21世纪普通高等教育应用型规划教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学

（上册）

宋礼民　杜洪艳　主编

复旦大学出版社

21 世纪普通高等教育应用型规划教材

高等数学

（上册）

宋礼民　杜洪艳　主编

复旦大学出版社

内 容 提 要

本教材是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准，以培养学生的专业素质为目的，充分吸收编者们多年来教学实践与教学改革成果编写而成的.

本书分为上、下册.上册含函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容.下册含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容.每节均配有习题，每章配有综合练习题，书末附有习题参考答案，便于教与学.

本书可供高等本专科院校工科各专业使用，也可供其他专业参考.

前　言

《高等数学》是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准，以培养学生的专业素质为目的，充分吸收多年来教学实践和教学改革成果而编写的.

在编写中，力求贯彻“够用、管用、会用”的三用原则，删去传统本科教材中难而繁的内容，保留在工、农、医、管各本科专业的最基本内容，达到满足本科高校所必需的最低限度，够用即可. 增添以往传统教材中没有的同时又是必须的知识内容，尤其是精选了一批各学科领域中的应用型例题和习题，使教材适合各专业的需要. 淡化传统本科教材偏重理论的倾向，删去理论性较强的内容，强调数学知识的应用，会用为本.

在编写中，注重强调数学的方法和技巧，注重培养学生的数学思维能力，注重提高学生的数学素质，体现出数学既是一种工具，同时也是一种文化的思想. 本书基本概念和原理讲解通俗易懂，同时又兼顾数学的科学性和严谨性；数学的基本技能和技巧叙述准确清晰，每节后有练习题，围绕本节知识内容进行学习和训练，每章后有综合练习，供学有余力的学生进一步提高数学水平选用，本书可供高等本科院校各专业使用，也可供各专科专业选用.

参加《高等数学》(上)编写人员有吴跃、高萍、姚维山、耿协春、张姝清、宋礼民等. 全书的框架结构、统稿定稿由主编宋礼民负责. 另外，还要感谢复旦大学竺秀山老师对本书的审读工作作出了一定贡献.

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请专家读者批评指正.

编者

2007.6

目 录

第1章 函数与极限

函数与极限是微积分的基础，在高中所学知识的基础上，本章将继续加以讨论，并予以归纳、深化.

1.1 函 数

1.1.1 预备知识

1. 区间

设 a, b 是两个实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的全体叫做开区间，记为 (a, b)；满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做闭区间，记为 $[a, b]$；满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的一切实数 x 的全体叫做半开区间，记为 $(a, b]$ 或 $[a, b)$.

除了上述这些有限区间外，还有无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数；$(a, +\infty)$ 表示大于 a 的全体实数；$(-\infty, a)$ 表示小于 a 的全体实数；$[a, +\infty)$ 表示大于等于 a 的全体实数；$(-\infty, a]$ 表示小于等于 a 的全体实数.

2. 绝对值

设 a 是一个实数，a 的绝对值用记号 $|a|$ 表示，即有定义

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时},\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

由此可知，$|a|$ 总表示正数或零，且有

$$|a|=\sqrt{a^2},$$

其几何意义是：$|a|$ 在数轴上表示点 a 与原点 O 之间的距离.

下面两式经常用到

$$|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a;$$

$$|x|\geqslant a\Leftrightarrow x\leqslant -a \text{ 或 } x\geqslant a.$$

这里我们假定 $a>0$. 从 $|x|$ 的**几何意义**可知, $|x|\leqslant a$ 表示点 x 与原点 O 之间的距离不超过 a,而 $|x|\geqslant a$ 表示点 x 与原点 O 之间的距离不小于 a.

3. 邻域

设 a 和 δ 是两个实数,且 $\delta>0$, 满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的一切实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\ \delta)$ 或 $U(a)$, 即

$$U(a,\ \delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径.

以后,如果仅仅研究 x 在点 a 邻近的变化情况,就需要用到邻域. 有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心后,称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $U(\hat{a},\ \delta)$ 或 $\overset{0}{U}(a)$, 即

$$U(\hat{a},\ \delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

1.1.2 函数的概念

在研究某一现象或一变化过程时,有些量始终取不变的值即常量(往往用字母 $a,\ b,\ c,\cdots$ 表示),还有一些量可取变化的值即变量(常用字母 $x,\ y,\ z,\cdots$ 表示),它们之间相互关联,遵从一定的规律变化着.

下面我们来考察几个实例.

成本问题 设某厂生产某产品,日产 x 单位,它的日固定成本为 130 元,生产一个单位产品的成本为 6 元,那么该厂日产量 x 与日总成本 C 之间的依赖关系由 $C=130+6x$ 给出,当 $x=30$ 单位时, $C=310$ 元;当 $x=50$ 单位时, $C=430$ 元,即当产量 x 变化时,成本 C 也随之而变化.

自由落体问题 设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$, 那么 s 与 t 之间的依赖关系由 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 给出,其中 g 是重力加速度. 在这个关系中,距离 s 随时间 t 的变化而变化. 例如,当 $t=1$ 秒, $s=\dfrac{1}{2}g$; 当 $t=3$ 秒, $s=\dfrac{9}{2}g$, 等等. 当下落时间 t 取定一个值 t_0 时,对应的距离 $s=\dfrac{1}{2}gt_0^2$ 的值也就确定了.

上面列举的实际例子中,抽去所考察的量的具体意义,我们看到,变量间的依赖关系中,当其中一个变量在某一范围内每取定一个数值时,另一个变量就有唯

一确定的值与之对应存在. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

我们还需注意到，在上面的实例中，变量的取值都有一定的范围. 成本问题中，产品的日产量 x 取自然数，成本 C 取正实数；自由落体问题中，时间 t 不能取负值，s 也不能取负值. 可见，不同的关系中，变量的取值范围有所不同.

下面，我们给出函数的定义.

定义 1.1 设 x, y 是两个变量，当变量 x 在非空数集 D 中任意取定一个数值时，如果变量 y 依照某种法则有唯一确定的数值与之对应，就称 y 是 x 的函数，记为

$$y = f(x),$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做函数(或因变量). 数集 D 叫做函数的定义域.

当 x 取 D 中的数值 x_0 时，与 x_0 对应的 y 值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$.

当 x 遍取 D 中每一个值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

称为函数的值域.

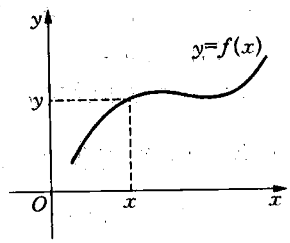

图 1-1

研究函数，借助于图像的直观形象是很有益的. 为此应弄清楚什么是函数的图像，函数与其图像是什么关系.

给定函数 $y = f(x)$，动点 $(x, y) = (x, f(x))$ 在平面的轨迹，一般来说是一条平面曲线，即为函数 $y = f(x)$ 的图像(见图 1-1).

函数与它的图像的关系是：图像上任一点 (x, y) 的纵坐标 y 是横坐标 x 对应的函数值 $y = f(x)$.

这样我们可以通过分析几何图像的形态来研究函数.

根据函数的定义，函数的定义域和对应关系是确定函数的两个**重要因素**. 在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定；对于用一个解析式表示的函数，它的定义域可由函数表达式本身来确定，即要使运算有意义. 对于自变量在不同范围内取值时用不同的解析式表示一个函数(称为分段函数)，它的定义域是其自变量各取值范围的并集.

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{9 - x^2} + \sqrt{x + 1}$;　　　(2) $y = \lg(x^2 - 5x + 6)$;

(3) $y = \arcsin \dfrac{x+1}{2}$.

解 (1) 由 $9 - x^2 \neq 0$ 得 $x \neq \pm 3$,

又由 $x + 1 \geqslant 0$ 得 $x \geqslant -1$,

所以函数的定义域为 $[-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

(2) 由 $x^2 - 5x + 6 > 0$ 得 $x > 3$ 或 $x < 2$,

所以函数的定义域为 $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

(3) 由 $-1 \leqslant \dfrac{x+1}{2} \leqslant 1$,得 $-2 \leqslant x + 1 \leqslant 2$,

即

$$-3 \leqslant x \leqslant 1,$$

所以函数的定义域为 $[-3, 1]$.

例 2 作分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$$

的图像,并指出其定义域.

解 在一个坐标系中作出对应区间上的图形(见图 1-2),因为 x 取 $(-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = (-\infty, +\infty)$,所以此分段函数 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

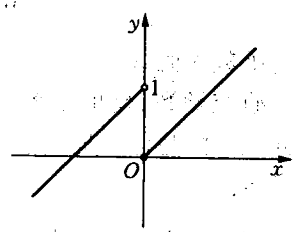

图 1-2

1.1.3 函数的基本性质

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$在区间(a, b)内有定义,如果对于区间(a, b)内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称函数 $f(x)$在区间(a, b)内是单调增加(或减少)的.单调增加(或减少)的函数统称单调函数.

单调增加(或减少)函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升(或下降)的(见图 1-3).

例如,商品经营中需要计算成本,用 $C(q)$表示成本函数,其中 q 表示商品的数量,用整数表示一般来讲,成本函数 $C(q)$是单调增加的.由于商品数量往往很大,经济学家把 $C(q)$的图像(见图 1-4)表示为连续曲线;又例如,函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数(见图 1-5),但在区间$(-\infty, 0]$ 内是单调减少的,而在区间$[0, +\infty)$ 内是单调增加的.

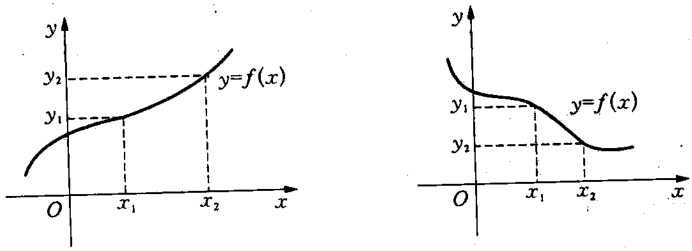

图 1-3

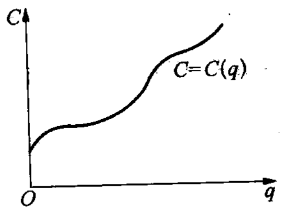

图 1-4

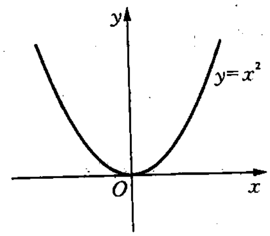

图 1-5

2. **函数的奇偶性**

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$，$f(-x) = -f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任一 $x \in D$，$f(-x) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，$f(x) = x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$；而 $f(x) = x^2$ 是偶函数，因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

奇函数的图像是关于原点对称的，因为如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$，那么 $A(x, f(x))$ 是图像上的点的话，它关于原点对称的点 $A'(-x, -f(x))$ 也必在图像上(见图 1-6(a)).

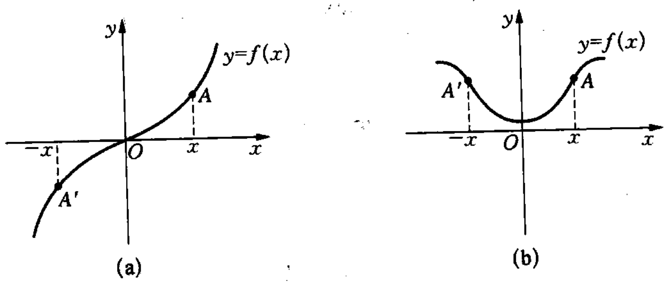

图 1-6

偶函数的图像是关于 y 轴对称的，因为如果 $f(x)$是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$. 所以如果 $A(x, f(x))$是图像上的点的话，它关于 y 轴对称的点 $A'(-x, f(x))$ 也必在图像上(见图 1-6(b)).

有的函数既非奇函数又非偶函数，称为非奇非偶函数，例如 $y=2x+3$ 等. 而 $y=0$ 既是奇函数又是偶函数.

3. **函数的有界性**

设函数 $f(x)$在区间(a, b)内有定义，如果存在着一个正数 M，使得对于区间(a, b)内的一切 x 值，对应的函数值 $f(x)$恒有 $|f(x)|\leqslant M$，就称函数 $f(x)$在(a, b)内有界；如果这样的数 M 不存在，则称函数 $f(x)$在区间(a, b)内无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\arctan x$, $f(x)=\operatorname{arccot} x$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$ 内是有界的；函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $U(\hat{0}, \delta)$ 内是有界的.

而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0, 1)$ 内是无界的，函数 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内也是无界的，等等.

4. **函数的周期性**

设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在着一个不为零的数 l，使得对于任一 $x\in D$，有$(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则函数 $f(x)$叫做周期函数，l 叫做这个函数的周期. 通常我们说的周期指的是最小正周期.

例如，函数 $\sin x$, $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$, $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

一个周期为 l 的周期函数，它的图像在定义域内每隔长度为$|l|$的相邻区间上有着相同的形状(见图 1-7).

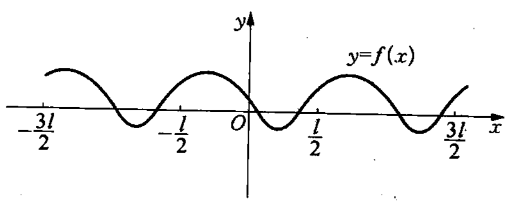

图 1-7

1.1.4 反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的一单调函数，值域为 W；对于 W 中的每一个 y 值，恰有一个数 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，我们把这个 x 记作

$f^{-1}(y)$，即 $x=f^{-1}(y)$，这样所确定的以 y 为自变量的函数，叫做 $y=f(x)$ 的反函数. 它的定义域为 W，值域为 D.

习惯上，函数的自变量用 x 表示. 所以，$y=f(x)$ 的反函数通常表示为 $y=f^{-1}(x)$.

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像，与函数 $y=f(x)$ 的图像关于（在 x、y 轴的单位长度相等的同一坐标系中）直线 $y=x$ 对称（见图 1-8）.

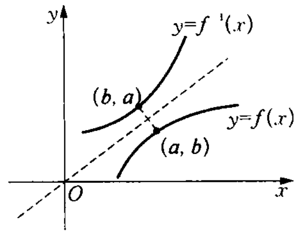

图 1-8

例 3 求函数

$$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \text{ 的反函数.}$$

解 由 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 得

$$e^{2x}-2ye^x-1=0,$$

有
$$e^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

因 $e^x>0$，则 $e^x=y+\sqrt{1+y^2}$，

于是
$$x=\ln(y+\sqrt{1+y^2}).$$

故函数 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\ x\in\mathbf{R}.$$

数学中称 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 为双曲正弦函数，它的反函数称为反双曲正弦函数，分别记为

$$\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\ \operatorname{arsinh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

类似地，有

$$\text{双曲余弦函数}\quad \cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x});$$

$$\text{双曲正切函数}\quad \tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

它们的反函数是