Fubian Hanshu Lun

复变函数论

方法100例

Fangfa Yibaili

廖学余 敖为珍 编著
路见可 审

武汉理工大学出版社
WUTP Wuhan University of Technology Press

复变函数论方法一百例

廖学余　敖为珍　编著
路见可　审

武汉理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数论方法一百例/廖学余,敖为珍编著.—武汉:武汉理工大学出版社,2003.12

ISBN 7-5629-2056-7

Ⅰ.复…

Ⅱ.①廖…②敖…

Ⅲ.复变函数

Ⅳ.O174.5

出版发行:武汉理工大学出版社(武汉市武昌珞狮路 122 号　邮编:430070)

经 销 者:各地新华书店

印 刷 者:湖北建始文化局印刷厂

开　　本:880×1230　1/32

印　　张:9.5

字　　数:240 千

版　　次:2003 年 12 月第 1 版

印　　次:2003 年 12 月第 1 次印刷

印　　数:1-2000 册

定　　价:16.00 元

前　　言

为了使学生较好地掌握《复变函数论》的基本理论和方法，启迪思维，提高分析问题和解决问题的能力，我们在多年讲授钟玉泉编《复变函数论》的过程中，对习题的解法进行了一些探讨，并逐步积累了若干难度不同的多解题。几经筛选，修改补充，整编成了这本小册子《复变函数论方法一百例》。现对有关问题说明如下：

1．题目大部分选自钟玉泉编《复变函数论》习题，也有的选自余家荣编《复变函数》习题、李锐夫等编《复变函数论》习题和庄圻泰等编《复变函数》习题。还有少量题目是自编的：包含解析函数定义的八个条件的等价性证明和某些基本理论的典型应用。在解题的过程中，我们曾参阅过一些习题解答，继承和吸收了传统解法，但也有不少新的解法。

2．本书主干由九部分组成，钟玉泉编《复变函数论》九章的标题和本书九个部分一致。题目共 100 个，序号贯穿始终。解法一般先简后繁，横线以上为基本题。解题过程中提到的定理、引理和公式以及例题、习题均指钟玉泉编《复变函数论》，提到的多少题（没有"习"字）则指本书。书末有三个附录：附录一"《复变函数论》中一些主要定理、引理和公式"（内容和序号与钟玉泉编《复变函数论》同）供读者查阅；附录二"对复多值函数用残数理论计算实积分的几个公式"除供阅读第六部分查阅外还有助于加深对多值函数和残数理论的理解；附录三"无穷乘积多解题"超过了教学大纲，仅供有兴趣的读者参考。

3．每部分习题的解法涉及的知识不限于题目所在章次和以前各有关章节，也不完全限于《复变函数论》本身。《复变函数论》

和《数学分析》甚至和中数都有千丝万缕的联系，这在本书中有充分体现。我们扩大思维空间寻求多种解法有助于融汇贯通《复变函数论》的基本理论和方法，沟通有关知识之间的内在联系，培养创新思维能力。

掌握基本理论和方法有一个循序渐进和逐步深化的过程，一定要通过自己用脑思考和动手解答来完成，看本书中题目时可先合起书来自己独立思考解答(主要是搞清解题思路，不一定要写出完整步骤)，然后再和本书中解答对照。解答中引用的定理、引理和公式可查阅附录一或附录二，如果查了还不清楚就要去看教材。初读时或时间不够可先只弄懂一种较易掌握的解法，以后有时间再进一步钻研。

我们要感谢钟玉泉教授为我们写了一部清晰流畅的好教材，有了它才有这本书。路见可教授两度为我们审稿，同时提出了一些新的解法，对第100题的解法进行了完善，并对编写工作提出了有价值的指导性意见。对函数论老专家的辛勤劳动和指点，我们表示深深的敬意和感谢。对我们曾参阅过的有关习题解答的作者我们表示诚挚的感谢。湖北民族学院有关领导和理学院有关领导对出版本书非常重视和关心，在出版基金上给予了很大支助，我们表示衷心的感谢。我们还要感谢本院学报编辑部杨光宗老师，他为本书的出版做了很多默默无闻的工作。

限于认识和学识水平，疏漏之处和缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编者

2002年11月25日

于湖北民族学院

符 号 表

N	自然数集
Z	整数集
R	实数集
C	复数集
Re	实部
Im	虚部
i	虚数单位
$\lvert z \rvert$	复数 z 的模
Arg	幅角
arg	主幅角
$\bar{z}$	复数 z 的共轭复数
$N_\rho(z_0)$	点 z_0 的 ρ 邻域
$N(z_0)$	点 z_0 的某个邻域
$N_\rho^0(a)$	点 a 的去心 ρ 邻域
$N^0(a)$	点 a 的某个去心邻域
K_{AB}	直线 AB 的斜率
$\Leftrightarrow$	充要条件
$\Rightarrow$	必要条件
$\Leftarrow$	充分条件
$\because$	因为
$\therefore$	所以
C.-R.	柯西 - 黎曼条件
C^{-}	顺时针方向的曲线

$\overline{D}$	区域 $D+D$ 的边界曲线
∞	无穷远点
$+\infty$	正无穷大
$-\infty$	负无穷大
$\forall$	任给
$\exists$	存在
$s.t$	使得
$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\subset$	包含于
$\cup$	并集
$\cap$	交集
max	最大值
min	最小值
sup	上确界
inf	下确界
$\overline{\lim}$	上极限
$d(E)$	点集 E 的直径
$\rho(z_0, E)$	点 z_0 到点集 E 的距离
$\Delta_C \arg f(z)$	当动点 z 扫过曲线 C 时 $f(z)$ 幅角的改变量
$N(f, C)$	函数 $f(z)$ 在围线 C 内零点的个数
$P(f, C)$	函数 $f(z)$ 在围线 C 内极点的个数
(z_1, z_2, z_3, z_4)	四点 z_1, z_2, z_3 和 z_4 的交比
$\{D, f(z)\}$	解析元素
$\square$	证毕
$\mid$	整除
$\nmid$	不整除

目　录

一　复数与复变函数

1　试证复平面上三点 $z_1=0, z_2=a+b\mathrm{i}$ 和 $z_3=\dfrac{1}{-a+b\mathrm{i}}$ 共线．

证 1　$z_1=0, z_2=a+b\mathrm{i}$,

$$z_3=\frac{1}{-a+b\mathrm{i}}=-\frac{a+b\mathrm{i}}{a^2+b^2}\text{ 为三不同点，}$$

$\Rightarrow \dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=-\dfrac{1}{a^2+b^2}$ 为非零实数，

$\Rightarrow$ 三点 z_1、z_2 和 z_3 共线．　□

证 2　$K_{z_1z_2}=\dfrac{b}{a}$，过点 z_1、z_2 的直线方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$．

$\Rightarrow$ 点 z_3 的坐标$\left(-\dfrac{a}{a^2+b^2},-\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$满足方程 $y=\dfrac{b}{a}x$，

$\Rightarrow z_1$、z_2 和 z_3 共线．　□

证 3　$K_{z_1z_2}=\dfrac{b}{a}=K_{z_1z_3}$，

$\Rightarrow z_1$、z_2 和 z_3 共线．　□

证 4　$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \\ -\dfrac{a}{a^2+b^2} & -\dfrac{b}{a^2+b^2} & 1 \end{vmatrix}=0$，

$\Rightarrow z_1$、z_2 和 z_3 共线．　□

证 5　$|z_1z_2|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|z_1z_3|=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$，

$$|z_2z_3| = \sqrt{a^2\left(1+\frac{1}{a^2+b^2}\right)^2 + b^2\left(1+\frac{1}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$= \left(1+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\sqrt{a^2+b^2}$$

$$= |z_1z_2| + |z_1z_3|,$$

$\Rightarrow z_1$、z_2 和 z_3 共线. □

证 6　$z_1 = 0, z_2 = a + bi,$

$$z_3 = -\frac{a+bi}{a^2+b^2} \text{ 为 } z \text{ 平面上三点},$$

$$\Rightarrow \arg z_3 = \arg\left(-\frac{1}{a^2+b^2}\right) + \arg(a+bi)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \pi + \arg z_2, \\ z_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow z_1$、z_2 和 z_3 共线. □

2　已知正方形 $z_1z_2z_3z_4$ 的相对顶点 $z_1(0,-1)$ 和 $z_3(2,5)$，z_1、z_2、z_3 和 z_4 沿逆时针方向排序，求顶点 z_2 和 z_4 的坐标.

解 1　如图 1.1，

$$z_0 = \frac{z_1+z_3}{2} = 1 + 2i.$$

由复数乘法的几何意义，有

$$z_4 - z_0 = (z_3 - z_0)e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$z_2 - z_0 = (z_3 - z_0)e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

$$\therefore z_4 = (1+2i) + [(2+5i) - (1+2i)]i$$

$$= -2 + 3i,$$

$$z_2 = (1+2i) - [(2+5i) - (1+2i)]i$$

$$= 4 + i.$$

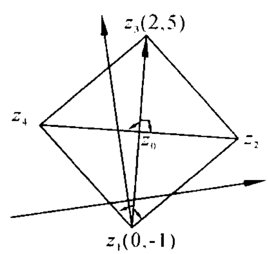

图 1.1

解 2 $\begin{cases} z_4 - z_1 = (z_3 - z_1)e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ z_2 - z_1 = (z_3 - z_1)e^{-\frac{\pi}{4}i} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

解之,得 $z_4 = -2 + 3i, z_2 = 4 + i$.

解 3 由复数加减法与对应向量加减法相一致和复数乘法的几何意义,有

$$\begin{cases} z_3 - z_1 = (z_2 - z_1) + (z_4 - z_1) \\ z_4 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\frac{\pi}{2}i}, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 2 + 6i = z_2 + z_4 + 2i \\ z_4 + i = (z_2 + i)i \end{cases}$.

解之,得 $z_4 = -2 + 3i, z_2 = 4 + i$.

解 4 由复数对应的向量是自由向量和复数乘法的几何意义,有

$$\begin{cases} z_2 - z_1 = z_3 - z_4 \\ z_3 - z_2 = (z_1 - z_2)e^{-\frac{\pi}{2}i}, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} z_2 + i = 2 + 5i - z_4 \\ 2 + 5i - z_2 = (-i - z_2)(-i). \end{cases}$

解之,得 $z_2 = 4 + i, z_4 = -2 + 3i$.

解 5 $\because z_2$、z_4 满足方程 $|zz_1| = |zz_3| = \dfrac{|z_1z_3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{20}$,

$\therefore$ 其坐标(x, y)满足方程

$$\begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 = 20 \\ (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 20, \end{cases}$$

解之,得 $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 3. \end{cases}$

结合 z_2、z_3 的位置分析，知 $z_2 = 4 + i, z_4 = -2 + 3i$.

解6 由解1，知点 z_0 的坐标为(1,2).

由 $K_{z_0z_2} = -\dfrac{1}{K_{z_0z_3}}$，得 $x_2 + 3y_2 - 7 = 0$. (1°)

由 $2\triangle z_2z_3z_0$ 的面积 $= |z_0z_3|^2$，得

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10，即 3x_2 - y_2 - 11 = 0.$$

和(1°)联立解之，得 $x_2 = 4, y_2 = 1$. $\therefore z_2 = 4 + i$.

同法可得 $z_4 = -2 + 3i$.

解7 z_2、z_4 均满足下列关系式：

$$\begin{cases} |zz_0| = |z_3z_0| = \sqrt{10}, \\ K_{zz_0} = -\dfrac{1}{K_{z_3z_0}} = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

即坐标(x,y)均满足方程组

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10, \\ \dfrac{y-2}{x-1} = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

解之，得$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{cases}$；$\begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$.结合 z_2、z_4 的位置分析，知 $z_2 = 4 + i, z_4 = -2 + 3i$.

3 z_1、z_2 是两个复数，试证：

(1) $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$，并说明其几何意义；

(3) 若 $|z_1| = \lambda |z_2|, \lambda > 0$，则

$$|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|.$$

证(1)　证 1　由复数模的几何意义及三角形两边差小于第三边，即得

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|.$$ □

证 2　由三角不等式，有

$$|z_1|=|z_1-z_2+z_2|$$
$$\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|$$
$$\Rightarrow|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|. \qquad (1°)$$

同理，$|z_2|-|z_1|\leqslant|z_2-z_1|$.

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow-|z_1-z_2|\leqslant|z_1|-|z_2|\\ (1°)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|.$$ □

证 3　由余弦定理(图 1.2)，

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$\geqslant|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|$$
$$=(|z_1|-|z_2|)^2.$$
$$\Rightarrow|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$ □

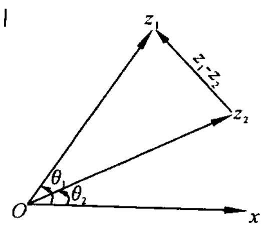

图 1.2

证 4　$|z_1-z_2|^2$

$$=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$
$$\geqslant|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\overline{z_2}|$$
$$=(|z_1|-|z_2|)^2,$$
$$\Rightarrow|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$ □

证 5　设 $z_j=x_j+\mathrm{i}y_j(j=1,2.)$，则

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$$

$$\Leftarrow |z_1 - z_2|^2 \geqslant ||z_1| - |z_2||^2$$
$$\Leftarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \geqslant (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2)$$
$$- 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)},$$
$$\Leftarrow \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \geqslant x_1 x_2 + y_1 y_2,$$
$$\Leftarrow x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 \geqslant 2x_1 x_2 y_1 y_2,$$
$$\Leftarrow (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \geqslant 0.$$
□

注 等号"="仅当 z_1、z_2 在从原点出发的同一条射线上时成立.

(2) **证 1** 左式

$$= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$$
$$= z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2}$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2$$
$$= \text{右式}.$$

几何意义:平行四边形两对角线的平方和等于各边平方和(图 1.3). □

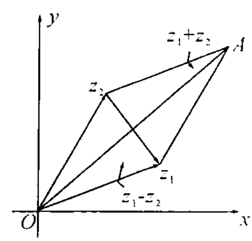

图 1.3

证 2 由复数加减法与对应向量加减法(平行四边形法则)的一致性及平面几何定理"平行四边形两对角线的平方和等于各边平方和",即证. □

证 3 只证等式成立.由余弦定理,

$$\left.\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos\angle Oz_1 A \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos\angle z_2 O z_1, \\ |z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos\angle z_2 O z_1. \end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$
□

证 4 设 $z_j = x_j + iy_j (j = 1,2.)$,

$$\Rightarrow\begin{cases}|z_1+z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2;\\ |z_1-z_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(x_1{}^2+y_1{}^2+x_2{}^2+y_2{}^2)$$

$$=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$ □

证 5

$$\left.\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\\ |z_1-z_2|^2&=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$ □

(3) **证 1** 设

$$\left.\begin{aligned}&z_2=re^{i\theta_2},\qquad(2^\circ)\\ &|z_1|=\lambda|z_2|,\lambda>0.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow z_1=\lambda re^{i\theta_1}\\ &(2^\circ)\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow|z_1-\lambda^2z_2|=|\lambda re^{i\theta_1}-\lambda^2re^{i\theta_2}|$$

$$=\lambda|re^{i\theta_1}-\lambda re^{i\theta_2}|$$

$$=\lambda|re^{-i\theta_2}-\lambda re^{-i\theta_1}|$$

$$=\lambda|\overline{z_2}-\overline{z_1}|$$

$$=\lambda|z_1-z_2|.$$ □

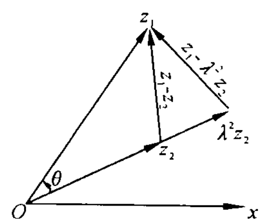

图 1.4

证 2 $|z_1|=\lambda|z_2|,\lambda>0$(图 1.4).

$$\left.\begin{aligned}&\xRightarrow{\text{余弦定理}}|z_1-\lambda^2z_2|^2=|z_1|^2+\lambda^4|z_2|^2-2\lambda^2|z_1||z_2|\cos\theta\\ &=\lambda^2|z_2|^2+\lambda^4|z_2|^2-2\lambda^3|z_2|^2\cos\theta\\ &(\lambda|z_1-z_2|)^2=\lambda^2(|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos\theta).\\ &=\lambda^2(\lambda^2|z_2|^2+|z_2|^2-2\lambda|z_2|^2\cos\theta)\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow|z_1-\lambda^2z_2|^2=(\lambda|z_1-z_2|)^2.$$

$$\Rightarrow|z_1-\lambda^2z_2|=\lambda|z_1-z_2|$$ □

4 证明 z 平面上圆周的方程可以写成

$$Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+C=0,$$

其中 A、C 为实数，$A\neq 0$，β 为复数，且 $|\beta|^2>AC$.

证 1 设圆周的复数方程为 $|z-z_0|=R$.

$\Leftrightarrow |z-z_0|^2=(z-z_0)\overline{(z-z_0)}=R^2$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-z_0\bar{z}-\bar{z}_0z+z_0\bar{z}_0-R^2=0$

$\Leftrightarrow Az\bar{z}-Az_0\bar{z}-A\bar{z}_0z+A(|z_0|^2-R^2)$

$\quad =Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+C=0,$

其中 $A\neq 0$，A、$C=A(|z_0|^2-R^2)$ 为实数，$\beta=-Az_0$ 为复数，且 $|\beta|^2=A^2|z_0|^2>A^2(|z_0|^2-R^2)=AC$. □

证 2 $Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+C=0$,

其中 A、C 为实数，$A\neq 0$，β 为复数，且 $|\beta|^2>AC$.

$\Leftrightarrow z\bar{z}+\dfrac{\beta}{A}\bar{z}+\dfrac{\bar{\beta}}{A}z+\dfrac{C}{A}=0$，其中 A、C 为实数，$A\neq 0$，β 为复数，且 $|\beta|^2>AC$.

$\Leftrightarrow (z+\dfrac{\beta}{A})(\bar{z}+\dfrac{\bar{\beta}}{A})+\dfrac{C}{A}-\dfrac{|\beta|^2}{A^2}=0$，其中 A、C 为实数，$A\neq 0$、β 为复数，且 $|\beta|^2>AC$.

$\Leftrightarrow |z-z_0|=R$，其中 $z_0=\dfrac{-\beta}{A}$，$R=\dfrac{\sqrt{|\beta|^2-AC}}{|A|}$，$A$、$C$ 为实数，$A\neq 0$，β 为复数，且 $|\beta|^2>AC$，此即为 z 平面上以 z_0 为圆心，以 R 为半径的圆周的复数方程. □

证 3 设圆周的直角坐标方程为

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0 \\ x=\dfrac{z+\bar{z}}{2},\ y=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}} \end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-(a+b\mathrm{i})\bar{z}-(a-b\mathrm{i})z+a^2+b^2-r^2=0$

$\Leftrightarrow Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+C=0,$

其中 $A \neq 0$，A、$C = A(a^2+b^2-r^2)$ 为实数，$\beta = -A(a+bi)$ 为复数，且 $|\beta|^2 = A^2(a^2+b^2) > A^2(a^2+b^2-r^2) = AC$. □

证 4 设圆周的直角坐标方程为

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

其中 $D^2 + E^2 > 4F$.

$\Leftrightarrow z\bar{z} + \left(\dfrac{D+Ei}{2}\right)\bar{z} + \left(\dfrac{D-Ei}{2}\right)z + F = 0$，其中 $D^2 + E^2 > 4F$.

$\Leftrightarrow Az\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + C = 0$,

其中 $A \neq 0$，A、$C = AF$ 为实数，$\beta = A\left(\dfrac{D+Ei}{2}\right)$ 为复数，且

$$|\beta|^2 = A^2\left(\frac{D^2+E^2}{4}\right) > A^2F$$

$$= AC$$

□

5 已知 (1) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$;

(2) $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

求证 z_1、z_2、z_3 是一个内接于单位圆周 $|z| = 1$ 的正三角形的三个顶点.

证 1 由已知和第 3(2) 题结论，有

$$\begin{aligned}|z_1 - z_2|^2 &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_1 + z_2|^2\\ &= 2(1+1) - |-z_3|^2\\ &= 3,\end{aligned}$$

$\Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3}$.

同理，$|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \triangle z_1z_2z_3$ 是等边三角形，即正三角形

(2)

$\Rightarrow z_1$、z_2、z_3 是一个内接于单位圆周 $|z| = 1$ 的正三角形的三个顶点.

□