QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写 适合各种版本教材

一本全®

九年级

初中数学培优

主编 金英兰

延边大学出版社
YANBIAN UNIVERSITY PUBLISHING HOUSE

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写　适合各种版本教材

一本全®

初中数学培优

本册主编：张艳萍　何莲清

编　　委：孙艳丽　郭爱敏

曲伟杰　纪　威

孟　辉

九年级

延边大学出版社

YANBIAN UNIVERSITY PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

初中数学培优·九年级/金英兰主编.—延吉:延边大学出版社,2009.6
ISBN 978-7-5634-2745-1

Ⅰ.初… Ⅱ.金… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 042807 号

初中数学培优·九年级

主编:金英兰
责任编辑:秀　豪
出版发行:延边大学出版社
社址:吉林省延吉市公园路 977 号　　邮编:133002
网址:http://www.ydcbs.com
E-mail:ydcbs@ydcbs.com
电话:0433-2732435　　传真:0433-2732434
发行部电话:0433-2133001　　传真:0433-2733266
印刷:北京中创彩色印刷有限公司
开本:787×1092　1/16
印张:30.5　　字数:356 千字
印数:1—13000
版次:2009 年 7 月第 1 版
印次:2009 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5634-2745-1

定价:31.00 元

前言 Foreword

在数学这门学科中，知识的各个部分是有关联的，但各知识点又都有自己的特征。因此，在学习过程中，数学各专题知识独特的规律就需要学生们细心把握。

正因为如此，我们聘请多年在一线教学工作岗位的特高级教师，根据教育部颁布的新课标和新大纲的要求，编写了本书《初中数学培优·九年级》，目的是让学生们在学习本数学专题时对这部分知识内容有深刻的理解和掌握。

为使广大读者更方便地使用本书，本书按从易到难的梯度编写，这样，对本专题知识没有吃透的学生就可以迅速掌握本专题的知识；中等水平的学生在精读本书提高篇后会使自己更上一层楼；优秀的学生可以通过竞赛入门篇的训练使自己处在更高的水平。

本书精选的大量不同难度的习题能让不同层次的学生有的放矢，并体验到学习的乐趣。

本书由如下版块构成：

一、知识归纳

将数学的知识和规律进行总结和归纳，将其主要规律呈示出来，使学生们在学习中能在最短的时间内有效掌握本书的内容。

二、基础篇

各章节分为例题和训练部分。这部分内容主要使学生通过基础篇的训练尽快地掌握各章节的基本内容，对基本内容和概念加深理解并熟练掌握。

三、提高篇

各章节分为例题和训练部分。提高篇具有一定的难度。通过提高篇的训练，不仅能更熟练地掌握各章节的基本内容，而且能对与各章节相关联的内容有一定的理解和掌握。

四、竞赛入门篇

各章节分为例题和训练部分。竞赛入门篇的题具有相当难度，但这些题都是在各章节的基础知识之上进行变型和延伸的，因此，这些题是各章节内容的总结与拓展。同学们通过竞赛入门篇的训练，不仅能够对各章节的内容有明晰的认识，也能够对各

知识点的认识有显著升华。

五、参考答案

全书给出了参考答案,有一定难度的题还给出了解题思路和步骤。

充分阅读本书,通过这种阶梯式的训练,任何学生都能迅速有效地掌握各章节的内容,从而达到有效并熟练地掌握知识的目的。

本书可供学生超前学习时使用,也可供教师在教学和组织学生参赛时作为辅导材料。

目录 Contents

第一章　二次根式

1.1 二次根式

一、知识归纳

1. 二次根式的概念

一般地，把形如$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的式子叫做二次根式，“$\sqrt{\ }$”称为二次根号.

2. 二次根式有意义的条件

要使二次根式$\sqrt{a}$有意义，被开方数 a 必须是非负数，即 $a\geqslant 0$. 由此，可确定被开方式中字母的取值范围.

3. 二次根式的意义运用

因为$\sqrt{a}$的意义是 a 的算术平方根，因此说$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$是一个非负数，即$\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$.

4. 二次根式的基本性质

由于$\sqrt{a}$是 a 的算术平方根，所以$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$.

同样的，可以得到 $a=(\sqrt{a})^2(a\geqslant 0)$，即可以运用这个公式把任意一个非负数或非负式子写成该数或该式子的二次根式的平方形式.

5. 几个非负性式子的比较

(1)任意实数 a 的绝对值$|a|\geqslant 0$(a 可代表代数式).

(2)任意实数 a 的平方 $a^2\geqslant 0$(a 可代表代数式).

(3)任意非负数 a 的算术平方根$\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$($a$ 可代表非负代数式).

二、基础篇

例 1 判断下列各式哪些是二次根式：

(1)$\sqrt{4}$　(2) $\sqrt{-3}$　(3)π　(4) $\sqrt{x+2}$(x 为有理数)　(5) $\sqrt{a^2+1}$

(6) $\sqrt{-x}(x\leqslant 0)$　(7) $\sqrt{a-b}(a<b)$　(8) $\sqrt[3]{-4x}$

分析

判断一个式子是否为二次根式，主要看它是否具备以下两个特征：

(1)形式上识别：根指数必须是 2.

(2)本质上鉴别：被开方数必须是非负数.

以上两个特征都满足，则为二次根式；若只满足其一，不满足其二或二者都不满足，皆不是二次根式.

解：$\because$ $\sqrt[3]{-4x}$，π 的根指数不是 2.

$\therefore\ \sqrt[3]{-4x}$，$\pi$ 不是二次根式.

$\because\ \sqrt{-3}$，$\sqrt{a-b}(a<b)$ 的被开方数是负数，实数范围内无意义.

$\therefore\ \sqrt{-3}$，$\sqrt{a-b}(a<b)$ 不是二次根式.

$\because\ \sqrt{x+2}$ 的被开方数 $x+2$，在 x 为有理数时，可正，可负，可为零，因此无法确定 $x+2$ 是非负数.

$\therefore\ \sqrt{x+2}$ 不确定为二次根式.

$\because \sqrt{4}$，$\sqrt{a^2+1}$，$\sqrt{-x}(x\leqslant 0)$ 的根指数都是 2，被开方数都是非负数，所以它们是二次根式

$\therefore \sqrt{4}$，$\sqrt{a^2+1}$，$\sqrt{-x}(x\leqslant 0)$ 是二次根式.

例 2 求出下列各式在实数范围内有意义的 x 的取值范围.

(1) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ (2) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3-x}}$

分析

作为二次根式，有意义的条件是被开方数是非负数，作为分式，有意义的条件是分母不为零，所以本题需考虑①被开方数非负；②分母不为零两个条件.

解：(1) 要使 $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 有意义，则有 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\x-2\neq 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant 1\\x\neq 2\end{cases}$

所以当 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq 2$ 时，$\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 在实数范围内有意义.

(2) 要使 $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3-x}}$ 有意义，则有 $\begin{cases}2x-1\geqslant 0\\3-x>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant \dfrac{1}{2}\\x<3\end{cases}$

所以当 $\dfrac{1}{2}\leqslant x<3$ 时，$\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3-x}}$ 在实数范围内有意义.

例 3 化简 $|x+1|+\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$

分析

由二次根式有意义的条件：被开方数非负，确定 x 的取值范围（或取值），依据 x 的取值进行化简.

解：根据题意，得 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant 1\\x\leqslant 1\end{cases}$ $\therefore x=1$

当 $x=1$ 时，$|x+1|+\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=|1+1|+\sqrt{1-1}+\sqrt{1-1}=|2|+\sqrt{0}+\sqrt{0}=2$

例 4 已知 $|x+y-2|+\sqrt{2z+1}+(y+2)^2=0$

求 $\sqrt{xyz}$ 的值.

分析

由绝对值的非负性，算术平方根的非负性，平方的非负性，①列出方程组，②解方程组求出 x、y、z 的取值，③代入代数式进行计算.

解：$\because\ |x+y-2|\geqslant 0$，$\sqrt{2z+1}\geqslant 0$，$(y+2)^2\geqslant 0$ 且 $|x+y-2|+\sqrt{2z+1}+(y+2)^2=0$

$\therefore\ |x+y-2|=0$，$\sqrt{2z+1}=0$，$(y+2)^2=0$，$\therefore\ x+y-2=0$，$2z+1=0$，$y+2=0$

$\therefore x=4,y=-2,z=-\dfrac{1}{2}$

当 $x=4,y=-2,z=-\dfrac{1}{2}$时，$\sqrt{xyz}=\sqrt{4\times(-2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\sqrt{4}=2$.

基础训练

1. 下列各式中是二次根式的有________.（填序号）

①$\sqrt[3]{m}$　②$\sqrt{2}$　③$\sqrt{-9}$　④$\sqrt{4x}$　⑤$\sqrt{-3x^2}$　⑥$\sqrt{a^2+2}$

2. 化简：①$\sqrt{(-2)^2}=$________；②$(-\sqrt{5})^2=$________.

3. ①当 x________时，$\sqrt{3-2x}$有意义.　②若 $\sqrt{-x^2}$有意义，则 x________.

③当 x________时，$\sqrt{(2x-5)^2}$有意义.　④若$\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1}$有意义，则 x________.

4. 当 $-1<m<2$ 时，$\sqrt{1+2m+m^2}+\sqrt{m^2-4m+4}=$________.

5. 已知 $y=\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}+5$，则$(xy-38)^2$ 的算术平方根是________.

6. 实数 a、b 在数轴上的位置如图 1.1－1 所示，那么化简$|a-b|-\sqrt{a^2}$的结果是（　　）

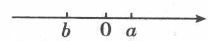

图 1.1－1

A. $2a-b$　B. b　C. $-b$　D. $-2a+b$

7. 一个自然数的算术平方根为 a，那么比这个自然数大 1 的自然数的算术平方根为（　　）

A. a^2+1　B. $\sqrt{a+1}$　C. $a+1$　D. $\sqrt{a^2+1}$

8. 已知 $\sqrt{m+2n}+\sqrt{3m-2n-8}=0$，求 mn^m 的值.

三、提高篇

例 1 在实数范围内，分解因式

①x^4-3x^2+2　②$x^2-2\sqrt{2}x-3$

分析

利用公式$(\sqrt{a})^2=a(a>0)$把 a 写成平方形式，再利用平方差公式进行因式分解.

解：①$x^4-3x^2+2=(x^2-2)(x^2-1)=[x^2-(\sqrt{2})^2](x^2-1^2)=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+1)(x-1)$

②$x^2-2\sqrt{2}x-3=x^2-2\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2-3=(x-\sqrt{2})^2-5=(x-\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2=(x-\sqrt{2}+\sqrt{5})(x-\sqrt{2}-\sqrt{5})$

例 2 当 $m<0,n<0$ 时，化简$(\sqrt{-m})^2+(\sqrt{-n})^2$

分析

利用公式$(\sqrt{a})^2=a(a>0)$

解：$\because m<0,n<0,\therefore -m>0,-n>0,\therefore(\sqrt{-m})^2+(\sqrt{-n})^2=-m-n$

例 3 若 x、y 满足 $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-9}+\sqrt{9-4x^2}+6}{2x+3}$，求$\dfrac{8}{3}xy$ 的平方根.

解：根据题意，得$\begin{cases}4x^2-9\geqslant0\\9-4x^2\geqslant0\end{cases}$ 即$\begin{cases}x^2\geqslant\dfrac{9}{4}\\x^2\leqslant\dfrac{9}{4}\end{cases}$　$\therefore x^2=\dfrac{9}{4},\therefore x=\pm\dfrac{3}{2}$

当 $x=-\frac{3}{2}$ 时,分母 $2x+3=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+3=0$(舍去)　∴ $x=\frac{3}{2}$　∴ $y=\frac{6}{2\times\frac{3}{2}+3}=1$

∴ $\frac{8}{3}xy=\frac{8}{3}\times\frac{3}{2}\times1=4$,而 4 的平方根为 ±2,∴ $\frac{8}{3}xy$ 的平方根是 ±2.

提高训练

1. 计算 $\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}=$________.
2. 当 x ________时,$\sqrt{-\frac{x+4}{3}}$有意义.
3. 在实数范围内分解因式①$4x^2-5=$________,②$16x^4-9=$________.
4. 当 x 取________时,$\sqrt{3x+4}+5$ 取最小值,最小值为______.
5. 能使二次根式 $\sqrt{-(a+5)^2}$有意义的实数 a 的值是________.
6. 已知直角三角形两条直角边的长 m、n 满足条件 $|m^2-9|+\sqrt{(n-3)(n-4)}=0$. 则第三边长为________.
7. 若 $\sqrt{5a+2}$有意义,则 a 能取的最小整数是　(　　)
   A. 0　B. 1　C. -1　D. -4
8. 如果代数式 $\sqrt{xy}+\frac{1}{\sqrt{-2x}}$有意义,那么直角坐标系中点 $A(x,y)$的位置可能在　(　　)
   A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限
9. 设 $a>0,b<0$,则 $\sqrt{a^2}+a^0-|b|$的值为　(　　)
   A. $a+1+b$　B. $a+1-b$　C. $-a+1+b$　D. $-a+1-b$
10. (2008·永州中考)下列判断正确的是　(　　)
   A. $\frac{3}{2}<\sqrt{3}<2$　B. $2<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3$
   C. $1<\sqrt{5}-\sqrt{3}<2$　D. $4<\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}<5$
11. 已知 x、y 是实数,$\sqrt{3x+4}+y^2-6y+9=0$,若 $axy-3x=y$. 求 a 的值.
12. 已知三角形的三边 a、b、c,满足 $\sqrt{a-b}+|c-\sqrt{2}a|+a^2-4a+4=0$. 求三角形的面积.
13. 化简 $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}\,(x<1$ 且 $x\neq0)$

四、竞赛入门篇

例 1 求证:一个正整数 n 的平方与这个正整数 2 倍之和的算术平方根的整数部分为 n.

分析

欲证 $\sqrt{n^2+2n}$的整数部分为 n,只需证明 $n<\sqrt{n^2+2n}<n+1$.

证明: ∵ n 为正整数,∴ $n^2<n^2+2n$,∴ $\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+2n}$. 又∵ $\sqrt{n^2}=n$,∴ $n<\sqrt{n^2+2n}$. ∵ $n^2+2n<n^2+2n+1$,即 $n^2+2n<(n+1)^2$,∴ $\sqrt{n^2+2n}<\sqrt{(n+1)^2}$,∵ $\sqrt{(n+1)^2}=n+1$,∴ $\sqrt{n^2+2n}<n+1$,∴ $n<\sqrt{n^2+2n}<n+1$,∴ $\sqrt{n^2+2n}$的整数部分为 n.

例 2 设 $x>0,y>0$,已知 $\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sqrt{y})=\sqrt{y}(6\sqrt{x}-5\sqrt{y})$,求 $\frac{x+\sqrt{xy}-y}{2x+\sqrt{xy}+3y}$的值.

分析

所求代数式中，分子、分母的各项次数都相同，若 x 是 y 的因式，或 y 是 x 的因式，便可约去分子、分母中的相同因式，值可求. 需整理已知条件，导出 x 与 y 的关系.

解：由已知得 $(\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}\sqrt{y}-5(\sqrt{y})^2=0$ 即 $(\sqrt{x}-5\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$

$\because x>0, y>0, \therefore \sqrt{x}+\sqrt{y}>0, \therefore \sqrt{x}-5\sqrt{y}=0, \therefore \sqrt{x}=5\sqrt{y}$ 即 $x=25y$

$\therefore \dfrac{x+\sqrt{xy}-y}{2x+\sqrt{xy}+3y}=\dfrac{25y+5y-y}{50y+5y+3y}=\dfrac{29y}{58y}=\dfrac{1}{2}$.

例 3　已知 $n>0$，化简 $\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}}$ 所得的结果为　　（　　）

A. $1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}$　　B. $1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}$　　C. $1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$　　D. $1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

分析

二次根式的化简主要是将被开方式写成平方形式，然后利用公式 $\sqrt{a^2}=a(a>0)$ 进行化简.

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{2}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2}=\left|1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|$$

$\because 0<n<n+1, \therefore \dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}, \therefore \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}>0$

$\therefore 1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}>0, \therefore \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}}=1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

答案：C.

竞赛入门训练

1. 若 $(\sqrt{2-3x})^2=\sqrt{(3x-2)^2}$ 成立，则 x 应满足条件________.

2. 已知正数 a,b 有下列命题：(1)若 $a=1,b=1$，则 $\sqrt{ab}\leqslant 1$；(2)若 $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{5}{2}$，则 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{3}{2}$；(3)若 $a=2,b=3$，则 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{5}{2}$；(4)若 $a=1,b=5$，则 $\sqrt{ab}\leqslant 3$. 根据以上几个命题所提供的信息，请猜想：若 $a=6,b=7$，则 $\sqrt{ab}\leqslant$________.

3. 化简 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}$ $(x<1$ 且 $x\neq 0)$

4. 已知 $|\sqrt{(x-2)^2}-1|=x$，化简 $\sqrt{x^2-x+\dfrac{1}{4}}+\sqrt{x^2+x+\dfrac{1}{4}}$.

5. 若 $x=\sqrt{3}+1$，求 $x^3-(2+\sqrt{3})x^2+(1+2\sqrt{3})x-\sqrt{3}+5$ 的值.

6. 求代数式$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$的最小值.

7. 已知$\sqrt{x^2+8x+16}+\sqrt{x^2-12x+36}=10$,化简$\sqrt{(2x+8)^2}+2|x-6|$.

参考答案

基础训练

1. ②⑥ 2. ①2 ②5

3. ①$\leqslant\frac{3}{2}$ 解析:$3-2x\geqslant0$,②$=0$ 解析:$\begin{cases}-x^2\geqslant0\\x^2\geqslant0\end{cases}$,③取任意实数,④$\geqslant2$ 解析:$\begin{cases}x-2\geqslant0\\x-1\neq0\end{cases}$

4. 3 解析:原式$=\sqrt{(1+m)^2}+\sqrt{(m-2)^2}=|1+m|+|m-2|$,$\because -1<m<2$,$\therefore\begin{cases}1+m>0\\m-2<0\end{cases}$,$\therefore$原式$=1+m-(m-2)=3$.

5. 18 解析:$\begin{cases}x-4\geqslant0\\4-x\geqslant0\end{cases}$,$\therefore x=4$,$\therefore y=\sqrt{4-4}+\sqrt{4-4}+5=5$,$\therefore\sqrt{(xy-38)^2}=\sqrt{(4\times5-38)^2}=\sqrt{(-18)^2}=18$.

6. C 解析:由数轴可知$b<0<a$,$\therefore a-b>0$,$\therefore$原式$=a-b-a=-b$.

7. D

8. 解:$\because\sqrt{m+2n}\geqslant0$,$\sqrt{3m-2n-8}\geqslant0$,$\therefore\begin{cases}m+2n=0\\3m-2n-8=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}m=2\\n=-1\end{cases}$ $\therefore mn^m=2\times(-1)^2=2$.

提高训练

1. $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ 解析:$\because\sqrt{7}>\sqrt{5}$,$\therefore\sqrt{7}-\sqrt{5}>0$.

2. $\leqslant-4$ 解析:$x+4\leqslant0$

3. ①$(2x+\sqrt{5})(2x-\sqrt{5})$ ②$(4x^2+3)(2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3})$

4. $-\frac{4}{3}$,5 5. -5 解析:$\begin{cases}(a+5)^2\geqslant0\\-(a+5)^2\geqslant0\end{cases}$ $\therefore a+5=0$ $\therefore a=-5$

6. $3\sqrt{2}$或5 解析:$\because\begin{cases}|m^2-9|\geqslant0\\\sqrt{(n-3)(n-4)}\geqslant0\\|m^2-9|+\sqrt{(n-3)(n-4)}=0\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}m^2-9=0\\(n-3)(n-4)=0\end{cases}$ $\because m>0$,$\therefore\begin{cases}m=3\\n=3\end{cases}$或$\begin{cases}m=3\\n=4\end{cases}$

7. A 解析:$\because 5a+2\geqslant0$,$\therefore a\geqslant-\frac{2}{5}$

8. C 解析:$\because\begin{cases}-2x>0\\xy\geqslant0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x<0\\y\leqslant0\end{cases}$

9. A 解析:原式$=a+1-(-b)$

10. A

11. 解:$\because\sqrt{3x+4}\geqslant0$,$y^2-6y+9=(y-3)^2\geqslant0$,$\sqrt{3x+4}+y^2-6y+9=0$,$\therefore 3x+4=0$,$y-3=0$,$\therefore x=-\frac{4}{3}$,$y=3$,把$x=-\frac{4}{3}$,$y=3$代入$axy-3x=y$中,得$a\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times3-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)=3$,解得$a=\frac{1}{4}$

12. 解:$\because\sqrt{a-b}\geqslant0$,$|c-\sqrt{2}a|\geqslant0$,$a^2-4a+4=(a-2)^2\geqslant0$,又$\sqrt{a-b}+|c-\sqrt{2}a|+(a-2)^2=$

$0,\begin{cases}a-b=0\\c-\sqrt{2}a=0\\a-2=0\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=2,\\c=2\sqrt{2}\end{cases}$ $\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore$ 三角形为直角三角形，且 a、b 为两直角边，$\therefore S=\frac{1}{2}ab$ $=\frac{1}{2}\times2\times2=2.$

13. **解**：$\because x<1$ 且 $x\neq0$，$\therefore \frac{1}{x}>1$，$\therefore x-\frac{1}{x}<0$，原式 $=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\left|x-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}-x.$

竞赛入门训练

1. $x\leqslant\frac{2}{3}$　**解析**：由已知可得 $2-3x\geqslant0$，$\therefore x\leqslant\frac{2}{3}.$

2. $\frac{13}{2}$　**解析**：$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}=\frac{6+7}{2}=\frac{13}{2}$，公式 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$，$\therefore \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$

3. **解**：$\sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\left|x-\frac{1}{x}\right|$

当 $0<x<1$ 时，$x<\frac{1}{x}$，原式 $=\left|x-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}-x$；当 $-1\leqslant x<0$ 时，$x>\frac{1}{x}$，原式 $=\left|x-\frac{1}{x}\right|=x-\frac{1}{x}$；当 $x<-1$ 时，$x<\frac{1}{x}$，原式 $=\left|x-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}-x.$

4. **解**：$\sqrt{(x-2)^2}-1=\pm x$，$\sqrt{(x-2)^2}=1\pm x$

方程两边平方，$x^2-4x+4=x^2+2x+1$ 或 $x^2-4x+4=x^2-2x+1$

解得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{3}{2}$（不是原方程的根，舍去）　原式 $=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=0+1=1.$

5. **解**：原式 $=x^3-2x^2-\sqrt{3}x^2+x+2\sqrt{3}x-\sqrt{3}+5=x^3-2x^2+x-(\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}x+\sqrt{3})+5=x(x-1)^2-\sqrt{3}(x-1)^2+5=(x-1)^2(x-\sqrt{3})+5.$

当 $x=\sqrt{3}+1$ 时，原式 $=(\sqrt{3}+1-1)^2(\sqrt{3}+1-\sqrt{3})+5=3+5=8.$

6. **解**：由已知可知 x 需满足$\begin{cases}x\geqslant0\\x-1\geqslant0\\x-2\geqslant0\end{cases}$即 $x\geqslant2$，$\therefore$ 当 $x=2$ 时，代数式取最小值为 $1+\sqrt{2}.$

7. **解**：原方程化为 $\sqrt{(x+4)^2}+|x-6|=10$，原式 $=2\sqrt{(x+4)^2}+2|x-6|=2[\sqrt{(x+4)^2}+|x-6|]=2\times10=20.$

1.2　二次根式的运算

1.2.1　二次根式的乘法

一、知识归纳

1. **二次根式的乘法公式**　$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$

即两个二次根式相乘时，根指数不变，被开方数相乘，相乘的结果可以是二次根式，也可以是有理式.

2. 二次根式的乘法公式的应用

逆用乘法公式$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$可以将二次根式进行化简，这里的$a,b$可以表示数或代数式.

可以将根号内的平方因式移到根号外.

但要注意公式$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & a\geqslant0\text{ 时}\\ -a & a<0\text{ 时}\end{cases}$的正确运用.

二、基础篇

例1 计算①$2\times\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{1}{3}}$ ②$\sqrt{\frac{2a}{c^2}}\cdot\sqrt{\frac{2b^2}{a^3}}\cdot\sqrt{\frac{a^2c^2}{b^2}}(a>0,b>0,c>0)$

分析

运用二次根式的乘法公式$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

解：①$2\times\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{1}{3}}=2\left(\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=2\times\sqrt{3\times\frac{1}{3}}=2.$

②$\sqrt{\frac{2a}{c^2}}\cdot\sqrt{\frac{2b^2}{a^3}}\cdot\sqrt{\frac{a^2c^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{2a}{c^2}\cdot\frac{2b^2}{a^3}\cdot\frac{a^2c^2}{b^2}}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2.$

例2 计算：①$\sqrt{(-4)\times(-9)\times\frac{16}{25}}$ ②$\sqrt{2a^3b^2c^4}(a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0)$ ③$\sqrt{4(x-y)^2\cdot x}\cdot\sqrt{9x}(x>y>0)$ ④已知直角三角形的直角边$a=9$，斜边$c=41$，求另一直角边b的长.

分析

逆用乘法公式$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$

解：①$\sqrt{(-4)\times(-9)\times\frac{16}{25}}=\sqrt{4\times9\times\frac{16}{25}}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{\frac{16}{25}}=2\times3\times\frac{4}{5}=\frac{24}{5}$

②$\sqrt{2a^3b^2c^4}=\sqrt{2}\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{(c^2)^2}=\sqrt{2}\cdot a\cdot\sqrt{a}\cdot b\cdot c^2=abc^2\sqrt{2a}$

③$\sqrt{4(x-y)^2\cdot x}\cdot\sqrt{9x}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{(x-y)^2}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{x}=2(x-y)\cdot(\sqrt{x})^2\cdot3=6x(x-y)=6x^2-6xy$

④由勾股定理，得$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{41^2-9^2}=\sqrt{(41+9)(41-9)}=\sqrt{50\times32}=\sqrt{25\times2\times16\times2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{16}=5\times2\times4=40.$

例3 如果$\sqrt{a^2-5a+6}=\sqrt{a-2}\cdot\sqrt{a-3}$成立，则$a$的取值范围是（　　）

A. $a\geqslant2$　B. $a\geqslant3$　C. $2\leqslant a\leqslant3$　D. $a\leqslant3$

分析

公式$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$成立的条件是$a\geqslant0,b\geqslant0$，此题$\sqrt{a^2-5a+6}=\sqrt{(a-2)(a-3)}=\sqrt{a-2}\cdot\sqrt{a-3}$成立，应有$\begin{cases}a-2\geqslant0\\a-3\geqslant0\end{cases}$，即$\begin{cases}a\geqslant2\\a\geqslant3\end{cases}$，$\therefore a\geqslant3.$

答案：B

例4 比较大小：①$3\sqrt{2}$与$2\sqrt{3}$ ②$-5\sqrt{6}$与$-6\sqrt{5}$