普通高等教育"十一五"国家级规划教材

教育部国家级精品课程配套教材

Mathematics

大学数学应用教程

[少学时版]

DAXUE SHUXUE YINGYONG JIAOCHENG

仉志余 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

教育部国家级精品课程配套教材

大学数学应用教程

（少学时版）

仇志余　编　著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是教育部国家级精品课程配套教材，是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程数学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，深入总结多年来数学改革和国家级精品课程建设与研究的经验，并充分考虑到高职高专学制转换的要求而编写的。

全书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程等。

本书既适合高职高专或少学时本科专业使用，也适合同层次的成人教育以及工程技术人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学应用教程（少学时版）/仉志余编著. —北京：北京大学出版社，2009.9

（普通高等教育“十一五”国家级规划教材）

ISBN 978-7-301-05135-1

Ⅰ. 大… Ⅱ. 仉… Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 155877 号

书　　名：**大学数学应用教程（少学时版）**
著作责任者：仉志余　编著
责 任 编 辑：胡伟晔
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-05135-1/O・0791
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62765126　出版部 62754962
电 子 邮 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：三河市欣欣印刷有限公司
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787 毫米×980 毫米　16 开本　13.5 印张　292 千字
2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：24.00 元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究

举报电话：010-62752024；电子邮箱：fd@pup. pku. edu. cn

第二版前言

《大学数学应用教程》（上、下）第一版由北京大学出版社于2005年出版以来，深受高等院校同仁青睐，已6次重印，2008年又被教育部评为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。原教程适合于少学时本科和高职高专院校各专业使用。随着我国高等教育大众化过程的推进和高职高专教育教学改革的深入，高职高专学生的构成和人才培养目标要求已经发生了很大变化。为了及时适应变化了的实际，根据许多使用原教程教师的意见，编者认为很有必要按照进一步精简课程内容的方向将其修订为高职高专普通型和少学时型两种不同版本使用。这是少学时型的版本。

这一版本仅保留了一元微积分及其应用和常微分方程的内容，可供少学时的高职高专各专业、特别是文科类专业使用，也可供少学时的本科文科类（如法学、英语等）专业和艺术类专业使用。本次修订的指导思想是，在保证满足教学基本要求的基础上，大力改革课程内容体系，降低例题习题的难度和数量，以缓解理论教学时数不足的矛盾。本次修订仍然保持了第一版强调应用的特色，并且在减少理论突出应用上又作了进一步的努力。此外，突出了数学文化在大学生素质教育中的作用。数学文化素质是现代科学技术素质的重要组成部分，通过本课程的学习，必将对提高劳动者素质和生活质量产生不可替代的作用。

本次修订，山西省多所高职高专院校的多位教师做了大量工作，在此一并致谢！

仉志余

2009年6月7日

第一版前言

本书是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程数学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，深入总结多年来参与高职高专教学改革和国家级精品课程建设与研究的经验，并充分考虑到高职高专学制转换的要求而编写的。

自从 1993 年原国家教委在高等工程专科教育中实施专业教学改革试点工作以来，我校高分子材料加工专业被确定为第一批国家级试点专业。随之，我们对数学课程的改革按照“以应用为目的”、“以必需够用为度”的原则设计改革方案，将原属《高等数学》和《工程数学》的多门课程有机地构成了工科数学课群。1997 年我们又展开了由原中国兵器工业总公司批准立项的课题“高等工科数学课程体系、教学内容与教学模式的研究”的教改研究与实践工作。1998 年我校化工工艺专业被教育部批准为全国第四批产学结合的试点专业，我们又积极投入了高职高专教育数学课程教改实践。经过十年的不懈努力，我们取得了阶段性成果，形成了符合高职高专人才培养目标，特色明显的数学课程体系、教学内容和教学模式，2002 年获得了省级教学成果一等奖。其中“线性代数”课程于 2003 年被教育部确定为首届国家级精品课程之一。

根据高职高专教育人才培养目标及规格的要求，我们认为，高职高专教育必须既“性”高，又“性”职，而数学课程是满足这一要求的必修课之一。因此定名为《大学数学应用教程》的这套教材，力图充分体现以下特色。

（1）精选内容，构架新的课程体系，使受教育者学会运用数学方法与工具分析问题、解决问题，达到“性”高的人才培养目标。同时，又要考虑到“性”职和以“必需够用”为度，因而必须对数学的“系统性”和“严密性”赋予新的认识。本书中对数学结论的严密性和论证的简明化处理就是一种较好的处理方法。例如，极限方法可以跳出“$\varepsilon-\delta$”语言体系，微分学中值定理可以用几何方法证明等。

（2）新的课程体系充分体现“以应用为目的”的要求。众所周知，数学的产生和发展就是从实践中来再到实践中去的，我们理应取其精髓，还其本来面目，使受教育者明其应用背景，知其应用方法。因此本书的目的就是使学生学会如何应用数学方法解决实际问题。于是，本书大量的篇幅是数学应用，而不是公式的推导或定理的证明。

（3）在第二篇一元微积分的应用部分，本书选择典型问题介绍了数学建模方法，这是数学应用的重要方法之一。而第四篇线性代数构建的体系就是按照建立数学模型—寻找解模工具—解模答问这条主线进行的。

（4）考虑到文科学生的需要，本书特意在第二篇中引入了数学在经济学中的应用问题。当

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

然理工科学生了解一些数学在经济学中的应用基础也是很有必要的。

（5）考虑到高职高专教育学制和学生基础实际情况，本书在内容安排上尽力做到重点突出，难点分散；在问题的阐述上，尽力做到开门见山、简明扼要、循序渐进和深入浅出；并注重几何解释、抽象概括与逻辑推理有机结合，以培养学生数学应用的意识、兴趣和综合能力。

本书既适合高等专科和高等职业技术教育院校或少学时本科专业使用，也适合同层次的成人教育以及工程技术人员使用。为了便于教师更好地使用本教材，我们充分考虑到高等教育大众化对教学设计多样性和学生发展个性化的要求，并根据多年的教学经验，提出如下几套教学方案，以供参考。

（1）对于数学要求较高的专业，可以安排 160～180 学时，分两个学期，全部讲完第一至第五篇；也可安排 150 学时左右，分两学期，在对带“*”的内容作适当取舍后，讲完第一至第五篇。

（2）对于只安排 120 学时左右的专业，可以完成第一篇、第二篇（其中第九章除外）和第三篇的讲授；或者可以选择第一篇，第二篇（其中第九章除外），第四篇的第一、二、三章，以及第五篇的第一、二、三章讲授。

（3）对于仅给 80 学时左右的专业，可以完成第一篇、第二篇（其中第八、第九章除外）和第四篇第一、二、三章的讲授。而第四篇完全可以放在其他各篇之前讲授。

本书的出版得到了山西省教育厅有关领导和高职高专人才培养委员会各领导及专家的大力支持和帮助。此外，十多年来，在实施教改过程中，也得到了校内外专家和同仁的大力支持，特别是精品课程组成员的积极参与等，在此一并致谢。

由于本人水平所限，书中不妥甚至错误之处在所难免，敬请各位同仁与读者批评指正。

编　者

2005 年 2 月

目　录

第一章　函　　数

函数是数学中最基本的概念，德国数学家拉格朗日（Lagrange）在逝世前两天曾平静地说："我此生没有什么遗憾，死亡并不可怕，它只不过是我要遇到的最后一个函数"．这位伟大的数学家，用函数来解释世间的一切事物，体现了一种可贵的函数思想：那就是通过某一事实的信息去推知另一事实．

日常生活中，我们可以将票价看做是观众所坐位置的函数；邮资是信件重量的函数；火箭的速度看做是其负载的函数；凡此种种．数学中，通常是根据某一数值去推知另一数值．如我们知道了正方形边长，便可以推知它的面积．面积可作为边长的函数．同理，圆的周长也可看做是圆半径的函数，太多太多的例子，就让我们在本章的学习中去认识和体会．

由于微积分学是从研究函数开始的，所以本章将重点对函数型态做出概括，包括函数概念、性质、常见的函数以及初等函数等．

第一节　函　　数

一、函数的概念

函数一词是由著名的德国数学家莱布尼茨（Leibniz）首先引入数学的，后经欧拉（Euler）等人不断修正，扩充逐步形成了一个较为完整的概念．

从本质上讲，函数是从一个数集到另一个数集的映射，即给定两个数集 A 和 B，若对于 A 中的每个元素 a，按照某一对应关系 f，在 B 中都有唯一确定的一个元素 b 与它对应，则称 f 为 A 上的一个函数．记作 f：$A \to B$．集合 A 称为函数的定义域，与集合 A 中元素 a 对应的 B 中的元素 b 构成的集合称为函数的值域．由于微积分中通常以定义域和值域均为实数集的函数（这类函数称为实变数的实值函数，简称为实函数）为研究对象，因此我们给出如下定义．

1．函数定义

设 X 是一个给定的数集 $X \subset R$，f 是一个确定的对应关系，如果对于 X 中的每一个数 x，通过 f 都有 R 内的唯一确定的一个数 y 与之对应，那么这个对应关系 f 称为从 X 到 R 的函数关系，简称为**函数**．记作 f：$X \to R$ 或 $y = f(x)$．

我们把 X 称为**函数的定义域**，把按照函数关系 f 与 $x \in X$ 所对应的 $y \in R$，称为 f 在 x 点处的函数值，所有函数值的集合称为**函数的值域**．记作：$y = \{f(x) \mid x \in X\}$，称 x 为**自变量**，称 y 为**因变量**．

例 1 有一种雪树蟋蟀的昆虫，在同一温度下，所有这种昆虫鸣声的频率是相同的，这就意味着蟋蟀的鸣声频率是温度的函数．据科学家的测定，鸣声频率 C（每分钟的鸣叫次数）与温度 t（℃）存在如下函数关系：$C=7t-35$．绘制图形如图 1-1 所示．

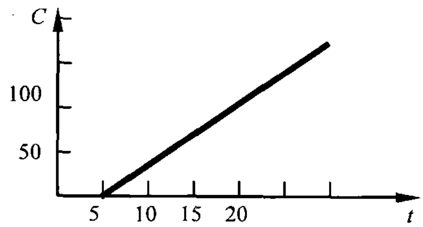


图 1-1

注意 构成函数的要素是定义域 X 和对应法则 f，如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数就是相同的函数．

函数通常可用英文字母 f、g 等表示，在同一问题中，讨论几个不同函数，需用不同的记号表示它们．

2. *函数的表示法*

函数的表示法有表格法、图像法、公式法（解析法）．

例 1 中，$C=7t-35$ 就是函数解析法的一种表示方法．

下面的表 1-1 反映了1990 年夏天，美国南部亚利桑那州菲尼克斯城 6 月 19 日—29 日每天的最高气温．

表 1-1 菲尼克斯城 1990 年 6 月气温

日期（1990 年 6 月）	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
气温（℃）	43	45	46	45	45	45	49	50	48	48	42

图 1-2 反映的是一位患者的心电图（EKG），它显示了这位患者的心率模式．构造心电图函数模式很不容易，也不便于直观分析．但从图像上看这些重复图形远比公式上看容易得多（而这些重复出现的图形正是医生需要捕捉的信息）．

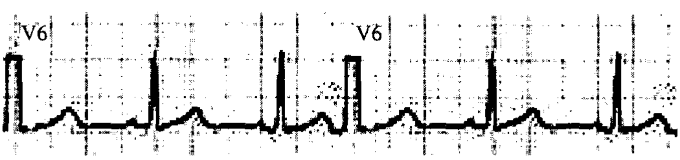


图 1-2

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

公式法的特点是便于计算和分析研究，所以用得最多，表格法易于求函数值，而图像法能直观清晰地反映函数的变化状况及某些特性．今后我们研究函数，图像法与公式法要结合使用，这样便于分析函数的性质及变化规律，这是数形结合的思想所在．

3．定义域的求法

例 2　我们知道，圆的面积 S 是半径 r 的函数：$S=\pi r^2$，其中定义域 $X=\{r\,|\,0\leqslant r<+\infty\}$ 就是这一函数的定义域．如果单就解析式 $S=\pi r^2$ 来说，本函数的定义域为 $X=\{r\,|-\infty<r<+\infty\}$．

一般地，当 $f(x)$ 用 x 的表达式给出时，如果不特别声明，那么函数的定义域就是使 $f(x)$ 有意义的全体 x 的集合．通常称这样所确定的定义域为**自然定义域**．

例 2 中 $X=\{r\,|\,0\leqslant r<+\infty\}$ 是**实际定义域**；$X=\{r\,|-\infty<r<+\infty\}$ 是自然定义域．

例 3　重力作用下的自由落体运动公式 $S=\dfrac{1}{2}gt^2$，其实际定义域为 $X=\{t\,|\,0\leqslant t\leqslant\sqrt{\dfrac{2S_0}{g}}\}$，其中 S_0 是 $t=0$ 时刻落体距地面的高度．而自然定义域为 $X=\{t\,|-\infty<t<+\infty\}$．

例 4　求函数的定义域

（1）$f(x)=\sqrt{16-x^2}+\dfrac{1}{x-3}$

（2）$\varphi(x)=\ln(3x-2)+\arccos x$

解　（1）要使 $\sqrt{16-x^2}$ 与 $\dfrac{1}{x-3}$ 同时有意义，应满足 $16-x^2\geqslant 0$ 且 $x-3\neq 0$，即 $|x|\leqslant 4$，且 $x\neq 3$，故定义域为 $\{x\,|-4\leqslant x<3\}\cup\{x\,|\,3<x\leqslant 4\}$．

（2）要使 $\ln(3x-2)$ 与 $\arccos x$ 同时有意义，应满足 $3x-2>0$，且 $-1\leqslant x\leqslant 1$，即 $x>\dfrac{2}{3}$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 1$．故定义域为 $\{x\,|\,\dfrac{2}{3}<x\leqslant 1\}$．

例 5　已知 $y=f(x)=x^3$，分别求 $f(-1)$，$f(1)$，$f(\dfrac{1}{x})$ 和 $f(x+1)$．

解

$$f(-1)=(-1)^3=-1\text{；}\quad f(1)=1^3=1$$

$$f(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^3\text{；}\quad f(x+1)=(x+1)^3.$$

例 6　已知 $f(x+1)=\dfrac{x^2+2x}{1-x}$．求：（1）$f(x)$ 的表达式；（2）$f(x)$ 的定义域；（3）$f[f(x)]$．

分析　因函数 $f(x+1)=\dfrac{x^2+2x}{1-x}$ 以 $(x+1)$ 作为自变量时，对应的表达式为 $\dfrac{x^2+2x}{1-x}$，将此式化为关于 $(x+1)$ 的表达式为

$$\frac{x^2+2x}{1-x}=\frac{(x+1)^2-1}{1-(x+1)+1}=\frac{(x+1)^2-1}{2-(x+1)}.\ \text{即}\ f(x+1)=\frac{(x+1)^2-1}{2-(x+1)}.$$

故若令 $\mu = x+1$，则函数变为 $f(\mu)=\dfrac{\mu^2-1}{2-\mu}$，这样便可写出 $f(x)$ 了.

解（1）因为 $f(x+1)=\dfrac{x^2+2x}{1-x}=\dfrac{(x+1)^2-1}{2-(x+1)}$，令 $\mu=x+1$，则 $f(\mu)=\dfrac{\mu^2-1}{2-\mu}$.

故
$$f(x)=\frac{x^2-1}{2-x}$$

（2）定义域为
$$X=\{x\mid x\neq 2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty).$$

（3）
$$f[f(x)]=\frac{[f(x)]^2-1}{2-f(x)}=\frac{\left(\dfrac{x^2-1}{2-x}\right)^2-1}{2-\dfrac{x^2-1}{2-x}}=\frac{x^4-3x^2+4x-3}{(x-2)(x^2+2x-5)}.$$

二、建立函数模型

为了解决实际问题，往往需要确定问题中的自变量与因变量以及相互之间的依赖关系（即函数关系），这个过程就称为**建立函数模型**，借助函数模型，可以对实际问题做出分析和预测.

例 4 要造一个底面为正方形，容积为 500m^3 的长方体无盖蓄水池，设水池四壁和底面每平方米造价均为 a 元，试将蓄水池的造价 y（单位：元）表示为底面边长 x（单位：m）的函数.

解 由题意知：长方体水池的高 $h=\dfrac{500}{x^2}$（m），

而长方体的表面积为
$$x^2+4xh$$

故造价
$$y=a(x^2+4xh)=ax^2+\frac{2000}{x}a\ （元）\quad（x\in(0,+\infty)）$$

例 5 一个快餐联营公司在某地区开设了 40 个营业点，每个营业点每天的平均营业额达 10 000 元，对在该地区是否开设新营业点的研究表明，每开设一个新营业点，会使每个营业点的平均营业额减少 200 元，求在该公司所有营业点的每日总收入和新开设营业点数目之间的函数关系.

解 设 x 表示新开的营业点的数目，R 表示该公司每日的总收入，则现有营业点数目为 $40+x$，而每个营业点的平均日收入为 $10\ 000-200x$. 故该公司每日总收入为
$$R=(10\ 000-200x)(40+x)\ （元），\quad x\in Z$$

例 6 设 1982 年底我国人口为 10.3 亿，如果不实行计划生育政策，按照平均每年 2% 的自然增长率计算，那么到 2000 年底，我国人口将是多少？

解 已知 1982 年底人口为 10.3 亿，则 t 年后人口为 y，且
$$y=10.3(1+2\%)^t$$

从 1982 到 2000 年经历了 18 年，故 2000 年的人口数为
$$y=10.3\times(1+2\%)^{18}$$

两边取对数求解得　　$\lg y = \lg 10.3 + 18\lg 1.02$.

查反对数表，得　　$y = 14.71$（亿）.

习题 1-1

思考题

举出几个在你身边的符合函数概念的日常生活中的现象.

习作题

1．分析下列函数是否是相同的函数

（1）$y = x$ 与 $y = \dfrac{x^2}{x}$；　　（2）$y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$.

2．求下列函数的定义域

（1）$y = \dfrac{1}{\lg(2x-1)}$；　　（2）$y = \sqrt{x^2 - 2}$；　　（3）$\sqrt{\ln(3x-2)}$.

3．已知 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & |x| \leqslant 1 \\ x+1 & 1 \leqslant |x| \leqslant 2 \end{cases}$. 求 $f(\frac{1}{2})$，$f(\frac{3}{2})$.

4．设 $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$，求 $f(f(x))$.

第二节　函数的性质

为了了解函数的特性，以便掌握某些函数的变化规律，我们从以下几方面讨论函数的性质.

一、奇偶性

定义　设函数 $y = f(x)$ 的定义域 X 是一个关于原点 O 对称的数集（即对任意的 $x \in X$ 有 $-x \in X$），若对任意的 $x \in X$，有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若对任意的 $x \in X$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

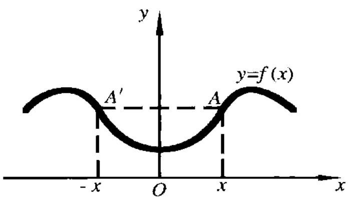
例 1　对于 $y = x^3$，其定义域 $X = (-\infty, +\infty)$ 为关于原点对称区间. 因 $f(-x) = -x^3 = -f(x)$，故 $y = x^3$ 为奇函数.

同理 $y = \sin x$，$y = \tan x$，$y = 3x^5$ 等都是奇函数.

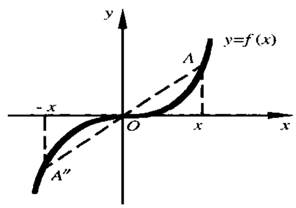
对于 $y=x^2$，其定义域 $X=(-\infty,+\infty)$ 为关于原点对称区间. 因 $f(-x)=(-x)^2=f(x)$，故 $y=x^2$ 为偶函数.

同理 $y=\cos x$，$y=|x|$，$y=x^2-2$ 等都是偶函数. 但有些函数（如 $y=x^2+3x$）却是一个非奇非偶函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称. 这是因为若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，所以如果 $A(x,f(x))$ 是图像上的点，则与它关于 y 轴对称的点 $A'(-x,f(x))$ 也在图像上，如图 1-3（a）所示. 奇函数的图像关于原点对称. 这是因为若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$. 所以如果 $A(x,f(x))$ 是图像上的点，则与它关于原点对称的点 $A''(-x,-f(x))$ 也在图像上，如图 1-3（b）所示.



（a）



（b）

图 1-3

二、单调性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X，区间 $I\subset X$，如果对于任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的；如果对于任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

单调增函数，其图形是随着 x 增加而上升的曲线；单调减函数，其图形是随着 x 增加而下降的曲线，如图 1-4 和图 1-5 所示.

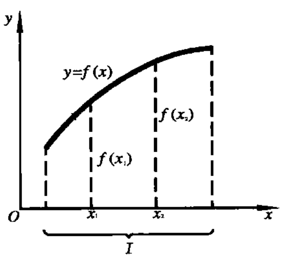


图 1-4

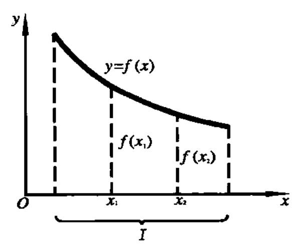


图 1-5

例如，$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的，在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的，而在 $(-\infty,+\infty)$ 上不

是单调函数.

例 1 考察 $y=x^2-3x+2$ 的单调性.

解 $y=x^2-3x+2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，它是以 $(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4})$ 为顶点，开口向上的抛物线（如图 1-6 所示）. 故在 $(-\infty,\dfrac{3}{2})$ 上是单调减少的，在 $(\dfrac{3}{2},+\infty)$ 上是单调增加的.

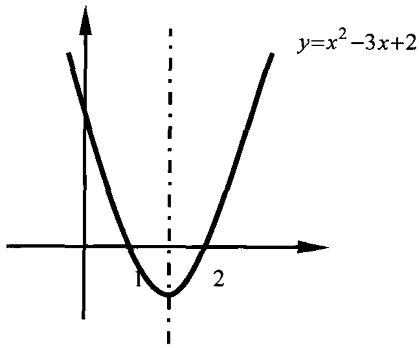


图 1-6

三、有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X，数集 $D\subset X$，若存在一个正数 M 对于所有的点 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上是**有界**的；如果这样的正数 M 不存在，就称 $f(x)$ 在 D 上是**无界**的.

例如，$y=\sin x$ 在 R 上有界，因为存在正数 $M\geqslant 1$，使 $|\sin x|\leqslant M$；$y=\arctan x$ 在 R 上有界.

四、周期性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X，如果存在正数 T 有 $x\pm T\in X$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. T 通常称为 $f(x)$ 的**周期**.

由定义可知，kT $(k\in N)$ 都是 $y=f(x)$ 的周期，可见一个周期函数有无穷多个周期，若在无穷多个周期中，存在最小的正数 T_0，则称 T_0 为 $f(x)$ 的**最小周期**，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$，$y=\sin \pi x$ 都是周期函数，它们的周期分别为 2π、π 和 2. 但 $y=\sin x^2$ 与 $y=\sin x^2+\sin \pi x$ 就不是周期函数.

周期函数的图像特征是，在每个长度为 T 的区间上，函数图像的形状完全相同.

习题 1-2

思考题

周期函数的定义域可能是有界集吗？

习作题

1．判断下列函数的奇偶性

（1） $y=\lg(x^2+1)$；　　（2） $y=x^2\sin x$．

2．指出下列函数在指定区间内的单调性

（1） $y=\sin 2x \quad x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$；　　（2） $y=|x+1|$ （$-5\leqslant x\leqslant -1$）．

3．指出下列函数哪些是周期函数，并求出其周期

（1） $y=\tan 2x$；　　（2） $y=\sin x+\cos x$．

第三节　反函数与复合函数

一、反函数

反函数是逆映射的特例．设函数 $f:A\to B$ 是单射，则存在逆映射 $f^{-1}:B\to A$，此时称 f^{-1} 为 f 的反函数．详细定义如下．

定义　给定函数 $y=f(x)$（$x\in X, y\in Y$），若对于 Y 中的每一个值 y，在 X 中都有唯一的 $x\in X$ 与 y 对应，即，使 $f(x)=y$，则说在 Y 上确定了 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$（$y\in Y$），即 $f^{-1}:y\to x$．又称函数 $y=f(x)$ 为**直接函数**．

习惯上，用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以，把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$ 记作 $y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$，从而 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是 $y=f(x)$ 的值域，值域是 $y=f(x)$ 的定义域，且在同一个坐标平面内，反函数 $y=\varphi(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称（如图 1-7 所示）．而 $x=\varphi(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图像是同一条曲线．

例 1　$y=f(x)=2x+1$ 是定义在 R 上的单调函数，即是单射，于是其反函数必定存在．由 $y=2x+1$ 可得 $x=\dfrac{y-1}{2}$，对调其中的 x，y，得其反函数为

$$y=\frac{x-1}{2}\quad（x\in R）$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com