

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写 适合各种版本教材



一本全[®]

九年级

初中数学

培优

主编 金英兰

延边大学出版社
YANBIAN UNIVERSITY PUBLISHING HOUSE

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写 适合各种版本教材



一本全[®]

初中数学 培优

本册主编：张艳萍 何莲清
编委：孙艳丽 郭爱敏
曲伟杰 纪威
孟辉

九年级

延边大学出版社
YANBIAN UNIVERSITY PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

初中数学培优·九年级/金英兰主编. —延吉:延边大学出版社,2009.6
ISBN 978-7-5634-2745-1

I. 初… II. 金… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 042807 号

初中数学培优·九年级

主编:金英兰

责任编辑:秀 豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路 977 号 邮编:133002

网址:<http://www.ydcbs.com>

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2732435

传真:0433-2732434

发行部电话:0433-2133001

传真:0433-2733266

印刷:北京中创彩色印刷有限公司

开本:787×1092 1/16

印张:30.5 字数:356千字

印数:1—13000

版次:2009年7月第1版

印次:2009年7月第1次印刷

ISBN 978-7-5634-2745-1

定价:31.00元



前言 Foreword

在数学这门学科中,知识的各个部分是有关联的,但各知识点又都有自己的特征。因此,在学习过程中,数学各专题知识独特的规律就需要学生们细心把握。

正因为如此,我们聘请多年在一线教学工作岗位的特高级教师,根据教育部颁布的新课标和新大纲的要求,编写了本书《初中数学培优·九年级》,目的是让学生们在学习本数学专题时对这部分知识内容有深刻的理解和掌握。

为使广大读者更方便地使用本书,本书按从易到难的梯度编写,这样,对本专题知识没有吃透的学生就可以迅速掌握本专题的知识;中等水平的学生在精读本书提高篇后会使自己更上一层楼;优秀的学生可以通过竞赛入门篇的训练使自己处在更高的水平。

本书精选的大量不同难度的习题能让不同层次的学生有的放矢,并体验到学习的乐趣。

本书由如下版块构成:

一、知识归纳

将数学的知识和规律进行总结和归纳,将其主要规律呈示出来,使学生们在学习中能最短的时间内有效掌握本书的内容。

二、基础篇

各章节分为例题和训练部分。这部分内容主要使学生通过基础篇的训练尽快地掌握各章节的基本内容,对基本内容和概念加深理解并熟练掌握。

三、提高篇

各章节分为例题和训练部分。提高篇具有一定的难度。通过提高篇的训练,不仅能更熟练地掌握各章节的基本内容,而且能对与各章节相关联的内容有一定的理解和掌握。

四、竞赛入门篇

各章节分为例题和训练部分。竞赛入门篇的题具有相当难度,但这些题都是在各章节的基础知识之上进行变型和延伸的,因此,这些题是各章节内容的总结与拓展。同学们通过竞赛入门篇的训练,不仅能够对各章节的内容有明晰的认识,也能够对各



知识点的认识有显著升华。

五、参考答案

全书给出了参考答案,有一定难度的题还给出了解题思路和步骤。

充分阅读本书,通过这种阶梯式的训练,任何学生都能迅速有效地掌握各章节的内容,从而达到有效并熟练地掌握知识的目的。

本书可供学生超前学习时使用,也可供教师在教学和组织学生参赛时作为辅导材料。



目 录 Contents

第一章 二次根式	1
1.1 二次根式	1
参考答案	6
1.2 二次根式的运算	7
1.2.1 二次根式的乘法	7
参考答案	14
1.2.2 二次根式的除法	16
参考答案	25
1.3 二次根式的加减法	28
参考答案	33
1.4 二次根式的混合运算	34
参考答案	39
1.5 $\sqrt{a^2} = a $ 的应用	40
参考答案	46
1.6 实数的大小比较	48
参考答案	56
第二章 一元二次方程	61
2.1 一元二次方程	61
参考答案	65
2.2 一元二次方程的解法	66
2.2.1 配方法	66
参考答案	71
2.2.2 降次法	73
参考答案	78
2.2.3 公式法	79
参考答案	85
2.3 实际问题与一元二次方程	86
参考答案	94
2.4 一元二次方程根的判别式	98
参考答案	104





2.5 一元二次方程根与系数的关系	108
参考答案	119
第三章 二次函数	124
3.1 二次函数	124
参考答案	126
3.2 二次函数 $y = ax^2$ 的图象与性质	126
参考答案	134
3.3 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与性质	137
参考答案	146
3.4 二次函数的关系式	149
参考答案	159
3.5 实际问题与二次函数	165
参考答案	174
3.6 二次函数与一元二次方程	177
参考答案	184
本章测试题	187
参考答案	190
第四章 概率初步	192
4.1 可能性与概率	192
参考答案	198
4.2 用列举法求概率	198
参考答案	205
4.3 利用频率估计概率	206
参考答案	209
第五章 竞赛入门专项训练	210
5.1 数与式	210
参考答案	214
5.2 方程	220
参考答案	222
5.3 函数	226
参考答案	228
5.4 杂题	232
参考答案	235
第六章 旋 转	240
6.1 图形的旋转	240
参考答案	256
6.2 中心对称	259
参考答案	267



第七章 圆	270
7.1 圆	270
7.1.1 圆	270
参考答案	274
7.1.2 垂径定理	275
参考答案	280
7.1.3 圆心角、弧、弦、弦心距的关系	281
参考答案	288
7.1.4 圆周角	289
参考答案	298
7.1.5 圆内接四边形	299
参考答案	306
7.2 直线与圆的位置关系	307
7.2.1 直线与圆的位置关系	307
参考答案	310
7.2.2 切线的判定和性质	310
参考答案	313
7.2.3 三角形的内切圆	313
参考答案	316
7.2.4 切线长定理	316
参考答案	318
7.2.5 弦切角	318
参考答案	321
7.2.6 和圆有关的比例线段	322
参考答案	326
7.3 圆和圆的位置关系	327
7.3.1 圆与圆的位置关系	327
参考答案	334
7.3.2 两圆的公切线	334
参考答案	341
7.4 正多边形	342
7.4.1 正多边形与圆	342
参考答案	346
7.4.2 正多边形的有关计算	346
参考答案	349
7.5 弧长及扇形面积	350
参考答案	358
第八章 相似	360
8.1 比例线段	360



参考答案	366
8.2 平行线分线段成比例	367
参考答案	376
8.3 相似形	377
参考答案	382
8.4 三角形相似的判定	383
参考答案	389
8.5 相似三角形的性质	391
参考答案	401
8.6 图形的放大与缩小	403
参考答案	405
第九章 锐角三角函数	406
9.1 锐角三角函数	406
参考答案	413
9.2 解直角三角形	416
参考答案	423
9.3 锐角三角函数与测量	426
参考答案	435
9.4 三角函数与方位角	439
参考答案	445
本章测试题	448
参考答案	450
第十章 竞赛入门专项训练	452
10.1 全等变换	452
参考答案	455
10.2 相似变换与等积变换	460
参考答案	465
10.3 圆	473
参考答案	476
10.4 圆与相似	481
参考答案	485
10.5 圆与三角函数	489
参考答案	493
10.6 圆与面积	497
参考答案	501
10.7 圆与长度	505
参考答案	509
10.8 圆与代数	513
参考答案	517
10.9 圆与几何	521
参考答案	525
10.10 圆与综合	529
参考答案	533
10.11 圆与竞赛	537
参考答案	541
10.12 圆与证明	545
参考答案	549
10.13 圆与计算	553
参考答案	557
10.14 圆与构造	561
参考答案	565
10.15 圆与模型	569
参考答案	573
10.16 圆与拓展	577
参考答案	581
10.17 圆与探究	585
参考答案	589
10.18 圆与竞赛	593
参考答案	597
10.19 圆与证明	601
参考答案	605
10.20 圆与计算	609
参考答案	613
10.21 圆与构造	617
参考答案	621
10.22 圆与模型	625
参考答案	629
10.23 圆与拓展	633
参考答案	637
10.24 圆与探究	641
参考答案	645
10.25 圆与竞赛	649
参考答案	653
10.26 圆与证明	657
参考答案	661
10.27 圆与计算	665
参考答案	669
10.28 圆与构造	673
参考答案	677
10.29 圆与模型	681
参考答案	685
10.30 圆与拓展	689
参考答案	693
10.31 圆与探究	697
参考答案	701
10.32 圆与竞赛	705
参考答案	709
10.33 圆与证明	713
参考答案	717
10.34 圆与计算	721
参考答案	725
10.35 圆与构造	729
参考答案	733
10.36 圆与模型	737
参考答案	741
10.37 圆与拓展	745
参考答案	749
10.38 圆与探究	753
参考答案	757
10.39 圆与竞赛	761
参考答案	765
10.40 圆与证明	769
参考答案	773
10.41 圆与计算	777
参考答案	781
10.42 圆与构造	785
参考答案	789
10.43 圆与模型	793
参考答案	797
10.44 圆与拓展	801
参考答案	805
10.45 圆与探究	809
参考答案	813
10.46 圆与竞赛	817
参考答案	821
10.47 圆与证明	825
参考答案	829
10.48 圆与计算	833
参考答案	837
10.49 圆与构造	841
参考答案	845
10.50 圆与模型	849
参考答案	853
10.51 圆与拓展	857
参考答案	861
10.52 圆与探究	865
参考答案	869
10.53 圆与竞赛	873
参考答案	877
10.54 圆与证明	881
参考答案	885
10.55 圆与计算	889
参考答案	893
10.56 圆与构造	897
参考答案	901
10.57 圆与模型	905
参考答案	909
10.58 圆与拓展	913
参考答案	917
10.59 圆与探究	921
参考答案	925
10.60 圆与竞赛	929
参考答案	933
10.61 圆与证明	937
参考答案	941
10.62 圆与计算	945
参考答案	949
10.63 圆与构造	953
参考答案	957
10.64 圆与模型	961
参考答案	965
10.65 圆与拓展	969
参考答案	973
10.66 圆与探究	977
参考答案	981
10.67 圆与竞赛	985
参考答案	989
10.68 圆与证明	993
参考答案	997
10.69 圆与计算	1001
参考答案	1005
10.70 圆与构造	1009
参考答案	1013
10.71 圆与模型	1017
参考答案	1021
10.72 圆与拓展	1025
参考答案	1029
10.73 圆与探究	1033
参考答案	1037
10.74 圆与竞赛	1041
参考答案	1045
10.75 圆与证明	1049
参考答案	1053
10.76 圆与计算	1057
参考答案	1061
10.77 圆与构造	1065
参考答案	1069
10.78 圆与模型	1073
参考答案	1077
10.79 圆与拓展	1081
参考答案	1085
10.80 圆与探究	1089
参考答案	1093
10.81 圆与竞赛	1097
参考答案	1101
10.82 圆与证明	1105
参考答案	1109
10.83 圆与计算	1113
参考答案	1117
10.84 圆与构造	1121
参考答案	1125
10.85 圆与模型	1129
参考答案	1133
10.86 圆与拓展	1137
参考答案	1141
10.87 圆与探究	1145
参考答案	1149
10.88 圆与竞赛	1153
参考答案	1157
10.89 圆与证明	1161
参考答案	1165
10.90 圆与计算	1169
参考答案	1173
10.91 圆与构造	1177
参考答案	1181
10.92 圆与模型	1185
参考答案	1189
10.93 圆与拓展	1193
参考答案	1197
10.94 圆与探究	1201
参考答案	1205
10.95 圆与竞赛	1209
参考答案	1213
10.96 圆与证明	1217
参考答案	1221
10.97 圆与计算	1225
参考答案	1229
10.98 圆与构造	1233
参考答案	1237
10.99 圆与模型	1241
参考答案	1245
10.100 圆与拓展	1249
参考答案	1253
10.101 圆与探究	1257
参考答案	1261
10.102 圆与竞赛	1265
参考答案	1269
10.103 圆与证明	1273
参考答案	1277
10.104 圆与计算	1281
参考答案	1285
10.105 圆与构造	1289
参考答案	1293
10.106 圆与模型	1297
参考答案	1301
10.107 圆与拓展	1305
参考答案	1309
10.108 圆与探究	1313
参考答案	1317
10.109 圆与竞赛	1321
参考答案	1325
10.110 圆与证明	1329
参考答案	1333
10.111 圆与计算	1337
参考答案	1341
10.112 圆与构造	1345
参考答案	1349
10.113 圆与模型	1353
参考答案	1357
10.114 圆与拓展	1361
参考答案	1365
10.115 圆与探究	1369
参考答案	1373
10.116 圆与竞赛	1377
参考答案	1381
10.117 圆与证明	1385
参考答案	1389
10.118 圆与计算	1393
参考答案	1397
10.119 圆与构造	1401
参考答案	1405
10.120 圆与模型	1409
参考答案	1413
10.121 圆与拓展	1417
参考答案	1421
10.122 圆与探究	1425
参考答案	1429
10.123 圆与竞赛	1433
参考答案	1437
10.124 圆与证明	1441
参考答案	1445
10.125 圆与计算	1449
参考答案	1453
10.126 圆与构造	1457
参考答案	1461
10.127 圆与模型	1465
参考答案	1469
10.128 圆与拓展	1473
参考答案	1477
10.129 圆与探究	1481
参考答案	1485
10.130 圆与竞赛	1489
参考答案	1493
10.131 圆与证明	1497
参考答案	1501
10.132 圆与计算	1505
参考答案	1509
10.133 圆与构造	1513
参考答案	1517
10.134 圆与模型	1521
参考答案	1525
10.135 圆与拓展	1529
参考答案	1533
10.136 圆与探究	1537
参考答案	1541
10.137 圆与竞赛	1545
参考答案	1549
10.138 圆与证明	1553
参考答案	1557
10.139 圆与计算	1561
参考答案	1565
10.140 圆与构造	1569
参考答案	1573
10.141 圆与模型	1577
参考答案	1581
10.142 圆与拓展	1585
参考答案	1589
10.143 圆与探究	1593
参考答案	1597
10.144 圆与竞赛	1601
参考答案	1605
10.145 圆与证明	1609
参考答案	1613
10.146 圆与计算	1617
参考答案	1621
10.147 圆与构造	1625
参考答案	1629
10.148 圆与模型	1633
参考答案	1637
10.149 圆与拓展	1641
参考答案	1645
10.150 圆与探究	1649
参考答案	1653
10.151 圆与竞赛	1657
参考答案	1661
10.152 圆与证明	1665
参考答案	1669
10.153 圆与计算	1673
参考答案	1677
10.154 圆与构造	1681
参考答案	1685
10.155 圆与模型	1689
参考答案	1693
10.156 圆与拓展	1697
参考答案	1701
10.157 圆与探究	1705
参考答案	1709
10.158 圆与竞赛	1713
参考答案	1717
10.159 圆与证明	1721
参考答案	1725
10.160 圆与计算	1729
参考答案	1733
10.161 圆与构造	1737
参考答案	1741
10.162 圆与模型	1745
参考答案	1749
10.163 圆与拓展	1753
参考答案	1757
10.164 圆与探究	1761
参考答案	1765
10.165 圆与竞赛	1769
参考答案	1773
10.166 圆与证明	1777
参考答案	1781
10.167 圆与计算	1785
参考答案	1789
10.168 圆与构造	1793
参考答案	1797
10.169 圆与模型	1801
参考答案	1805
10.170 圆与拓展	1809
参考答案	1813
10.171 圆与探究	1817
参考答案	1821
10.172 圆与竞赛	1825
参考答案	1829
10.173 圆与证明	1833
参考答案	1837
10.174 圆与计算	1841
参考答案	1845
10.175 圆与构造	1849
参考答案	1853
10.176 圆与模型	1857
参考答案	1861
10.177 圆与拓展	1865
参考答案	1869
10.178 圆与探究	1873
参考答案	1877
10.179 圆与竞赛	1881
参考答案	1885
10.180 圆与证明	1889
参考答案	1893
10.181 圆与计算	1897
参考答案	1901
10.182 圆与构造	1905
参考答案	1909
10.183 圆与模型	1913
参考答案	1917
10.184 圆与拓展	1921
参考答案	1925
10.185 圆与探究	1929
参考答案	1933
10.186 圆与竞赛	1937
参考答案	1941
10.187 圆与证明	1945
参考答案	1949
10.188 圆与计算	1953
参考答案	



第一章 二次根式

1.1 二次根式

一、知识归纳

1. 二次根式的概念

一般地,把形如 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 的式子叫做二次根式,“ $\sqrt{\quad}$ ”称为二次根号.

2. 二次根式有意义的条件

要使二次根式 \sqrt{a} 有意义,被开方数 a 必须是非负数,即 $a \geq 0$.由此,可确定被开方式中字母的取值范围.

3. 二次根式的意义运用

因为 \sqrt{a} 的意义是 a 的算术平方根,因此说, $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 是一个非负数,即 $\sqrt{a} \geq 0(a \geq 0)$.

4. 二次根式的基本性质

由于 \sqrt{a} 是 a 的算术平方根,所以 $(\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0)$.

同样的,可以得到 $a = (\sqrt{a})^2(a \geq 0)$,即可以运用这个公式把任意一个非负数或非负式子写成该数或该式子的二次根式的平方形式.

5. 几个非负性式子的比较

(1)任意实数 a 的绝对值 $|a| \geq 0(a$ 可代表代数式).

(2)任意实数 a 的平方 $a^2 \geq 0(a$ 可代表代数式).

(3)任意非负数 a 的算术平方根 $\sqrt{a} \geq 0(a \geq 0)(a$ 可代表非负代数式).

二、基础篇

例1 判断下列各式哪些是二次根式:

(1) $\sqrt{4}$ (2) $\sqrt{-3}$ (3) π (4) $\sqrt{x+2}(x$ 为有理数) (5) $\sqrt{a^2+1}$

(6) $\sqrt{-x}(x \leq 0)$ (7) $\sqrt{a-b}(a < b)$ (8) $\sqrt[3]{-4x}$

分析

判断一个式子是否为二次根式,主要看它是否具备以下两个特征:

(1)形式上识别:根指数必须是2.

(2)本质上鉴别:被开方数必须是非负数.

以上两个特征都满足,则为二次根式;若只满足其一,不满足其二或二者都不满足,皆不是二次根式.

解: $\sqrt[3]{-4x}$, π 的根指数不是2.





- ∴ $\sqrt[3]{-4x}$, π 不是二次根式.
- ∴ $\sqrt{-3}$, $\sqrt{a-b}$ ($a < b$) 的被开方数是负数, 实数范围内无意义.
- ∴ $\sqrt{-3}$, $\sqrt{a-b}$ ($a < b$) 不是二次根式.
- ∴ $\sqrt{x+2}$ 的被开方数 $x+2$, 在 x 为有理数时, 可正, 可负, 可为零, 因此无法确定 $x+2$ 是非负数.
- ∴ $\sqrt{x+2}$ 不确定为二次根式.
- ∴ $\sqrt{4}$, $\sqrt{a^2+1}$, $\sqrt{-x}$ ($x \leq 0$) 的根指数都是 2, 被开方数都是非负数, 所以它们是二次根式.
- ∴ $\sqrt{4}$, $\sqrt{a^2+1}$, $\sqrt{-x}$ ($x \leq 0$) 是二次根式.

例 2 求出下列各式在实数范围内有意义的 x 的取值范围.

(1) $\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ (2) $\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3-x}}$

分析

作为二次根式, 有意义的条件是被开方数是非负数, 作为分式, 有意义的条件是分母不为零, 所以本题需考虑①被开方数非负; ②分母不为零两个条件.

解: (1) 要使 $\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 有意义, 则有 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

所以当 $x \geq 1$ 且 $x \neq 2$ 时, $\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 在实数范围内有意义.

(2) 要使 $\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3-x}}$ 有意义, 则有 $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 3 \end{cases}$

所以当 $\frac{1}{2} \leq x < 3$ 时, $\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3-x}}$ 在实数范围内有意义.

例 3 化简 $|x+1| + \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$

分析

由二次根式有意义的条件: 被开方数非负, 确定 x 的取值范围 (或取值), 依据 x 的取值进行化简.

解: 根据题意, 得 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$ ∴ $x=1$

当 $x=1$ 时, $|x+1| + \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = |1+1| + \sqrt{1-1} + \sqrt{1-1} = |2| + \sqrt{0} + \sqrt{0} = 2$

例 4 已知 $|x+y-2| + \sqrt{2z+1} + (y+2)^2 = 0$

求 \sqrt{xyz} 的值.

分析

由绝对值的非负性, 算术平方根的非负性, 平方的非负性, ①列出方程组, ②解方程组求出 x, y, z 的取值, ③代入代数式进行计算.

解: ∵ $|x+y-2| \geq 0$, $\sqrt{2z+1} \geq 0$, $(y+2)^2 \geq 0$ 且 $|x+y-2| + \sqrt{2z+1} + (y+2)^2 = 0$

∴ $|x+y-2| = 0$, $\sqrt{2z+1} = 0$, $(y+2)^2 = 0$, ∴ $x+y-2=0$, $2z+1=0$, $y+2=0$



$$\therefore x=4, y=-2, z=-\frac{1}{2}$$

$$\text{当 } x=4, y=-2, z=-\frac{1}{2} \text{ 时, } \sqrt{xyz} = \sqrt{4 \times (-2) \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{4} = 2.$$

基础训练

1. 下列各式中是二次根式的有_____。(填序号)

① $\sqrt[3]{m}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{-9}$ ④ $\sqrt{4x}$ ⑤ $\sqrt{-3x^2}$ ⑥ $\sqrt{a^2+2}$

2. 化简: ① $\sqrt{(-2)^2} =$ _____; ② $(-\sqrt{5})^2 =$ _____.

3. ①当 x _____ 时, $\sqrt{3-2x}$ 有意义.

②若 $\sqrt{-x^2}$ 有意义, 则 x _____.

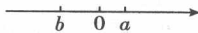
③当 x _____ 时, $\sqrt{(2x-5)^2}$ 有意义.

④若 $\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$ 有意义, 则 x _____.

4. 当 $-1 < m < 2$ 时, $\sqrt{1+2m+m^2} + \sqrt{m^2-4m+4} =$ _____.

5. 已知 $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{4-x} + 5$, 则 $(xy-38)^2$ 的算术平方根是_____.

6. 实数 a, b 在数轴上的位置如图 1.1-1 所示, 那么化简 $|a-b| - \sqrt{a^2}$ 的结果是



() 图 1.1-1

A. $2a-b$

B. b

C. $-b$

D. $-2a+b$

7. 一个自然数的算术平方根为 a , 那么比这个自然数大 1 的自然数的算术平方根为 ()

A. a^2+1

B. $\sqrt{a+1}$

C. $a+1$

D. $\sqrt{a^2+1}$

8. 已知 $\sqrt{m+2n} + \sqrt{3m-2n} - 8 = 0$, 求 mn^m 的值.

三、提高篇

例 1 在实数范围内, 分解因式

① $x^4 - 3x^2 + 2$ ② $x^2 - 2\sqrt{2}x - 3$

分析

利用公式 $(\sqrt{a})^2 = a (a > 0)$ 把 a 写成平方形式, 再利用平方差公式进行因式分解.

解: ① $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1) = [x^2 - (\sqrt{2})^2](x^2 - 1^2) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + 1)(x - 1)$

② $x^2 - 2\sqrt{2}x - 3 = x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 - 3 = (x - \sqrt{2})^2 - 5 = (x - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{2} + \sqrt{5})(x - \sqrt{2} - \sqrt{5})$

例 2 当 $m < 0, n < 0$ 时, 化简 $(\sqrt{-m})^2 + (\sqrt{-n})^2$

分析

利用公式 $(\sqrt{a})^2 = a (a > 0)$

解: $\because m < 0, n < 0, \therefore -m > 0, -n > 0, \therefore (\sqrt{-m})^2 + (\sqrt{-n})^2 = -m - n$

例 3 若 x, y 满足 $y = \frac{\sqrt{4x^2-9} + \sqrt{9-4x^2} + 6}{2x+3}$, 求 $\frac{8}{3}xy$ 的平方根.

解: 根据题意, 得 $\begin{cases} 4x^2 - 9 \geq 0 \\ 9 - 4x^2 \geq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^2 \geq \frac{9}{4} \\ x^2 \leq \frac{9}{4} \end{cases}$ $\therefore x^2 = \frac{9}{4}, \therefore x = \pm \frac{3}{2}$



当 $x = -\frac{3}{2}$ 时, 分母 $2x+3 = 2 \times (-\frac{3}{2}) + 3 = 0$ (舍去) $\therefore x = \frac{3}{2} \therefore y = \frac{6}{2 \times \frac{3}{2} + 3} = 1$

$\therefore \frac{8}{3}xy = \frac{8}{3} \times \frac{3}{2} \times 1 = 4$, 而 4 的平方根为 ± 2 , $\therefore \frac{8}{3}xy$ 的平方根是 ± 2 .

提高训练 \rightarrow

- 计算 $\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2} =$ _____.
- 当 x _____ 时, $\sqrt{-\frac{x+4}{3}}$ 有意义.
- 在实数范围内分解因式① $4x^2 - 5 =$ _____, ② $16x^4 - 9 =$ _____.
- 当 x 取 _____ 时, $\sqrt{3x+4} + 5$ 取最小值, 最小值为 _____.
- 能使二次根式 $\sqrt{-(a+5)^2}$ 有意义的实数 a 的值是 _____.
- 已知直角三角形两条直角边的长 m, n 满足条件 $|m^2 - 9| + \sqrt{(n-3)(n-4)} = 0$. 则第三边长为 _____.
- 若 $\sqrt{5a+2}$ 有意义, 则 a 能取的最小整数是 _____ ()
A. 0 B. 1 C. -1 D. -4
- 如果代数式 $\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{-2x}}$ 有意义, 那么直角坐标系中点 $A(x, y)$ 的位置可能在 _____ ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 设 $a > 0, b < 0$, 则 $\sqrt{a^2 + a^0} - |b|$ 的值为 _____ ()
A. $a+1+b$ B. $a+1-b$ C. $-a+1+b$ D. $-a+1-b$
- (2008·永州中考) 下列判断正确的是 _____ ()
A. $\frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2$ B. $2 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3$
C. $1 < \sqrt{5} - \sqrt{3} < 2$ D. $4 < \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} < 5$
- 已知 x, y 是实数, $\sqrt{3x+4} + y^2 - 6y + 9 = 0$, 若 $axy - 3x = y$. 求 a 的值.
- 已知三角形的三边 a, b, c , 满足 $\sqrt{a-b} + |c - \sqrt{2}a| + a^2 - 4a + 4 = 0$. 求三角形的面积.
- 化简 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2$ ($x < 1$ 且 $x \neq 0$)

四、竞赛入门篇

例 1 求证: 一个正整数 n 的平方与这个正整数 2 倍之和的算术平方根的整数部分为 n .

分析

欲证 $\sqrt{n^2 + 2n}$ 的整数部分为 n , 只需证明 $n < \sqrt{n^2 + 2n} < n + 1$.

证明: $\because n$ 为正整数, $\therefore n^2 < n^2 + 2n, \therefore \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2 + 2n}$. 又 $\because \sqrt{n^2} = n, \therefore n < \sqrt{n^2 + 2n}$. $\because n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$, 即 $n^2 + 2n < (n+1)^2, \therefore \sqrt{n^2 + 2n} < \sqrt{(n+1)^2}, \therefore \sqrt{(n+1)^2} = n+1, \therefore \sqrt{n^2 + 2n} < n+1, \therefore n < \sqrt{n^2 + 2n} < n+1, \therefore \sqrt{n^2 + 2n}$ 的整数部分为 n .

例 2 设 $x > 0, y > 0$, 已知 $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) = \sqrt{y}(6\sqrt{x} - 5\sqrt{y})$, 求 $\frac{x + \sqrt{xy} - y}{2x + \sqrt{xy} + 3y}$ 的值.



分析

所求代数式中,分子、分母的各项次数都相同,若 x 是 y 的因式,或 y 是 x 的因式,便可约去分子、分母中的相同因式,值可求.需整理已知条件,导出 x 与 y 的关系.

解:由已知得 $(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}\sqrt{y} - 5(\sqrt{y})^2 = 0$ 即 $(\sqrt{x} - 5\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0$

$\because x > 0, y > 0, \therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0, \therefore \sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0, \therefore \sqrt{x} = 5\sqrt{y}$ 即 $x = 25y$

$$\therefore \frac{x + \sqrt{xy} - y}{2x + \sqrt{xy} + 3y} = \frac{25y + 5y - y}{50y + 5y + 3y} = \frac{29y}{58y} = \frac{1}{2}$$

例3 已知 $n > 0$,化简 $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$ 所得的结果为

()

A. $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

B. $1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

C. $1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

D. $1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

分析

二次根式的化简主要是将被开方式写成平方形式,然后利用公式 $\sqrt{a^2} = a (a > 0)$ 进行化简.

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} &= \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2} = \left|1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| \end{aligned}$$

$$\because 0 < n < n+1, \therefore \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \therefore 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0, \therefore \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

答案:C.

竞赛入门训练

- 若 $(\sqrt{2-3x})^2 = \sqrt{(3x-2)^2}$ 成立,则 x 应满足条件_____.
- 已知正数 a, b 有下列命题:(1)若 $a=1, b=1$,则 $\sqrt{ab} \leq 1$; (2)若 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}$,则 $\sqrt{ab} \leq \frac{3}{2}$; (3)若 $a=2, b=3$,则 $\sqrt{ab} \leq \frac{5}{2}$; (4)若 $a=1, b=5$,则 $\sqrt{ab} \leq 3$. 根据以上几个命题所提供的信息,请猜想:若 $a=6, b=7$,则 $\sqrt{ab} \leq$ _____.
- 化简 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2 (x < 1 \text{ 且 } x \neq 0)$
- 已知 $|\sqrt{(x-2)^2} - 1| = x$,化简 $\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}$.
- 若 $x = \sqrt{3} + 1$,求 $x^3 - (2 + \sqrt{3})x^2 + (1 + 2\sqrt{3})x - \sqrt{3} + 5$ 的值.



6. 求代数式 $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$ 的最小值.

7. 已知 $\sqrt{x^2+8x+16} + \sqrt{x^2-12x+36} = 10$, 化简 $\sqrt{(2x+8)^2} + 2|x-6|$.

参考答案

基础训练

1. ②⑥ 2. ①② ②⑤

3. ① $\leq \frac{3}{2}$ 解析: $3-2x \geq 0$, ② = 0 解析: $\begin{cases} -x^2 \geq 0 \\ x^2 \geq 0 \end{cases}$, ③ 取任意实数, ④ ≥ 2 解析: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$

4. 3 解析: 原式 = $\sqrt{(1+m)^2} + \sqrt{(m-2)^2} = |1+m| + |m-2|$, $\because -1 < m < 2, \therefore \begin{cases} 1+m > 0 \\ m-2 < 0 \end{cases}$,

\therefore 原式 = $1+m-(m-2) = 3$.

5. 18 解析: $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}, \therefore x = 4, \therefore y = \sqrt{4-4} + \sqrt{4-4} + 5 = 5, \therefore \sqrt{(xy-38)^2} =$

$\sqrt{(4 \times 5 - 38)^2} = \sqrt{(-18)^2} = 18$.

6. C 解析: 由数轴可知 $b < 0 < a, \therefore a-b > 0, \therefore$ 原式 = $a-b-a = -b$.

7. D

8. 解: $\because \sqrt{m+2n} \geq 0, \sqrt{3m-2n-8} \geq 0, \therefore \begin{cases} m+2n=0 \\ 3m-2n-8=0 \end{cases} \therefore \begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases} \therefore mn^m = 2 \times (-1)^2 = 2$.

提高训练

1. $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ 解析: $\because \sqrt{7} > \sqrt{5}, \therefore \sqrt{7}-\sqrt{5} > 0$.

2. ≤ -4 解析: $x+4 \leq 0$

3. ① $(2x+\sqrt{5})(2x-\sqrt{5})$ ② $(4x^2+3)(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})$

4. $-\frac{4}{3}, 5$ 5. -5 解析: $\begin{cases} (a+5)^2 \geq 0 \\ -(a+5)^2 \geq 0 \end{cases} \therefore a+5=0 \therefore a=-5$

6. $3\sqrt{2}$ 或 5 解析: $\because \begin{cases} |m^2-9| \geq 0 \\ \sqrt{(n-3)(n-4)} \geq 0 \\ |m^2-9| + \sqrt{(n-3)(n-4)} = 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} m^2-9=0 \\ (n-3)(n-4)=0 \end{cases} \therefore m > 0, \therefore \begin{cases} m=3 \\ n=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=3 \\ n=4 \end{cases}$

7. A 解析: $\because 5a+2 \geq 0, \therefore a \geq -\frac{2}{5}$

8. C 解析: $\because \begin{cases} -2x > 0 \\ xy \geq 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x < 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

9. A 解析: 原式 = $a+1-(-b)$

10. A

11. 解: $\because \sqrt{3x+4} \geq 0, y^2-6y+9 = (y-3)^2 \geq 0, \sqrt{3x+4} + y^2 - 6y + 9 = 0, \therefore 3x+4=0, y-3=0,$
 $\therefore x = -\frac{4}{3}, y=3$, 把 $x = -\frac{4}{3}, y=3$ 代入 $axy-3x=y$ 中, 得 $a \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times 3 - 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 3$, 解得

$a = \frac{1}{4}$

12. 解: $\because \sqrt{a-b} \geq 0, |c-\sqrt{2a}| \geq 0, a^2-4a+4 = (a-2)^2 \geq 0$, 又 $\sqrt{a-b} + |c-\sqrt{2a}| + (a-2)^2 =$



$$0, \begin{cases} a-b=0 \\ c-\sqrt{2}a=0 \\ a-2=0 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=2, \\ b=2, \\ c=2\sqrt{2} \end{cases}, \therefore a^2+b^2=c^2, \therefore \text{三角形为直角三角形, 且 } a, b \text{ 为两直角边, } \therefore S = \frac{1}{2}ab \\ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$$

13. 解: $\because x < 1$ 且 $x \neq 0, \therefore \frac{1}{x} > 1, \therefore x - \frac{1}{x} < 0$, 原式 $= \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} - x$.

竞赛入门训练

1. $x \leq \frac{2}{3}$ 解析: 由已知可得 $2 - 3x \geq 0, \therefore x \leq \frac{2}{3}$.

2. $\frac{13}{2}$ 解析: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{6+7}{2} = \frac{13}{2}$, 公式 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

3. 解: $\sqrt{x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{x}\right|$

当 $0 < x < 1$ 时, $x < \frac{1}{x}$, 原式 $= \left|x - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} - x$; 当 $-1 \leq x < 0$ 时, $x > \frac{1}{x}$, 原式 $= \left|x - \frac{1}{x}\right| = x - \frac{1}{x}$; 当 $x < -1$ 时, $x < \frac{1}{x}$, 原式 $= \left|x - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} - x$.

4. 解: $\sqrt{(x-2)^2 - 1} = \pm x, \sqrt{(x-2)^2} = 1 \pm x$

方程两边平方, $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 2x + 1$ 或 $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2x + 1$

解得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{3}{2}$ (不是原方程的根, 舍去) 原式 $= \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = 0 + 1 = 1$.

5. 解: 原式 $= x^3 - 2x^2 - \sqrt{3}x^2 + x + 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} + 5 = x^3 - 2x^2 + x - (\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}) + 5 = x(x-1)^2 - \sqrt{3}(x-1)^2 + 5 = (x-1)^2(x-\sqrt{3}) + 5$.

当 $x = \sqrt{3} + 1$ 时, 原式 $= (\sqrt{3} + 1 - 1)^2(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}) + 5 = 3 + 5 = 8$.

6. 解: 由已知可知 x 需满足 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \text{ 即 } x \geq 2, \therefore \text{当 } x=2 \text{ 时, 代数式取最小值为 } 1 + \sqrt{2}. \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$

7. 解: 原方程化为 $\sqrt{(x+4)^2} + |x-6| = 10$, 原式 $= 2\sqrt{(x+4)^2} + 2|x-6| = 2[\sqrt{(x+4)^2} + |x-6|] = 2 \times 10 = 20$.

1.2 二次根式的运算

1.2.1 二次根式的乘法

一、知识归纳

1. 二次根式的乘法公式 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0)$

即两个二次根式相乘时, 根指数不变, 被开方数相乘, 相乘的结果可以是二次根式, 也可以是有理式.



2. 二次根式的乘法公式的应用

逆用乘法公式 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$ 可以将二次根式进行化简, 这里的 a, b 可以表示数或代数式.

可以将根号内的平方因式移到根号外.

但要注意公式 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \text{ 时} \\ -a & a < 0 \text{ 时} \end{cases}$ 的正确运用.

二、基础篇

例 1 计算 ① $2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{1}{3}}$ ② $\sqrt{\frac{2a}{c^2}} \cdot \sqrt{\frac{2b^2}{a^3}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 c^2}{b^2}} (a > 0, b > 0, c > 0)$

分析

运用二次根式的乘法公式 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0)$.

解: ① $2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{1}{3}} = 2 \left(\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{1}{3}} \right) = 2 \times \sqrt{3 \times \frac{1}{3}} = 2$.

② $\sqrt{\frac{2a}{c^2}} \cdot \sqrt{\frac{2b^2}{a^3}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 c^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{2a}{c^2} \cdot \frac{2b^2}{a^3} \cdot \frac{a^2 c^2}{b^2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$.

例 2 计算: ① $\sqrt{(-4) \times (-9) \times \frac{16}{25}}$ ② $\sqrt{2a^3 b^2 c^4} (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$ ③ $\sqrt{4(x-y)^2 \cdot x \cdot 9x} (x > y > 0)$ ④ 已知直角三角形的直角边 $a=9$, 斜边 $c=41$, 求另一直角边 b 的长.

分析

逆用乘法公式 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$

解: ① $\sqrt{(-4) \times (-9) \times \frac{16}{25}} = \sqrt{4 \times 9 \times \frac{16}{25}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{\frac{16}{25}} = 2 \times 3 \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$

② $\sqrt{2a^3 b^2 c^4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{(c^2)^2} = \sqrt{2} \cdot a \cdot \sqrt{a} \cdot b \cdot c^2 = abc^2 \sqrt{2a}$

③ $\sqrt{4(x-y)^2 \cdot x \cdot 9x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{(x-y)^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{x} = 2(x-y) \cdot (\sqrt{x})^2 \cdot 3 = 6x(x-y) = 6x^2 - 6xy$

④ 由勾股定理, 得 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{(41+9)(41-9)} = \sqrt{50 \times 32} = \sqrt{25 \times 2 \times 16 \times 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{16} = 5 \times 2 \times 4 = 40$.

例 3 如果 $\sqrt{a^2 - 5a + 6} = \sqrt{a-2} \cdot \sqrt{a-3}$ 成立, 则 a 的取值范围是 ()

A. $a \geq 2$ B. $a \geq 3$ C. $2 \leq a \leq 3$ D. $a \leq 3$

分析

公式 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 成立的条件是 $a \geq 0, b \geq 0$, 此题 $\sqrt{a^2 - 5a + 6} = \sqrt{(a-2)(a-3)} = \sqrt{a-2} \cdot \sqrt{a-3}$ 成立, 应有 $\begin{cases} a-2 \geq 0 \\ a-3 \geq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a \geq 2 \\ a \geq 3 \end{cases}$, $\therefore a \geq 3$.

答案: B

例 4 比较大小: ① $3\sqrt{2}$ 与 $2\sqrt{3}$ ② $-5\sqrt{6}$ 与 $-6\sqrt{5}$