2.3 高阶导数	62
习题 2.3	66
2.4 隐函数的导数及参数方程求导	66
2.4.1 隐函数的求导	66
2.4.2 对数求导法	68
2.4.3 由参数方程所确定的函数的导数	70
2.4.4 相关变化率	72
习题 2.4	72
2.5 函数的微分	73
2.5.1 微分的定义	73
2.5.2 可微的条件	74
2.5.3 微分公式及运算法则	75
2.5.4 微分的应用	77
习题 2.5	79
2.6 导数在经济分析中的应用	79
2.6.1 边际分析	79
2.6.2 弹性分析	82

习题 2.6	84
综合练习 2	86
第 3 章 微分中值定理与导数应用	89
3.1 微分中值定理	89
3.1.1 罗尔定理	89
3.1.2 拉格朗日中值定理	91
3.1.3 柯西中值定理	94
习题 3.1	95
3.2 洛必达法则	96
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	96
3.2.2 其他类型的未定式	100
习题 3.2	102
3.3 泰勒公式	102
习题 3.3	108
3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性	109
3.4.1 函数单调性的判别方法	109
3.4.2 曲线的凹凸性	111
习题 3.4	115
3.5 函数的极值、最大值和最小值	116
3.5.1 函数的极值	116
3.5.2 函数的最大值与最小值	121
习题 3.5	123
3.6 函数图形的描绘	123
3.6.1 曲线的渐近线	123
3.6.2 函数图形的描绘	125
习题 3.6	127
3.7 曲率	127
3.7.1 弧微分	127
3.7.2 曲率及其计算公式	128
3.7.3 曲率圆与曲率半径	131
习题 3.7	132
综合练习 3	134

第4章 不定积分	137
4.1 原函数与不定积分	137
4.1.1 原函数的概念与原函数的存在性	137
4.1.2 不定积分及其性质	138
4.1.3 基本积分公式	141
习题 4.1	144
4.2 基本积分法	145
4.2.1 换元积分法	145
4.2.2 分部积分法	155
习题 4.2	161
4.3 常见题型归纳	163
综合练习 4	175
第5章 定积分	180
5.1 定积分的概念	180
5.1.1 两个实例	180
5.1.2 定积分的定义	182
习题 5.1	184
5.2 定积分的性质	184
习题 5.2	188
5.3 微积分基本公式	188
5.3.1 积分上限函数及其导数	188
5.3.2 牛顿—莱布尼兹公式	190
习题 5.3	193
5.4 定积分的换元法	194
习题 5.4	197
5.5 定积分的分部积分法	198
习题 5.5	200
5.6 广义积分	200
5.6.1 积分区间为无限	200
5.6.2 被积函数有无穷型间断点	202
习题 5.6	204
综合练习 5	206

第 6 章 定积分的应用	208
6.1 建立积分表达式的微元素法	208
6.2 定积分在几何中的应用	210
6.2.1 平面图形的面积	210
6.2.2 体积	214
6.2.3 平面曲线的弧长	218
习题 6.2	221
6.3 定积分在物理学上的应用	222
习题 6.3	226
6.4 定积分在经济学中的应用	227
习题 6.4	233
综合练习 6	234
第 7 章 微分方程	235
7.1 微分方程的基本概念	235
习题 7.1	237
7.2 一阶微分方程	238
7.2.1 可分离变量的微分方程	238
7.2.2 齐次微分方程	239
7.2.3 可化为齐次方程的微分方程	241
7.2.4 一阶线性微分方程	243
习题 7.2	245
7.3 可降阶的高阶微分方程	246
7.3.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	246
7.3.2 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	247
7.3.3 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	247
习题 7.3	248
7.4 高阶线性微分方程	249
7.4.1 高阶线性微分方程解的结构	249
7.4.2 n 阶常系数线性齐次微分方程	250
7.4.3 高阶常系数非齐次线性微分方程	252
习题 7.4	257
综合练习 7	259

附录 I 希腊字母及常用数学公式	261
附录 II 几种常用的曲线方程及图形	266
参考答案	269
参考文献	284

第1章 函数与极限

函数与极限是微积分的基础,在高中所学知识的基础上,本章将继续加以讨论,并予以归纳、深化.

1.1 函 数

1.1.1 预备知识

1. 区间

设 a, b 是两个实数,且 $a < b$, 满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 的全体叫做开区间,记为 (a, b) ; 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的一切实数 x 的全体叫做闭区间,记为 $[a, b]$; 满足不等式 $a < x \leq b$ 或 $a \leq x < b$ 的一切实数 x 的全体叫做半开区间,记为 $(a, b]$ 或 $[a, b)$.

除了上述这些有限区间外,还有无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数; $(a, +\infty)$ 表示大于 a 的全体实数; $(-\infty, a)$ 表示小于 a 的全体实数; $[a, +\infty)$ 表示大于等于 a 的全体实数; $(-\infty, a]$ 表示小于等于 a 的全体实数.

2. 绝对值

设 a 是一个实数, a 的绝对值用记号 $|a|$ 表示,即有定义

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时,} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

由此可知, $|a|$ 总表示正数或零,且有

$$|a| = \sqrt{a^2},$$

其几何意义是: $|a|$ 在数轴上表示点 a 与原点 O 之间的距离.

下面两式经常用到

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a;$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ 或 } x \geq a.$$

这里我们假定 $a > 0$. 从 $|x|$ 的几何意义可知, $|x| \leq a$ 表示点 x 与原点 O 之间的距离不超过 a , 而 $|x| \geq a$ 表示点 x 与原点 O 之间的距离不小于 a .

3. 邻域

设 a 和 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 满足不等式

$$|x - a| < \delta$$

的一切实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$ 或 $U(a)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径.

以后, 如果仅仅研究 x 在点 a 邻近的变化情况, 就需要用到邻域. 有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心后, 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $U(\hat{a}, \delta)$ 或 $\dot{U}(a)$, 即

$$U(\hat{a}, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

1.1.2 函数的概念

在研究某一现象或一变化过程时, 有些量始终取不变的值即常量 (往往用字母 $a, b, c, \dots$ 表示), 还有一些量可取变化的值即变量 (常用字母 $x, y, z, \dots$ 表示), 它们之间相互关联, 遵从一定的规律变化着.

下面我们来考察几个实例.

成本问题 设某厂生产某产品, 日产 x 单位, 它的日固定成本为 130 元, 生产一个单位产品的成本为 6 元, 那么该厂日产量 x 与日总成本 C 之间的依赖关系由 $C = 130 + 6x$ 给出, 当 $x = 30$ 单位时, $C = 310$ 元; 当 $x = 50$ 单位时, $C = 430$ 元, 即当产量 x 变化时, 成本 C 也随之而变化.

自由落体问题 设物体下落的时间为 t , 下落的距离为 s . 假定开始下落时刻为 $t = 0$, 那么 s 与 t 之间的依赖关系由 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 给出, 其中 g 是重力加速度.

在这个关系中, 距离 s 随时间 t 的变化而变化. 例如, 当 $t = 1$ 秒, $s = \frac{1}{2}g$; 当 $t = 3$ 秒, $s = \frac{9}{2}g$, 等等. 当下落时间 t 取定一个值 t_0 时, 对应的距离 $s = \frac{1}{2}gt_0^2$ 的值也就确定了.

上面列举的实际例子中, 抽去所考察的量的具体意义, 我们看到, 变量间的依赖关系中, 当其中一个变量在某一范围内每取定一个数值时, 另一个变量就有唯

一确定的值与之对应存在. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

我们还需注意到, 在上面的实例中, 变量的取值都有一定的范围. 成本问题中, 产品的日产量 x 取自然数, 成本 C 取正实数; 自由落体问题中, 时间 t 不能取负值, s 也不能取负值. 可见, 不同的关系中, 变量的取值范围有所不同.

下面, 我们给出函数的定义.

定义 1.1 设 x, y 是两个变量, 当变量 x 在非空数集 D 中任意取定一个数值时, 如果变量 y 依照某种法则有唯一确定的数值与之对应, 就称 y 是 x 的函数, 记为

$$y = f(x),$$

其中 x 叫做自变量, y 叫做函数 (或因变量). 数集 D 叫做函数的定义域.

当 x 取 D 中的数值 x_0 时, 与 x_0 对应的 y 值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$.

当 x 遍取 D 中每一个值时, 对应的函数值全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

研究函数, 借助于图像的直观形象是很有益的. 为此应弄清楚什么是函数的图像, 函数与其图像是什么关系.

给定函数 $y = f(x)$, 动点 $(x, y) = (x, f(x))$ 在平面的轨迹, 一般来说是一条平面曲线, 即为函数 $y = f(x)$ 的图像 (见图 1-1).

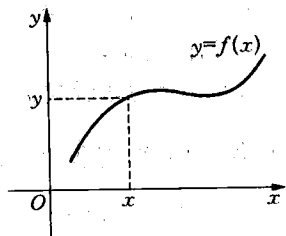


图 1-1

函数与它的图像的关系是: 图像上任一点 (x, y) 的纵坐标 y 是横坐标 x 对应的函数值 $y = f(x)$.

这样我们可以通过分析几何图像的形态来研究函数.

根据函数的定义, 函数的定义域和对应关系是确定函数的两个重要因素. 在实际问题中, 函数的定义域应根据问题的实际意义来确定; 对于用一个解析式表示的函数, 它的定义域可由函数表达式本身来确定, 即使运算有意义. 对于自变量在不同范围内取值时用不同的解析式表示一个函数 (称为分段函数), 它的定义域是其自变量各取值范围的并集.

例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{9-x^2} + \sqrt{x+1}; \quad (2) y = \lg(x^2 - 5x + 6);$$

$$(3) y = \arcsin \frac{x+1}{2}.$$

解 (1) 由 $9 - x^2 \neq 0$ 得 $x \neq \pm 3$,

又由 $x+1 \geq 0$ 得 $x \geq -1$,

所以函数的定义域为 $[-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

(2) 由 $x^2 - 5x + 6 > 0$ 得 $x > 3$ 或 $x < 2$,

所以函数的定义域为 $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

(3) 由 $-1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1$, 得 $-2 \leq x+1 \leq 2$,

即

$$-3 \leq x \leq 1,$$

所以函数的定义域为 $[-3, 1]$.

例 2 作分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$$

的图像,并指出其定义域.

解 在一个坐标系中作出对应区间上的图形(见图 1-2),因为 x 取 $(-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = (-\infty, +\infty)$, 所以此分段函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

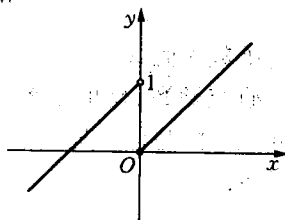


图 1-2

1.1.3 函数的基本性质

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加(或减少)的. 单调增加(或减少)的函数统称单调函数.

单调增加(或减少)函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升(或下降)的(见图 1-3).

例如, 商品经营中需要计算成本, 用 $C(q)$ 表示成本函数, 其中 q 表示商品的数量, 用整数表示一般来讲, 成本函数 $C(q)$ 是单调增加的. 由于商品数量往往很大, 经济学家把 $C(q)$ 的图像(见图 1-4)表示为连续曲线; 又例如, 函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数(见图 1-5), 但在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的, 而在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的.

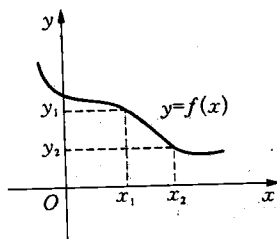
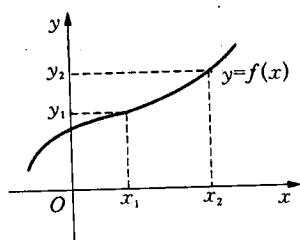


图 1-3

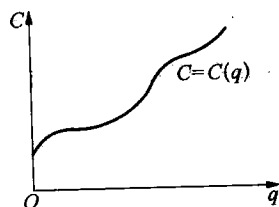


图 1-4

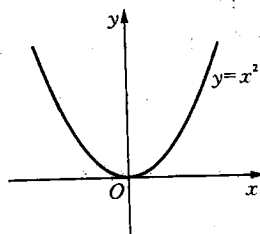


图 1-5

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如, $f(x) = x^3$ 是奇函数, 因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$; 而 $f(x) = x^2$ 是偶函数, 因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

奇函数的图像是关于原点对称的, 因为如果 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$, 那么 $A(x, f(x))$ 是图像上的点的话, 它关于原点对称的点 $A'(-x, -f(x))$ 也必在图像上(见图 1-6(a)).

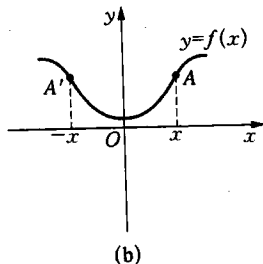
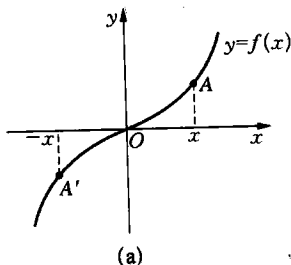


图 1-6

偶函数的图像是关于 y 轴对称的, 因为如果 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$. 所以如果 $A(x, f(x))$ 是图像上的点的话, 它关于 y 轴对称的点 $A'(-x, f(x))$ 也必在图像上(见图 1-6(b)).

有的函数既非奇函数又非偶函数, 称为非奇非偶函数, 例如 $y = 2x + 3$ 等. 而 $y = 0$ 既是奇函数又是偶函数.

3. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果存在着一个正数 M , 使得对于区间 (a, b) 内的一切 x 值, 对应的函数值 $f(x)$ 恒有 $|f(x)| \leq M$, 就称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界; 如果这样的数 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界.

例如, 函数 $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \arctan x$, $f(x) = \operatorname{arccot} x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的; 函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $U(\hat{0}, \delta)$ 内是有界的.

而函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内也是无界的, 等等.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在着一个不为零的数 l , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立, 则函数 $f(x)$ 叫做周期函数, l 叫做这个函数的周期. 通常我们说的周期指的是最小正周期.

例如, 函数 $\sin x$, $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; 函数 $\tan x$, $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

一个周期为 l 的周期函数, 它的图像在定义域内每隔长度为 $|l|$ 的相邻区间上有着相同的形状(见图 1-7).

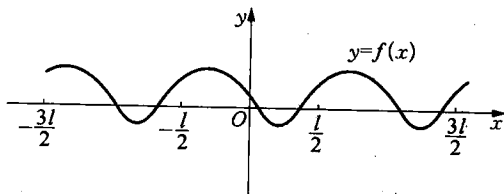


图 1-7

1.1.4 反函数

定义 1.2 设函数 $y = f(x)$ 是定义在数集 D 上的一单调函数, 值域为 W ; 对于 W 中的每一个 y 值, 恰有一个数 $x \in D$, 使得 $f(x) = y$, 我们把这个 x 记作

$f^{-1}(y)$, 即 $x = f^{-1}(y)$, 这样所确定的以 y 为自变量的函数, 叫做 $y = f(x)$ 的反函数. 它的定义域为 W , 值域为 D .

习惯上, 函数的自变量用 x 表示. 所以, $y = f(x)$ 的反函数通常表示为 $y = f^{-1}(x)$.

反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像, 与函数 $y = f(x)$ 的图像关于(在 x 、 y 轴的单位长度相等的同一坐标系中)直线 $y = x$ 对称(见图 1-8).

例3 求函数

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ 的反函数.}$$

解 由 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 得

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

$$\text{有} \quad e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

$$\text{因 } e^x > 0, \text{ 则 } e^x = y + \sqrt{1 + y^2},$$

于是

$$x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

故函数 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 的反函数为

$$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad x \in \mathbf{R}.$$

数学中称 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 为双曲正弦函数, 它的反函数称为反双曲正弦函数, 分别记为

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

类似地, 有

$$\text{双曲余弦函数} \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$$

$$\text{双曲正切函数} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

它们的反函数是

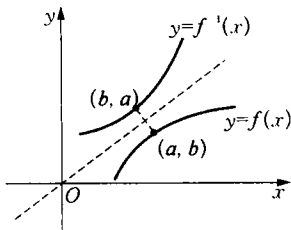


图 1-8