概率论与数理统计

gailvlun yu shuli tongji

◆ 主编 余君武 肖艳清

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计

主编:余君武　肖艳清
主审:刘金旺

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本教材是根据高等学校基础理论教学“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，参照国家教委制订的《概率论与数理统计课程教学基本要求》而编写的.

全书共九章. 即随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析. 每章均配有习题，书后附有参考答案.

本书可作为理工科大学及专科院校的数学教材或参考书，也可作为综合大学和高等师范院校非数学专业及各类成人教育的数学教材或参考书.

版权专有　侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/余君武，肖艳清主编. —北京：北京理工大学出版社，2009. 8

ISBN 978 - 7 - 5640 - 2741 - 4

Ⅰ. 概…　Ⅱ. ①余…②肖…　Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 150307 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http: // www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市南阳印刷有限公司
开　　本 / 710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 / 14
字　　数 / 183 千字
版　　次 / 2009 年 8 月第 1 版　　2009 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 / 1 ~ 4000 册　　　　　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 20. 00 元　　　　　　　责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题，本社负责调换

前　言

本书可作为高等学校工科、理科(非数学专业)概率论与数理统计课程的教材,也可供工程技术人员参考.

概率论与数理统计主要介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和方法.本书分两个部分.概率论部分(第一章至第五章)作为基础知识,为读者提供了必要的理论.主要包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征以及大数定律和中心极限定理.数理统计部分(第六章至第九章)主要讲述了数理统计的基本概念、参数估计和假设检验,并介绍了方差分析和回归分析.概率论与数理统计结合工科教学实际,注意理论联系实际,选材适当,论述严谨,条理清楚,简明扼要,便于学生自学.为了使本书具有广泛的适用性以及良好的可读性与趣味性,本书编写中注意了以下几个基本原则和具体措施:

(1) 阅读本书的读者只需具有高等数学的数学基础.

(2) 在选材与叙述上尽量做到联系工程的实际,注重应用.所选择的例题和习题既具有启发性,又具有广泛的应用性.

邹植民同志为本书的编写提供了大量的素材.并参与了本书内容的编写和大纲的讨论.

本书承黄云清教授、邹捷中教授、刘金旺教授审阅,他们提出了很多宝贵意见,作者在此表示衷心的感谢.

由于作者水平有限,所以书中难免存在不足之处,诚恳地希望读者批评指正.

作　者

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　随机事件与概率

在自然界及人类社会中，人们会遇到各种各样的现象，一类是在一定的条件下一定会发生或一定不会发生，称之为确定性现象.

例如，在"标准大气压下，加热水到 100℃，水会沸腾"，"异性电荷会互相吸引"，"平面上三角形内角和等于 180°". 这些现象都是必然现象，它们在一定的条件下都一定会发生，而"在标准气压下，加热水到 50℃，水会沸腾"，"异性电荷会互相排斥"等是肯定不会发生的，称之为不可能现象. 必然现象和不可能现象称之为确定性现象.

然而在自然界和社会实践中还存在另一类不确定的现象.

例如，向桌面上任意投掷一枚均匀硬币，可能"出现正面"，也可能"出现反面"(我们把刻有币值的一面朝上叫"出现正面"). 尽管每次投掷的条件完全一样，我们也不能准确地预言究竟是出现哪一种结果；每次打靶时我们都是瞄准同一目标，但每次弹着点的位置都不尽相同，我们不能准确无误地预言弹着点的位置；一部电话机在某一小时内的电话呼唤次数，可能是 0 次，1 次，2 次，…，但事先无法知道有多少次呼唤. 我们称在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象为随机现象. 由该定义可见，随机现象的结果至少要有两个，至于哪一个出现，人们事先并不知道，这些都是随机性的特征.

经验表明，随机现象在大量的重复试验中总是呈现某种规律性. 概率论与数理统计就是研究这种随机现象数量规律性的一门学科.

随机现象很多，它几乎发生在所有的自然界与人类社会现象中，因此概率论与数理统计的应用十分广泛，几乎遍及科学技术的各个领域. 例如，使用概率统计方法可以进行气象预报、地震预报、产品的抽样验收等. 随着经济与科学的发展，概率统计已成为处理很多实际问题的有效工具.

第一节　样本空间与随机事件

一、随机试验、样本空间

我们把对随机现象的观测与试验叫随机试验，用 E 表示. 例如，掷一枚硬币就是做了一次随机试验，记为 E_1；掷一颗骰子也是做了一次随机试验，记作 E_2. 随机试验有两个特点：

(1) 试验的结果事先不知道，只知道可能有什么结果；

(2) 可以在相同的条件下重复进行试验.

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的，我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点，用 ω 表示样本点. 对于一个具体的随机试验(以后简称为试验)，我们总可以根据试验结果的含义来确定其样本空间.

例 1.1.1 写出下列随机试验的样本空间.

E_1：掷一枚均匀硬币，

$$\Omega_1 = \{\text{正},\text{反}\} = \{\omega_1, \omega_2\};$$

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H，反面 T 出现的情况.

$$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\};$$

E_3：将一枚硬币抛掷三次观察正面出现的次数

$$\Omega_3 = \{0,1,2,3\};$$

E_4：记录某电话机某段时间的电话呼唤次数，

$$\Omega_4 = \{0,1,2,\cdots\} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\};$$

E_5：测试某台电视机的寿命，

$$\Omega_5 = \{x: 0 \leqslant x < +\infty\}.$$

由例 1.1.1 可知，样本空间就是一个有限或无限的点集. 另外，样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 如 E_2、E_3，由于试验的目的不同，其样本空间也不一样.

二、随机事件

在随机试验中，我们往往关心的是满足某种条件的一些样本点的集合，即 Ω 的子集，我们把样本空间 Ω 的子集称为随机事件，简称事件. 它在随机试验中可能发生，也可能不发生. 随机事件一般用大写字母 A、B、C 等表示.

例 1.1.2 用 Ω 的子集表示下列事件.

E：掷一颗骰子，观察其出现的点数，

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1,2,3,4,5,6\},$$

$$A = \{\text{出现奇数点}\},$$

$$B = \{\text{出现的点数不超过 } 3\}.$$

解 $A=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$，

$B=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

随机事件是由若干个样本点组成的，在一次试验中事件 A 发生，当且仅当试验中出现的样本点 $\omega \in A$.

由一个样本点组成的单元素集称为基本事件，由全体样本点组成的样本空间 Ω 称为必然事件，这是由于 Ω 包含了所有的样本点，每次试验 Ω 肯定会发生. 不包

括任何样本点的空集$\varnothing$称为不可能事件，因为它在每次试验中都不会发生．必然事件和不可能事件都可以看作是随机事件的极端情形．为了方便起见，我们把必然事件、不可能事件和随机事件统称为事件．

第二节　事件的关系与运算

既然事件就是Ω的子集，那么事件的关系就是集合间的关系，事件的运算就是集合的运算．

设试验E的样本空间为Ω，而A、B、A_k($k=1,2,\cdots$)为Ω的子集．

一、事件的包含与相等

若事件A发生，则事件B发生，就称事件B包含事件A，或A包含于B，记作$B\supset A$或$A\subset B$(如图1.1所示)．

例如，掷一颗骰子，$A=\{$出现的点数$\leqslant 2\}$，$B=\{$出现的点数$\leqslant 3\}$，此时就有$A\subset B$．

对于试验E中的任一事件A有$\varnothing\subset A\subset\Omega$．

若$A\subset B$，$B\subset A$，则称事件A和事件B相等，记作$A=B$．

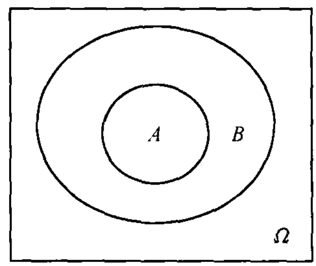

图1.1

二、事件的和与积

“事件A与事件B至少有一个发生”也是一随机事件，称为事件A与事件B的和事件，记作$A\cup B$或$A+B$，即$A+B=\{$事件A与事件B至少有一个发生$\}$．图1.2中的阴影部分为A与B的和事件．

“事件A与事件B同时发生”也是一事件，称为A与B的积事件，记作$A\cap B$或AB，即$A\cap B=\{$事件A与事件B同时发生$\}$，图1.3中阴影部分为A与B的积事件．

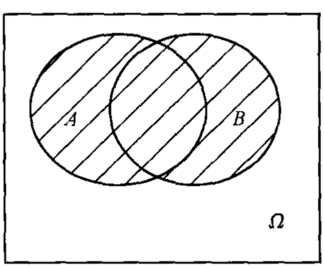

图1.2

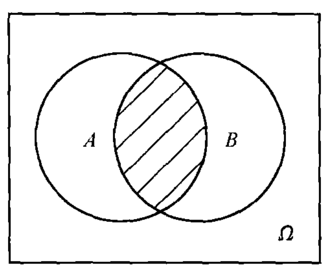

图1.3

例1.2.1　在抛一颗骰子试验里，事件$A=$“出现奇数点”$=\{1,3,5\}$，事件

B="出现点数不超过 3"$=\{1,2,3\}$. 则 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$. 可见,事件 A 与 B 中重复元素只须记入和事件一次.

$A\cap B=\{1,3\}$. 可见,若积事件 AB 发生,则事件 A 与 B 必同时发生,反之亦然.

设 A 为 Ω 中的任一事件,则 $A\cup A=A$, $A\cup\Omega=\Omega$, $A\cup\varnothing=A$, $A\cap A=A$, $A\cap\Omega=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$.

事件的和与积的定义可以推广到 n 个($n\geqslant3$)或无穷多个事件的情形.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为 Ω 中的一列事件,则

$\{$事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 至少有一个发生$\}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,

$\{$事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生$\}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,

$\{$事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生$\}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,

$\{$事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生$\}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

三、差事件

"事件 A 发生而 B 不发生"也是一随机事件,称为 A 与 B 的差事件,记作 $A-B$(如图 1.4 所示). 如例 1.2.1 中,$A-B=\{5\}$, $B-A=\{2\}$. 显然对于任一事件 A 有:$A-A=\varnothing$, $A-\varnothing=A$, $A-\Omega=\varnothing$.

四、不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,则称 A 和 B 为互不相容事件,即 $AB=\varnothing$(如图 1.5 所示). 例如,掷一颗骰子,$A=\{$出现 1 点$\}$, $B=\{$出现 3 点$\}$,则 A 与 B 互不相容.

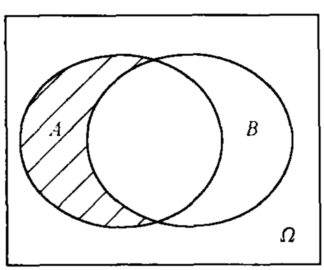

图 1.4

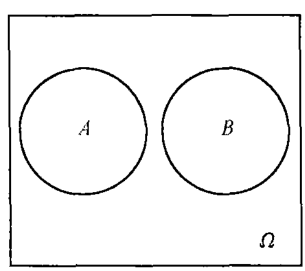

图 1.5

一般地,如果在 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中,任意两个事件互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容.

五、对立事件(互逆事件)

若事件 A 与 B 必定发生一个,但又不能同时发生,即 $A+B=\Omega$, $AB=\varnothing$,则

称 A、B 互为对立事件，记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$（如图 1.6 所示）.

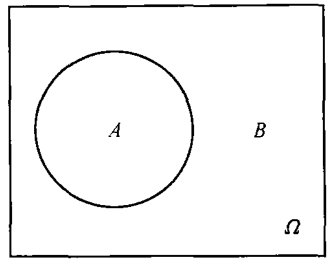

图 1.6

例如，掷一枚硬币，{出现正面}和{出现反面}为对立事件. 掷一颗骰子时，{出现 1 点}和{出现两点}不是对立事件，只是互不相容事件.

在随机事件中，对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件不一定是对立事件.

例 1.2.2　设 A、B、C 为 Ω 中的三个事件，试用 A、B、C 的运算式子表示下列事件：

(1) 事件 A 与事件 B 发生但 C 不发生.

(2) 事件 A、B、C 中恰有两个发生.

(3) 事件 A、B、C 中不多于一个事件发生.

(4) 事件 A、B、C 中至少有两个事件发生

解　(1) $AB\overline{C}$.

(2) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$.

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$.

(4) $AB\cup AC\cup BC$.

在概率论中事件的关系与运算同集合论中集合的关系与运算是一致的. 我们将其列表如表 1.1 所示，以便对照：

表 1.1

符　号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点，基本事件	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集（补集）
$A\subset B$	事件 A 发生，则事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A、B 至少有一个发生	集合 A 与 B 的和集
$A\cap B$	事件 A、B 同时发生	集合 A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生，B 不发生	集合 A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 不相容	集合 A 与 B 无公共元素

随机事件的运算具有以下基本性质：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$.

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(AB)C=A(BC)$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

(3) 分配律 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$,

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) 对偶律(德·摩根公式)

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

对偶律可以推广到 n 个事件的情形,即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i.$$

例 1.2.3 化简下列各式:

(1) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$.

(2) $AB\cup\overline{A}B$.

解 (1) 原式$=(A+B)(B+C)=AB+B+AC+BC=B+AC$.

(2) 原式$=(A+\overline{A})B=B$.

第三节 事件的频率与概率的统计定义

我们知道随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生,但仅仅知道这点还不够,还必须知道这种可能性到底有多大,即概率有多大.所谓事件发生的概率就是它发生的可能性大小的度量.我们先介绍频率.

一、频率

定义 1.3.1 设在 n 次随机试验中,事件 A 发生了 n_A 次,则比值$\frac{n_A}{n}$叫事件 A 发生的频率,记作 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

比如,掷 10 次硬币,有 4 次出现正面,设 $A=\{$出现正面$\}$,则 $f_{10}(A)=\frac{4}{10}$.历史上曾有不少学者做过掷硬币试验,其结果如表 1.2 所示.

表 1.2

试验者	试验次数	出现正面次数 n_A	频率$\frac{n_A}{n}$
德·摩根	2 408	1 039	0.507 3
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

容易理解,事件 A 的频率反映了事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.频率大,事件 A 在一次试验中发生的可能性就大;频率小,可能性就小.

显然,在 n 次试验未做完之前我们不知道 $f_n(A)$等于多少,它是不能事先确定

的. 频率依赖于试验次数 n,不同的 n,事件 A 的频率就会不同,但当 n 很大时,由表 1.2 可知 $f_n(A)$比较稳定,$f_n(A)$稳定地“趋于”某个常数.

由频率的定义可知频率具有下列性质:

(1) 非负性　$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

(2) 规范性　$f_n(\Omega)=1$.

(3) 可加性　若 $AB=\varnothing$,则 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$.

证　(3) 因为 $AB=\varnothing$,所以 $n_{A\cup B}=n_A+n_B$

$$f_n(A+B)=\frac{n_{A\cup B}}{n}=\frac{n_A+n_B}{n}=f_n(A)+f_n(B).$$

二、概率的统计定义

由于频率具有稳定性,我们可以由频率定义概率.

定义 1.3.2(概率的统计定义)　当试验次数 n 增大时,事件 A 的频率 $f_n(A)$ 总是在某个常数 p 附近摆动,这个数 p 叫做事件发生的概率,记作 $P(A)=p$.

例如,表 1.2 中 $P(A)=0.5$,即掷硬币时出现正面的概率是 0.5.

这个定义称为概率的统计定义,由此定义确定的概率称为统计概率. 在许多实际问题中,我们无法把一个试验无限次地重复下去. 因此,要获得概率的精确值往往不易求得,这时当试验次数 n 很大时,就取频率$\frac{n_A}{n}$作为 $P(A)$的近似值.

根据频率的性质可知统计概率具有以下性质.

(1) 非负性　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

(2) 规范性　$P(\Omega)=1$

(3) 可加性　若 $AB=\varnothing$,则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

一般地,若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\quad\text{(有限可加性)}.$$

第四节　古典概型

在计算随机事件的概率时,最初是考虑最简单而又最特殊的一类随机试验. 这类随机试验,其基本事件的发生具有等可能性,什么叫等可能性呢?

比如,掷一枚均匀硬币,我们认为“出现正面”和“出现反面”的可能性是一样的. 掷一颗均匀的骰子,“出现 1 点”和“出现 2 点”的可能性也应该是一样的,基本事件的这种特性叫做等可能性.

定义 1.4.1　如果随机试验具有以下两个特点:

(1) 试验的基本事件(样本点)为有限个;

(2) 每个基本事件的发生具有等可能性.
则称这种随机试验为古典型试验,这种数学模型称为古典概型,也称为等可能概型.

对于古典概型,样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$,由于 $P(\Omega)=1$,所以 $P(\omega_i)=\frac{1}{n}$,$i=1,2,\cdots,n$

任意事件 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}\subset\Omega$,

$$P(A)=P(\omega_{i_1})+P\{\omega_{i_2}\}+\cdots+P\{\omega_{i_k}\}=\frac{k}{n}.$$

所以 $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\text{总的基本事件数}}$.由此得到古典概型中概率的定义.

定义 1.4.2(古典概率) 设 E 为一古典型随机试验,共有 n 个基本事件,而随机事件 A 包括其中的 k 个基本事件,则事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{k}{n}$.

古典概率有如下三条性质:

(1) 非负性 对任意事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

(2) 规范性 $P(\Omega)=1$

(3) 可加性 设 $A_1,\cdots,A_n$ 为两两不相容的 n 个事件,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),\quad \text{(有限可加性)}$$

该定义是由法国数学家拉普拉斯(Laplace)于 1812 年首先提出的.它只适应于古典概型,故现在通常称该定义为概率的古典定义.由古典定义计算出来的概率称为古典概率.

例 1.4.1 在一个盒子中装有 10 个完全相同的球,球上分别标有号码 1,2,…,10,从中任取一球,求取出的球的号码为偶数的概率.

解 设 $A=\{$取出的球的号码为偶数$\}$,则

$$\Omega=\{1,2,\cdots,10\},\quad A=\{2,4,\cdots,10\},$$

所以 $P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

在有些古典概型的问题中样本空间比较复杂,往往不易写出样本空间 Ω,此时必须弄清基本事件总数和事件 A 中的基本事件数.

例 1.4.2 在例 1.4.1 中考虑任取 3 球,求其中一个球的号码小于 5,一个等于 5,一个大于 5 的概率.

解 10 个球中任取 3 个共有 C_{10}^3 种取法,这 C_{10}^3 种可能的取法构成一个样本空间 Ω,设 $A=\{$一个球的号码小于 5,一个等于 5,一个大于 5$\}$,则 A 中的基本事件

数为 $C_4^1C_1^1C_5^1$.

所以 $P(A)=\dfrac{C_4^1C_1^1C_5^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$.

例 1.4.3　袋中有 a 只黑球，b 只白球，现把球一个一个地摸出(不放回). 求第 k 次摸出的球是黑球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

解法一　设 $A=\{$第 k 次摸出的球是黑球$\}$，将 $a+b$ 个球编号，把摸出的球依次排列在 $a+b$ 个位置上，共有 $(a+b)!$ 种排法，而第 k 个位置放黑球可以从 a 个黑球中任取一个，其余的 $a+b-1$ 个位置各放一球，因而排法数为 $a(a+b-1)!$.

所以 $P(A)=\dfrac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\dfrac{a}{a+b}$.

解法二　把 a 个黑球看作没有区别，b 个白球也看作没有区别. 将摸出的球放在 $a+b$ 个位置上总共有 C_{a+b}^a 种放法，第 k 个位置放黑球，剩下的 $a-1$ 个黑球和 b 个白球放在 $a+b-1$ 个位置上，共有 C_{a+b-1}^{a-1} 种放法.

所以 $P(A)=\dfrac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^a}=\dfrac{a}{a+b}$.

这个例子告诉我们对于同一个问题可以建立不同的样本空间. 解法一把 a 个黑球和 b 个白球看作是各不相同的，$a+b$ 个球的每一种排列都是 Ω 中的一个样本点，Ω 中共有 $(a+b)!$ 个样本点. 解法二中对同色的球不加区别，Ω 中只有 C_{a+b}^a 个样本点. 但一旦样本空间建立起来之后，在计算样本点总数和事件 A 中的样本点数时必须在同一样本空间进行，否则就会导致错误的结果. 概率论中的样本空间如同解析几何中的坐标系一样，当然我们在解题时必须使所建立的样本空间符合实际情况.

例 1.4.4　将 n 只球随机地放入 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中去，求至少有两个球在同一个盒子中的概率(设盒子的容量不限).

解　设 $A=\{$每个盒子中最多有一只球$\}$

$B=\{$至少有两只球在同一个盒子中$\}$

将 n 只球放入 N 个盒子中去，每一种放法是一基本事件，故共有 N^n 种不同的放法，而每个盒子中最多放一只球共有 P_N^n 种不同方法. 因而

$$P(A)=\frac{P_N^n}{N^n},\quad P(B)=1-P(A)=1-\frac{P_N^n}{N^n}$$

许多问题与本例有相同的数学模型. 如假设每人生日在一年 365 天中的任一天是等可能的. 那么，随机地抽取 $n(N=365)$ 个人，他们之中至少有 2 个人生日相同的概率为 $p=1-\dfrac{P_{365}^n}{365^n}$.

当 $n=64$ 时，$p=0.997$. 计算结果表明，在仅有 64 人的班次中，"至少有两人生日相同"这个事件的概率与 1 接近.

例 1.4.5　一批产品共有 N 件，其中不合格品有 M 件，从中任取 n 件，问恰好

有 m 件不合格品的概率是多少?

解 记 A_m=恰好有 m 件不合格品,$m=0,1,\cdots,M$.

N 件产品中抽取 n 件,所有可能的取法有 C_N^n 种,每一种取法为一基本事件. 在 M 件不合格品中取 m 件,共有 C_M^m 种取法,在 $N-M$ 件正品中取 $n-m$ 件正品,共有 C_{N-M}^{n-m} 种取法,由乘法原理可知事件 A_m 中的基本事件数为 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ 于是 $P(A_m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$,$m=0,1,2,\cdots,M$.

第五节 几何概型

古典概率的定义要求试验满足有限性与等可能性,这使得它在实际应用中受到了很大的限制. 例如,对于旋转均匀的陀螺试验:在一个均匀的陀螺圆周上均匀地刻上区间$[0,3)$内诸数字,旋转陀螺,当它停下时,其圆周上与桌面接触处的刻度位于某区间$[a,b)\subset[0,3)$内的概率有多大? 对于这样的试验,古典概率的定义就不适用,因为此试验的样本点不是有限的,而是区间$[0,3]$中的每个点,它有无穷多个. 为克服古典概率的局限性,人们又引入了所谓的几何概率.

先看一个例子.

例 1.5.1 向平面上一区域 Ω 内投一质点,设质点落在 Ω 内任何一点是等可能的,区域 $A\subset\Omega$,求质点落在区域 A 中的概率(如图 1.7 所示).

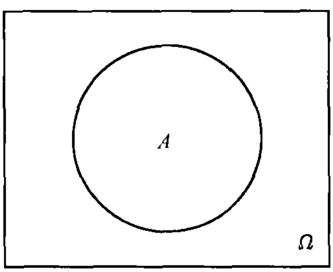

图 1.7

解 设 A={质点落在区域 A 中},因为质点可以落在 Ω 内的任何一点上,Ω 中的每个点都是一个基本事件,该试验共有无穷多个基本事件,所以这不属古典概型,概率的古典定义在这里不能用. 直观上看,如果 A 的面积越大,落在区域 A 的概率也就越大,因此,把$\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}$作为事件 A 的概率是比较合理的,即 $P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}$.

同样,向直线上某一线段 Ω 内投一质点,设质点落在 Ω 内每个点上都是等可能的,线段 $A\subset\Omega$,那么质点落在线段 A 内的概率应该定义为$\frac{A\text{ 的长度}}{\Omega\text{ 的长度}}$,即 $P(A)=\frac{A\text{ 的长度}}{\Omega\text{ 的长度}}$.

这种概型称为几何概型.

数学上把长度、面积、体积统称为测度,集合 A 的测度记作 $m(A)$,由此可得几何型概率的定义.

定义 1.5.1 设试验 E 的样本空间为某可测度的区域 Ω（一维、二维或三维等），且 Ω 中任一区域出现的可能性大小与该区域的测度成正比，而与该区域的位置与形状无关，则称 E 为几何概型的试验，且定义 E 的事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

此定义称为几何型概率的定义. 由此定义计算的概率称为几何概率.

例 1.5.2 甲、乙两人约定在 6 时到 7 时之间在某处会面，并约定先到者等候另一个人一刻钟，过时即离去，求两人能会到面的概率.

解 设 x、y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时刻，$A=\{$两人能会到面$\}$，则 $A=\{(x,y);|x-y|\leqslant 15\}$.

在平面上建立直角坐标系，如图 1.8 所示，$\Omega=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 60,0\leqslant y\leqslant 60\}$，而可能会到面的 (x,y) 由图中的阴影部分所表示，这是一个几何概率问题，由定义可知

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

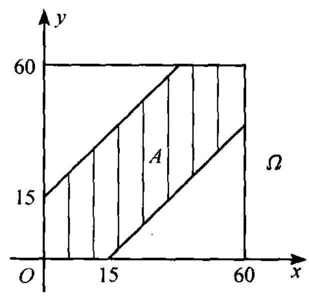

图 1.8

例 1.5.3 （Buffon 问题）平面上画有一些平行线，它们之间的距离都是 a，向此平面掷一枚长为 $l(l<a)$ 的针，求针与平行线相交的概率.

解 设 $A=\{$针与平行线相交$\}$，x 表示针的中心到最近一条平行线的距离，φ 表示针与平行线的夹角，x 和 φ 的大小就完全决定了针与平行线是否相交，易知 $0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，这两式确定 x-φ 平面上一矩形区域（如图 1.9 所示），针与平行线相交的充要条件是 $x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi$，满足这个关系的区域记为 A. 这也是一几何概率问题，所求的概率

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\frac{\pi}{2}a}=\frac{2l}{\pi a}.$$

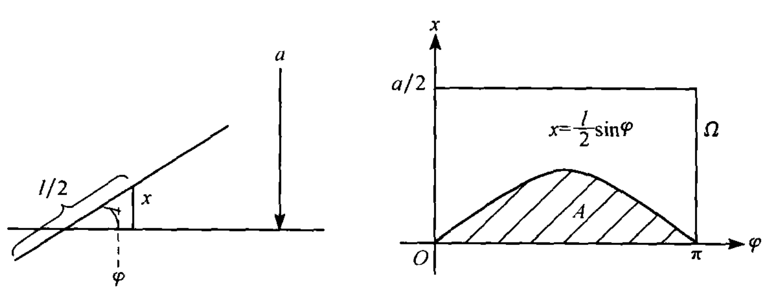

图 1.9

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com