理論力学習題选集

理論力学教研組編

北京农业机械化学院

1957

理論力学習題选集

目　　录

运動学部份

動力学部份

第九章　点的直綫运動

§1.　运動方程式

如已知动点所走的軌跡为一直線，則只需一个方程式：

$$X = f(t) \qquad (1)$$

即可确定其运动规律。

在本章里，問題大致分为两种情况：（1）等速或等变速运动，（2）变速或变加速运动。在后种情况，問題的重点是通过机构关係找运动方程式（1）。

§2.　等速及等变速运動

如等速运动之速度大小为 $\tilde{v}$，則点在时間間隔 t 內所走的路程S为：

$$S = X - X_0 = \tilde{v}\,t \qquad (2)$$

如等变速运动之加速度为 $\tilde{a}$，初速为 v_0，則点在任一瞬时 t之速度为：

$$v = v_0 + \tilde{a}\,t \qquad (3)$$

它在时間間隔 t 內所走的路程 S 为：

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}\tilde{a}\,t^2 \qquad (4)$$

公式（3）、（4）中的 $\tilde{a}$ 可为正負，視等加速还是等減速而定。如將（3）、（4）式中的 t 消去，即得有名的速度与路程关系式：

$$v = \sqrt{2as} \qquad (5)$$

§3.　变速运動的速度与加速度

如果給出或通过机构的几何关系找出点的运动方程式（或規律）：

$$X = f(t)$$

后，要求該点的速度或加速度，我們是利用微分学的知識找到的：

$$v=\frac{dx}{dt}=t'(t) \qquad (6)$$

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t) \qquad (7)$$

在等速及等变速的特殊情况下，可利用积分学的知識由公式(6)，（7）求到位移和速度。不过，要先知道初始条件X_0和V_0。

§4. 在本章里，建議解下列各題

137. 列車按方程式$s=0.1t^2+t$行駛（t以秒計，s以公尺計）。求：在第一分鐘內的平均速度。

答：7公尺/秒。

138. 已知压力机的圆偏心轴框的运动方程式为$x=e(1-\cos\omega t)$，其中x以公分計，t以秒計，e表示偏心度，ω表示偏心輪的角速度（e与ω是常数）。求1）在瞬时$t=0$以后改变运动方向的最初两个瞬时；2）速度到达最大值时的最初瞬时；3）运动的週期。

答：1）$\frac{\pi}{\omega}$秒；$\frac{\pi\pi}{\omega}$秒；　　2）$\frac{\pi}{2\omega}$秒；

3）$T=\frac{2\pi}{\omega}$秒。

139. 列車以速度72公里/小时行駛；当制动时列車获得減速度0.4公尺/秒²。問应在列車到站前多少时候，以及在离站多少距离处开始制动？

答：50秒；500公尺。

140. 錘子打击椿柱后，即与椿柱一起运动並經0.02秒而停止，此时椿陷入地6公分。設該运动为等減速运动，求椿运动的初速度。

答：6公尺/秒。

141. 电車沿直線軌道加快速度行駛，所走的路程与时間的立方成比例。在第一分鐘內，电車走了90公尺。求当$t=0$与$t=5$秒时的速度与加速度，並作出运动图、速度图与加速度图。

答：$v_0=0$；$w_0=0$；$v_5=\frac{15}{8}$公尺/分；

$w_5=45$公尺/分²。

142. 設飛机的着陸速度为100公里/小时，而在着陸后滑行了路程l=100公尺，如設其減速度为常数，求此減速度。

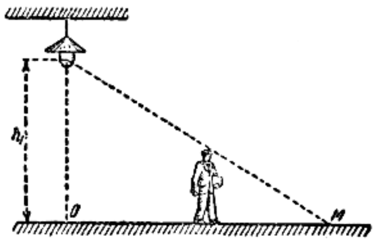
答：$w=3.86$公尺/秒^2。

143. 錘子自2.5公尺的高度落下，如將它举到同样高度，需要的时間为下落时間的三倍。設錘子自由落下的加速度为9.81公尺/秒，問錘子在一分鐘內可打几下？

答：21下。

144. 高h_2米的一个人在路灯下以等速c行走，灯距地面的高度为h_1米。求人影的頂端M沿地面移动的速度v。

答：$v=\dfrac{h_1}{h_1-h_2}c$。



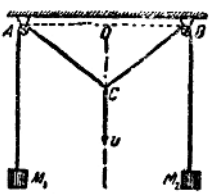
題 144 附图

145. 一点沿X軸作直線运动，其加速度与横坐标成正比即$w=k^2x$，其中k为常数。求此点运动的规律，設开始时，$x=0$，$v=v_0$。

答：$x=\dfrac{v_0}{2k}(e^{kt}-e^{-kt})$。

146. 繞过小滑輪A与B的繩子两端悬二重物M_1与M_2。繩上之C点，其起始位置与D点重合，今將此点以等速u沿鉛垂線DC往下拉。設AD=DB=a。求二重物之速度。

答：$v=\dfrac{u^2t}{\sqrt{u^2t^2+a^2}}$，



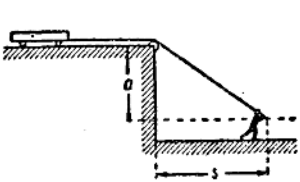
題 146 附图

147. 一人用繩子牽一輛位於高出地面的平台上之小車在地面上奔跑。求小車的速度 v 及其加速度 w，設人的速度为定值 u 而繩端与小車的高度差为 a。

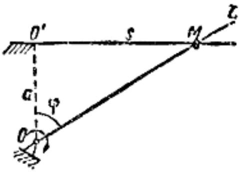
答：$v=\dfrac{su}{\sqrt{a^2+s^2}}$；$w=\dfrac{u^2s^2}{(a^2+s^2)^{3/2}}$，其中 s 为人所走的路程。

148. 細桿 OL 以等角速 ω 繞定点 O 轉动。此桿推动一个穿在固定鉄絲上的小环 M；鉄絲与 O 点的距离为 a。求小环的速度（以距离 O′M = s 之函数表示）。

答：$v=a\omega+\dfrac{\omega}{a}s^2$；$w=2\omega^2 s\left(1+\dfrac{s^2}{a^2}\right)$。



題 147 附图



題 148 附图

第十章　点的曲線运動

§1. 决定曲線运動的一般方法

（一）向量法：只要用一个向量运动方程式：

$$\bar{r}=\bar{r}(t) \tag{1}$$

就可完全确定点的运动规律。

因为用向量表示一物理量时，簡单明瞭，所以在理論推导时，被广泛的采用着。

（二）自然法：要完全确定点的运动，須知道：

①运动軌跡

②沿該軌跡的运动方程：$s=f(t)$　　　　（2）

运动方程式（2）通常需通过机构的几何关系写出，但也有时直接給出。

（三）坐标法：常用的有两种：

①直角座标法：可用三个方程

$$\begin{aligned} x&=f_1(t)\\ y&=f_3(t)\\ z&=f^3(t) \end{aligned} \tag{3}$$

完全确定点的运动

方程（3）通常通过机构的几何关系写出，或直接給出。

②极座标法：多用在点做平面曲線运动时，是由

$$\begin{cases} r=r(t)\\ \varphi=\varphi(t) \end{cases} \tag{4}$$

来确定点的运动规律。

座标法在具体問題的計算中，有实用价值。

§2. 从直角座标运動方程式求点的軌跡，速度与加速度

（一）从已知的（或通过几何关系写出的）运动方程式：

$$
\begin{aligned}
x &= f(t) \\
y &= f_2(t) \\
z &= f_3(t)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

消去时間 t，即得軌跡方程：

$$
\begin{aligned}
\psi(x, y) &= 0 \\
\varphi(y, z) &= 0
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

方程式（3）也叫軌跡的参数方程。

（二）將座标x，y，z对时間t求一次微商，即得相应的速度投影：

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (6)$$

其大小：$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ （7）

方向为：

$$
\begin{cases}
\cos(\bar{v}, \bar{i}) = \dfrac{v_x}{v} \\
\cos(\bar{v}, \bar{j}) = \dfrac{v_y}{v} \\
\cos(\bar{v}, \bar{k}) = \dfrac{v_z}{v}
\end{cases}
\qquad (8)
$$

（三）將座标x，y，z对时間t求二次微商，即得相应的加速度投影：

$$
\begin{aligned}
w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\
w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\
w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

其大小为：$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$ （10）

方向：

$$
\begin{aligned}
\cos(\bar{w}, \bar{i}) &= \frac{w_x}{w} \\
\cos(\bar{w}, \bar{j}) &= \frac{w_y}{w} \\
\cos(\bar{w}, \bar{k}) &= \frac{w_z}{w}
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

§3. 以自然法求速度和加速度

（一）在軌跡上的每一点，都可以划出与軌跡有直接联系的三根相互垂直的直線：切線，主法線与付法線；这些直線就形成了所謂自然軸；其原点位于动点上，且隨其运动。

（二）將运动方程$s=f(t)$对时間取一阶导数，即得点沿軌跡的切線方向的速度：

$$v=\frac{ds}{dt}=f'(t) \tag{12}$$

（三）因加速度$\bar{w}$永远位于密切面內，而付法線是从軌跡上的某一点对密切面所引起的垂線，所以w在付法線上的投影永为零，即

$$w_b=0$$

加速度$\bar{w}$在切線上的投影等于速度的模对时間的导数：

$$w_t=\frac{dv}{dt}=f''(t) \tag{13}$$

而在主法線上的投影等于：

$$w_n=\frac{v^2}{\rho} \tag{14}$$

其中ρ为軌跡在該处的曲率半径，如曲線为圓时，ρ即为圓的半径R。

由此

$$w=\sqrt{w^2_\tau+w_n^2}=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \tag{15}$$

$$\operatorname{tg}(\bar{w}\,\bar{v})=\frac{w_n}{w_\tau} \tag{16}$$

（四）由方程式$\bar{w}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(v\bar{\tau})=\frac{dv}{dt}\bar{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\bar{n}$的推导过程中可知：切向加速度$w_\tau=\frac{dv}{dt}$是改变速度大小的因素，而法向加速度$w_n=\frac{v^2}{\rho}$是改变速度方向的因素。由此可知：在直線运动中，因方向永不改变，即$\rho=\infty$，所以切向加速度$\frac{dv}{dt}$就是全加速度。

（五）曲率半径的一般求法：

如直角座标运动方程：

$x=f_1(t)\quad y=f_2(t)\quad z=f_3(t)$ 为已知，在們且知

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$w=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}$$

由公式(15)可知： $w_n=\sqrt{w^2-w_\tau^2}$

又因 $w_n=\dfrac{v^2}{\rho}$

所以 $$\rho=\frac{v^2}{w_n} \tag{17}$$

由以上关系式也可看出自然法与直角座标法的相互关系。

§4. 解题方法指示

1. 根据題目意思，先把点的一般运动情况搞清楚，以簡单图形表示出来。

2. 根据已知条件选擇解題的方法（自然法或座标法）

3. 最重要的是由点的运动几何关系找出点的运动方程式来（当然已經給出更好）。然后用微分学的知識很容易求出它的速度和加速度来。

4. 有时已知加速度和速度，要求的是运动方程(或路程)和軌跡，这时需用积分来求；和在点的直線运动一样，須知初始条件，以便来确定积分常数。

§5. 在本章里，建議解下列各題

149. 已知点的运动方程式，求其軌跡方程式。

1） $x=4t-2t^2$, 答：半直線 $3x-4y=0$,

$y=3t-1.5t^2$。 其始点在 $x_0=0$。$y_0=0$。

2） $x=at^2$，　　　　　　答：抛物線 $ay^2-b^2x=0$。

$y=bt$。

3） $x=5\cos t$，

$y=3-5\sin t$。　　　答：圓周 $x^2+(y-3)^2=25$。

150. 根据已知点的运动方程式，求其軌跡方程式，並从点的起始位置計算距离而求出点沿軌跡之运动规律。

1） $x=3\sin t$，　　　答：圓 $x^2+y^2=9$；$s=3t$。

$y=3\cos t$。

2） $x=5\cos 5t^2$　　　答：圓周 $x^2+y^2=25$；$s=25t^2$。

$y=5\sin 5t^2$。

151. 自飛机上扔下之炸弹按下列方程式运动：$x=40t$。$y=4.9t^2$（x，y以公尺計，t以秒計）。將炸弹扔出之点取作座标的原点，Ox軸定为水平，Oy軸鉛垂向下。如飛机飛行高度 $h=3000$ 公尺，求炸弹的軌跡方程式，並求炸弹的墜落时間及其水平射程。

答：$y=0.00306x^2$；　　$t=24.74$ 秒；

$L=989.6$ 公尺。

152. 点按下列方程式画出李薩茹图：

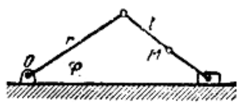
$$x=2\cos t,\quad y=4\cos 2t,$$

（x，y以公分計，t以秒計）。当該点在Oy軸上时，求其速度的大小与方向。

答：1） $v=2$ 公分/秒；　$\cos(v,x)=-1$。

2） $v=2$ 分公/秒；　$\cos(v,x)=1$。

153. 在曲柄連桿机构中，$r=l=a$，$\varphi=\omega t$，其中 ω 是常数，求連桿中点M的速度及滑塊的速度。



題 153 附图

答：1） $v=\frac{a}{2}\omega\sqrt{8\sin^2\omega t+1}$。

2） $v=2a\omega\sin\omega t$。

154. 列車的初速度为54公里/小时，在最初的30秒內走了600公尺。設列車在半径 $R=1$ 公里的圓弧上作等变速运动，求其在第30秒末的速度与加速度。

答：$v=25$公尺/秒；$w=0.708$公尺/秒^2。

155. 飛輪加快轉动时，其輪緣上一点按方程式 $s=0.1t^3$ 而运动（t 以秒計，s 以公尺計）飛輪的半径为 2 公尺。求当此点的速度 $v=30$公尺/秒时，此点的法向与切向加速度。

答：$w_n=450$公尺/秒^2；$w_t=6$公尺/秒^2。

156. 点沿半径 $R=20$公分的圓弧上运动。它沿着軌跡运动的規律为：$s=20\sin\pi t$（t 以秒計，s 以公分計）。求在 $t=5$ 秒时，此点速度的大小与方向及其切向加速度、法向加速度与全加速度，並作出速度图、切向加速度图及法向加速度图。

答：其速度大小为20π公分/秒，其方向与弧長S計算的方向相反；

$$w_t=0;\qquad w=w_n=20\pi^2\text{公分/秒}^2。$$

157. 如已知点的运动方程式为：

$$x=20t^2+5,\qquad y=15t^2-3.$$

（t 以秒計，x、y以公分計）。求当 $t=2$ 秒与 $t=3$ 秒时速度与加速度的大小与方向。

答：当 $t=2$ 秒时，$v=100$公分/秒；

当 $t=3$ 秒时，$v=150$公分/秒；

$w=$ 常数 $=50$ 公分/秒^2；

$\cos(v,x)=\cos(w,x)=0.8$；

$\cos(v,y)=\cos(w,y)=0.6$。

158. 如点的运动方程式为：$x=2t$，$y=t^2$（t 以秒計，x、y以公尺計），求在运动开始时其軌跡的曲率半径。

答：$\rho_0=2$公尺。

159. 蒸汽机开动时，其曲柄銷的运动方程式为：$x=75\cos 4t^2$，$y=75\sin 4t^2$（x、y以公分計，t 以秒計）。求銷的速度、切向加速度与法向加速度。

答：$v=600\,t$ 公分/秒；

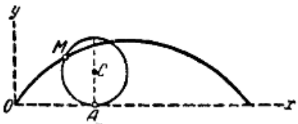
$w_t=600$ 公分/秒^2；

$w_n=4800\,t^2$ 公分/秒^2。

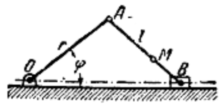
160. 沿水平軸 Ox 滾动之輪上一点按方程式：

$$x = 20t - \sin 20t,$$
$$y = 1 - \cos 20t.$$

（t 以秒計，x、y以公尺計），而走出旋輪線軌跡。求該点加速度的大小与方向及其軌跡的曲率半径，並求当 $t = 0$ 时曲率半径 ρ 的值。



題 160 附图



題 161 附图

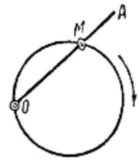
答：加速度 $w = 400$公尺/秒²，其方向沿 MC 而朝向滚动圓的中心C；$\rho = 2MA$；$\rho_0 = 0$。

161. 如在曲柄連桿机构中，$r = l = 60$公分，$MB = \frac{1}{3}l$，$\varphi = 4\pi t$（t 以秒計），求連桿上一点M的軌跡，並求当 $\varphi = 0$时，該点的速度、加速度及其軌跡的曲率半径。

答：橢圓 $\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$；$v = 80\pi$公分/秒；

$w = 1600\pi^2$ 公分/秒²；$\rho = 4$公分；

162. 在半径为10 公分的鉄圈上，套一小环M，有桿OA穿过小环M，並繞鉄圈上一点O轉动，其角速度相当于在 5 秒內轉一直角。求小环的速度 v 与加速度w。



題 162 附图

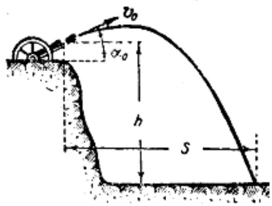
答：$v = 2\pi$公分/秒；$w = 0.4\pi^2$公尺/秒²。

163. 砲弹在鉛垂平面按方程式：$x = 300t$，$y = 400t - 5t^2$（t 以秒計，x，y以公尺計）而运动。求：1）在初瞬时的速度与加速度，2）射击高度与射程，3）軌跡在起点与最高点的曲率半径。

答：$v_0 = 500$公尺/秒；$w = 10$公尺/秒²；$h = 8$公里；$s = 24$公里；$\rho_0 = 41.67$公里；$\rho = 9$公里。

164. 海岸砲在离海平面高度 $h = 30$ 公尺处以初速 $v_0 = 1000$ 公尺/秒並与水平面成傾斜角 $\alpha_0 = 45°$ 发射砲弹。求在海面上被砲击中之目标离砲的距离。空气的阻力略去不計。

答：102公里。



题 164 附图

165. 列車离开車站时，其速度以等速增加，並在离开車站三分鐘后达到 72 公里/小时；其軌道为半径等于 800 公尺的圆弧。求离开車站 2 分鐘后列車的切向、法向与全加速度。

答：$w_t = \frac{1}{9}$ 公尺/秒²；

$w_n = \frac{2}{9}$ 公尺/秒²；$w = 0.25$公尺/秒²。

166. 点作等速螺旋运动，其方程式为 $x = 2\cos 4t$，$y = 2\sin 4t$，$z = 2t$，且取公尺为長度单位。求軌跡的曲率半径。

答：$\rho = 2\frac{1}{8}$ 公尺。

167. 点运动的极座标方程式为：$r = ae^{kt}$ 及 $\varphi = kt$，其中 a 与 k 为已知常数。求以向径 r 的函数来表示的軌跡方程式、速度、加速度及其軌跡的曲率半径。

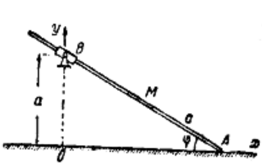
答：$r = ae^{\varphi}$——对数螺線；

$v = kr\sqrt{2}$；$w = 2k^2r$；$\rho = r\sqrt{2}$。

168. 一直桿以等角速 ω_0 繞其固定端 O 轉动，沿此桿有一滑塊以等速 v_0 滑动。求滑塊的軌跡和速度，設于开始时（于 t＝0 时），$r = 0$，$\varphi = 0$。

答：$r = \frac{v_0}{\omega_0}\varphi$；$v = v_0\sqrt{1 + \omega_0^2 t^2}$。

169. 一桿子穿过在鉸鏈上可繞定点B轉动的套管；桿之 A 端以等速 c 沿固定直線 Ox 滑动。求桿上M点軌跡与速度（以角φ之函数表示），設AM＝OB＝r_0



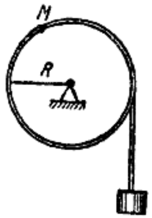
题 169 附图

答：軌跡$(y - a)^2(y^2 - a^2) + x^2y^2 = 0$；

$$v = c\sqrt{1-2\sin^2\varphi+\sin^4\varphi};$$

170. 在半径 $R=0.5$米的滑輪上繞一繩子，繩的自由端掛有一重物。重物以 $s=0.6t^2$ 的規律下降並帶动滑輪轉动，求运动开始后1秒，滑輪边上 M 点的加速度。

答：$w_1=3.12$米/秒^2。



題 170 附图

171. 一点从静止狀态开始以等切向加速度 a 沿半径为 R的圓周运动。問运动开始后經过几秒点之切向与法向加速度的大小相等。

答：$t=\sqrt{\frac{R}{a}}$。

第十一章　剛体的基本运動

§1.　移動

当刚体运动时，固結在刚体的所有各直線均作平行於自身的运动，这种运动就称为刚体的移动。

在刚体移动时，其上所有的点均走出一完全相同的軌跡（空間的或平面的）。在每一已知瞬时，其速度和加速度的大小方向也完全相同。

因此，在研究刚体的移动时，完全可以拿研究質点运动的方法来研究刚体內任一点（例如物体的重心）的运动来决定刚体的移动。

§2.　剛体繞定軸之轉動

当物体运动时，其上有两点仍然静止不动，这种运动称为刚体繞定軸运动。通过这两点的直線上所有的点也应該是静止不动，此直線称为轉动軸。当刚体做定軸轉动时，刚体上所有的点均走出一个圓周軌跡，圓的平面垂直於轉动軸，而圓心在轉动軸上。

（一）、一般情况下的轉动：

在刚体繞定軸轉动的任一瞬时，其上任一点M的位置、速度和加速度，可由該点到轉軸的距离 R 和刚体的轉动规律

$$\varphi = f(t) \qquad (1)$$

所决定。公式（1）中的轉角φ是时間的单値連續函数，称为刚体之轉动方程式或轉动规律。

刚体上任一点線速度(如M点)的大小为：

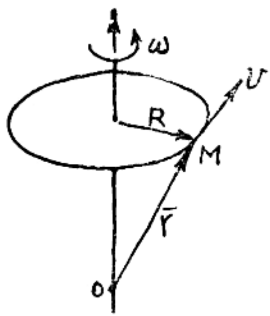


图 14

$$v=\omega R,$$

其方向沿軌跡的切向而指向轉动的一方。

这点的切向加速度按大小为：

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}=R\varepsilon$$

其方向沿軌跡的切向而指向与角加速度的轉向相同。

該点的法向加速度按大小为：

$$w_n=\frac{v^2}{R}=\frac{\omega^2R^2}{R}=\omega^2R$$

其方向沿着半径R而永指向轉动軸。

於是該点的全加速度为：

$$w=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}=R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$$

其方向通常由全加速度$\overline{w}$和法向加速度$\overline{w}_n$之間的夹μ角来决定：

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{w_\tau}{w}=\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}。$$

（二）、等速轉动和等变速轉动的情况：

等速轉动即刚体在单位时間內做相同的轉数。这时，角速度和刚体每分的轉数 n 有下列重要关系：

$$\omega=\frac{\pi n}{30}.$$

如以φ_0表示刚体的初位置，則角位移和等角速度有下列关系式：

$$\varphi=\varphi_0+\omega t$$

如以φ_0表示刚体的初位置，ω_0表示刚体的初角速度，則角加速度和角位移有下列关系式：

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0t\pm\frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

而刚体的角速度变化规律为：

$$\omega=\omega_0\pm\varepsilon t$$

上两式的正負号是这样决定：如刚体为等加速轉动时用正号，如为等減速轉动时用負号。

上述刚体的等速和等变速轉动的情况，和第九章中§2点做等速