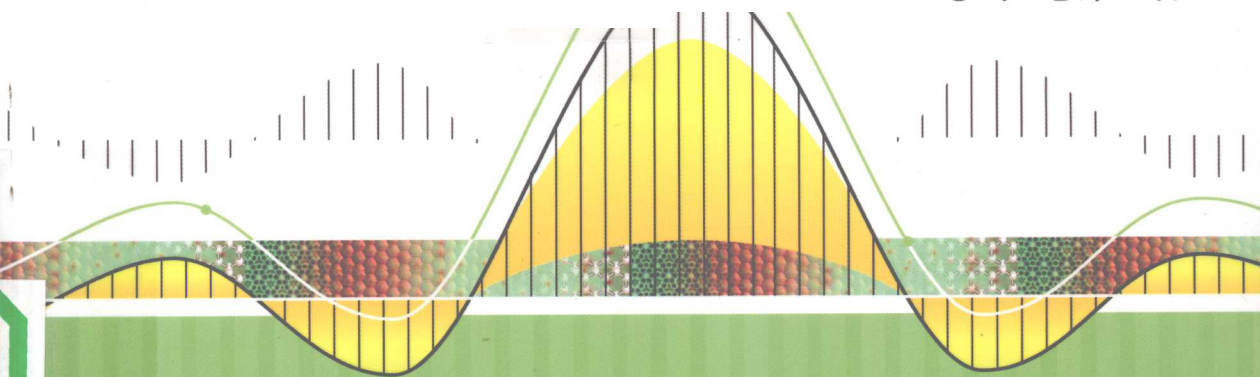


Control Performance Analysis
for Fractional Order Systems

分数阶系统 控制性能分析

© 汪纪锋 著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

重庆市自然科学基金资助项目

重庆市教委科研基金资助项目

Control Performance Analysis
for Fractional Order Systems

分数阶系统控制性能分析

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书从数学基础、经典分析、现代分析、数字实现四个方面对分数阶系统的控制模型、频率特性、稳定性能、空间根轨迹、能控性和能观性、分数阶频域控制器的综合设计、分数阶状态观测器设计等内容进行了定性与定量的论证说明，为分数阶系统的理论分析与应用研究提供了重要的理论依据和验证手段。对从事系统分析及应用研究、控制理论、电子信息和自动化等专业研究的科研人员、工程技术人员及大学生、研究生，具有重要的参考价值。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

分数阶系统控制性能分析/汪纪锋著. —北京：电子工业出版社，2010.1
ISBN 978-7-121-10158-8

I. 分… II. 汪… III. 非线性控制系统—性能分析 IV. 0231.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 243779 号

责任编辑：史 涛 文字编辑：赵 娜

印 刷：北京市天竺颖华印刷厂

装 订：三河市鑫金马印装有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本：787×980 1/16 印张：9.75 字数：187 千字

印 次：2010 年 1 月第 1 次印刷

印 数：3 000 册 定价：29.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

序

自贝塔朗菲提出一般系统论以来，关于系统的概念和理论在各个领域得到了不同程度的发展。从20世纪80年代初我国著名学者钱学森提出了“三个层次一座桥梁”的系统学科体系开始，系统方法已经充分地渗透到工程技术、技术科学、基础科学，甚至哲学层面中。如今，一个由系统工程、系统技术、系统理论和系统哲学构建而成的统一的认知体系正日渐成熟。

具体到基础科学层面，系统理论经历了系统存在论（经典系统论）、系统演化论（耗散结构理论、超循环理论、协同学）和系统复杂性理论（关于系统具有非线性现象或开放环境的理论）三个发展阶段。目前仅有系统存在论能够进行有效的定量分析，因此，从应用的角度，尤其是对于传统的自然科学与工程技术的应用而言，经典的系统理论仍然处于核心地位，具有极其显著的实际意义。

当前，经典系统理论的研究已经比较成熟，成果也非常丰硕。综合来看，可以根据系统的不同类型，或者具有的不同特性作出不同的划分，划分出来的每部分的内容也都是很完备的。如按照是否具有叠加特性，划分为线性系统理论和非线性系统理论；按照是否具有概率特性，划分为确定系统理论和随机系统理论；按照激励来源的不同，划分为自治/自组织系统理论和他励/他组织系统理论等。

本书作者采用了一个与众不同的划分，从数学的角度来看，这种划分说明的是描述系统的微分方程是否具有非整数的阶次，而从物理学的角度来说，则是系统是否具有柔性结构特征。这样的划分产生了一个有趣的现象，那就是划分出来的两部分内容显现出极大的不对称性。一方面，现有研究成果几乎全部属于整数阶微分方程描述下的刚性系统理论；

而另一方面刚好相反，基于非整数阶微分方程描述的柔性系统理论的研究成果却相当匮乏。事实上，绝对的刚性结构系统是不存在的，一个实际系统或多或少都具有一些柔性特征。因此，本书作者用非整数阶微分方程来从数学上刻画非整数阶系统，并把它作为一种一般化的方法对系统相关特性加以研究，是非常值得关注和提倡的。

控制本身属于系统技术的范畴，是对分析所得到的系统性能进行改造的必要手段，因此，对系统的控制本质上是对系统性能的控制。自1948年维纳提出控制论思想以来，在系统性能的需求导向下，系统基本的稳定性需求，系统某性能最优的需求，系统的适应性需求，系统鲁棒性需求，控制理论和技术等取得了长足的进步。然而，不同的控制方式往往针对不同类型的系统，对于上面提到的非整数阶系统来说，关于其控制问题的研究就显得十分不足。不过，这恰是本书所关注的一个主要内容，总体上看，它从外部输入/输出和内部状态两个角度研究了非整数阶系统的控制问题，得到了许多有意义的结果。

国际上曾出现过几本关于非整数阶微积分和非整数阶微分方程的专著，然而最新出版的Igor Podlubny的《Fractional Differential Equations》(Academic Press, New York, 1999)，至今也已有十年。不少学者近年来开始试图运用非整数阶数学理论进行系统与控制的研究，也取得了一些成果，但是比较独立和凌乱。本书正是综合了作者和其他学者的研究成果，对非整数阶系统及其控制问题进行有条理的分析、归纳和总结，具有独到的价值。

希望本书的出版能够给读者带来一定的启发，更能为非整数阶系统及其控制理论的进一步发展和完善起到促进和推动作用。

中国工程院院士 孙才新

2009年8月8日

前 言

在国家以信息化带动工业化，以工业化促进信息化发展的大环境下，信息科学领域的系统理论与控制技术研究取得了不断的扩展和深入。目前，该方面的相关专著作已经十分丰富，从静态的到动态的，线性的到非线性的，确定的到随机的，最优的到鲁棒的，自适应的到自组织的等。而本书将从另一个角度——系统阶次上，结合当前国内外相关进展以及作者的研究成果，来揭示系统理论与控制技术有别于以往的一个新的研究方向。

现有理论，往往是把所研究的控制系统设定为整数阶次系统，并运用整数阶次的微分方程或矩阵微分方程对其进行建模分析与控制综合。然而，严格地说，这种“整数阶次”的假定在实际控制系统中并不总是成立的，实际中存在的系统几乎都是非整数阶系统，尤其对于那些具有非刚性运动的动态系统（如热力学系统、柔性系统、黏粘性系统等）而言，采用非整数阶次的微分方程描述则更为准确恰当。这里把该类具有非整数阶次动态的系统称为非整数阶系统，也就是分数阶系统。

现今已有的系统理论是将实际系统近似为整数阶系统加以研究的方法，对于信息化、集成化、精准程度要求不高的传统工业体系是可用的，而随着现代工业和现代科学技术需求的不断提升，需要真实准确的数学模型对系统进行分析和综合，在更大程度上改善系统性能，达到高精准的目的。同样在控制方面，控制对象不断扩展与性能指标要求不断提高，利用整数阶模型来覆盖所有常规的控制系统的逐步开始显示出缺陷和不

足，如跟踪误差与扰动抑制的精度，参数控制的灵活度等都会受到不同程度的制约和影响。为此，要让控制系统获得更为广泛的工作空间和理想的控制性能，就有必要建立起一套更具一般性的系统控制理论，并能够使之有效地指导实践。

正是这一背景促成了这本关于分数阶系统理论及其控制技术的专著地完成，其理论意义与实际应用价值在于：

(1) 分数阶微积分的数学理论和分数阶控制系统理论进行交叉研究，能够对两个领域的发展起到良好的协调促进作用，分数阶微积分数学理论的研究国内外不少学者已有较长时间的积累，而在分数阶控制系统理论方面的研究只是起于近几年，尤其在国内外尚处于起步阶段。

(2) 国内外对于分数阶控制理论和系统的分析综合研究已经具有了初步成果，部分成果已经通过试验或实物实现并转化为生产力，促进了理论的进步和工业技术标准的提高，特别是在精细加工和宇航等技术性很强的行业，对其要求非常迫切。

(3) 分数阶控制理论与应用将为控制理论与系统理论的进一步完善开辟广阔的研究空间和良好的应用前景，对控制科学的发展也具有重要而深远的意义。

近年来，分数阶系统及理论的研究在系统分析领域已有不少国内外学者涉及，并有望形成研究热点，但从总体研究形势来看仍处于起步阶段。为此，作者指导的研究小组在重庆市科委自然科学基金项目“分数阶控制系统理论与技术研究”（项目编号：CSTC,2004BB2165）和重庆市教委科学研究项目“非整数阶系统控制模型及性能研究”（项目编号：KJ-060506）的资助下，参考借鉴国内外同行学者的一些研究成果及资料，

对分数阶系统一些控制性能进行了有重点的深入研究，获得了部分有价值的研究成果，经整理形成本书。其目的在于为从事系统分析和系统控制的研究人员和高等院校师生提供一本介绍分析与综合分数阶系统控制性能的专业著作，以有助于他们在系统控制领域进行的研究、教学和分析工作。

全书共 5 章，由数学基础、经典分析、现代分析、数字实现依次递进的四个部分组成。第 1 章和第 2 章结合国内外现有研究成果，分别对分数阶微积分和分数阶系统的数学模型进行总结和阐述。第 3 章讨论了分数阶系统的经典分析方法，包括传统时域分析法和扩展频域分析法。其中，扩展频域分析法是传统方法的一个扩充，它从分数阶基本代数方程解的性质出发，研究其唯一解的条件，并在此基础上将分数阶系统传递函数合理分解成若干基本单元，分别分析其频率特性，综合出整个系统的稳定判据，该方法提供了分数阶系统频域分析的新思路。这一部分还研究了几种不同的分数阶频域控制器的综合设计。第 4 章讨论了分数阶系统的现代分析方法，一方面以分数阶状态模型为基础进行系统特性分析，包括系统最为核心的内外部稳定性能，能控性和能观性能判据以及状态观测器设计；另一方面，以扩展频域分析法为基础，将分数阶系统的特征根分布拓展到一个特殊的空间中，建立有别于传统的空间根轨迹分析方法，实现分数阶动态系统的图形化判稳。第 5 章研究了分数阶微积分数值计算的不同算法，并实现分数阶系统整体的数值仿真，为分数阶系统的理论分析与应用研究提供了重要的验证手段。

重庆邮电大学控制理论与控制工程专业 2003 级硕士研究生李元凯（现在上海交通大学攻读博士学位）在完成基金项目研究过程中，在分数

阶系统扩展频域分析、空间根轨迹分析等方面取得了有成效的研究成果，2005 年应邀出席在英国召开的国际学术会议，宣读了题为“**Frequency Domain Analysis and Applications for Fractional-order Control Systems**”的论文，得到与会学者的好评。同时他也为本书的出版做了大量的工作。另外，该专业硕士研究生于凤敏在控观性方面、于南翔在分数阶微积运算器方面也做了有意义的研究。在此作者也一并向他们致谢。

衷心感谢中国工程院院士、重庆大学孙才新教授为本书作序。

鉴于目前分析与综合分数阶系统控制性能的研究刚起步不久，还期望更多同行学者对其展开深入研究，本书愿能作“引玉之砖”。同时，也因作者学识和水平有限，书中错漏在所难免，希望各位读者能给予批评指正。

汪纪锋

2009 年 11 月 9 日于

重庆邮电大学 茶花园

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 分数阶控制系统的简介	1
1.2 分数阶控制系统的实例	2
1.3 分数阶控制系统的应用	4
第 2 章 分数阶控制系统的数学基础	6
2.1 分数阶微积分的定义	7
2.2 分数阶微积分的存在性和唯一性	14
2.3 分数阶微积分的 Laplace 变换	19
2.4 分数阶控制系统的传递函数描述	20
2.4.1 连续分数阶系统的传递函数描述	20
2.4.2 分数阶系统传递函数的离散化	22
2.5 分数阶控制系统的状态空间描述	24
2.6 分数阶系统的复频域模型	26
2.7 分数阶系统的神经网络模型	27
第 3 章 分数阶控制系统时域和复频域的分析与综合	29
3.1 连续 LTI 分数阶系统	29
3.1.1 分数阶连续信号与系统响应	29
3.1.2 连续分数阶控制器	32
3.2 离散 LTI 分数阶系统	35
3.2.1 分数阶采样信号与系统响应	35
3.2.2 离散分数阶控制器	37
3.3 分数阶系统稳定性分析	38
3.4 分数阶系统近似数值分析	40
3.5 分数阶系统一般频域分析	42
3.6 分数阶系统扩展频域分析	45
3.6.1 分数阶代数方程解性质	45
3.6.2 扩展频率特性	46

3.6.3	扩展频率稳定性	54
3.7	分数阶频域控制器	58
3.7.1	扩展频域 $P(ID)^{\alpha}$ 控制器	58
3.7.2	超前校正器	62
3.7.3	超前滞后校正器	71
第 4 章	分数阶系统的稳定性、能控性和能观性分析	76
4.1	稳定性的基本定义和准则	76
4.1.1	外部稳定性	76
4.1.2	内部稳定性	77
4.2	分数阶系统内部稳定性分析	79
4.3	分数阶系统外部稳定性分析	81
4.3.1	平面根轨迹方法	81
4.3.2	空间根轨迹方法	86
4.4	分数阶系统的能控性和能观性定义	95
4.5	分数阶线性定常系统的能控性判据	95
4.5.1	基于状态空间描述的分数阶系统的解	96
4.5.2	分数阶线性定常系统能控性判据	97
4.6	分数阶线性时变系统的能控性判据	101
4.7	分数阶线性定常系统的能观性判据	103
4.8	分数阶线性定常系统的全维状态观测	112
4.8.1	分数阶系统状态的全维可重构性	112
4.8.2	分数阶全维状态观测器设计	115
第 5 章	分数阶控制系统的数字实现	122
5.1	分数阶微积分运算器	122
5.1.1	分数阶微积分的传统算法与改进算法	122
5.1.2	改进算法的特点及其与传统方法的比较	130
5.2	分数阶微积分运算器的应用	131
5.2.1	求解分数阶微分方程	132
5.2.2	分数阶控制系统性能分析	132
后记	136
参考文献	139

第 1 章 绪 论

1.1 分数阶控制系统的简介

控制系统是能够合理利用信息促进物质和能量有效利用的系统或过程。结合国家自然科学基金委在《自然科学学科发展战略调研报告——自动化科学与技术》中总结的，以及戴先中教授在《自动化科学与技术学科的内容、地位与体系》中提出的控制系统架构，本书将控制系统的广义体系结构重新归纳划分为四个部分，如图 1-1 所示。

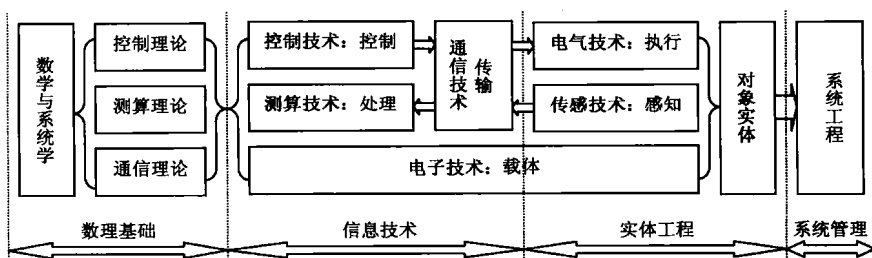


图 1-1 控制系统广义体系结构

数理基础部分是控制系统的理论支撑，包括系统学、数学、物理、力学、生命科学、思维科学和脑科学等基础性内容。信息技术部分则是控制系统的技术支持，并不涉及具体的控制对象。而实体工程部分才是具体的广义被控系统，是控制系统理论与技术的物理层，可涉及工业、农业、电力、空天、国防、交通、民用、生物医学、资源环境、社会科学等自然与社会系统的各方面。系统管理部分则处于对控制系统资源进行运筹、调度、调配与决策的总体或宏观层面。

分数阶控制系统是控制系统的子集，在系统本身或控制模块方面具有非整数阶次特性。考虑控制系统的广义结构，产生这种分数阶次特性的主要因素可能分布于控制、信号和系统三个方面。第一，控制技术中为获得更好的控制性能，需要利用具有分数阶特质的控制器件；第二，测算技术中的量测信号或信号处理的算法主动或被动地具有分数阶特质；第三，对象实体本身难以用传统整数阶次数学模型进行准确描述和精确分析，需要对其建立分数阶数学模型。因此，分数阶控制系统从一般意义上可以定义为在控制策略、信号处理或对象实体上具有非整数阶次特性的受控系统。为方便起见，有时也称为分数阶系统。

1.2 分数阶控制系统的实例

实际中存在的系统或多或少都受非整数阶次的影响，尤其具有记忆性和遗传性的黏粘性物质以及大规模扩散或热传导等动态过程，均为典型的非整数阶系统或过程，它们需要用分数阶模型才能得到较为准确的数学描述与满意的控制性能。下面用柔性物理系统与弥散性动态过程这两个实例加以说明。

具有记忆性质的旋转梁 (Rotating Beam^[1])，有两个控制转矩，作用于刚性转轴上的集中力 $U_1(t)$ ，分散作用于梁的每单位长度上的分布力 $U_2(z,t)$ ，如图 1-2 所示。图中 $Y(z,t)$ 是梁的形变量。根据材料力学相关原理，设 E 为黏粘性模量，每单位段的梁所受压力 σ 与张力 ε 满足如下方程：

$$P_\sigma(\sigma) = P_\varepsilon(\varepsilon) \quad (1.1)$$

其中， P_σ 和 P_ε 是分数阶微分算子。此黏粘性系统理想的最小描述由式(1.2)给出：

$$P_\sigma = 1 + a\partial^\nu / \partial t^\nu \quad (1.2)$$

$$P_\varepsilon = E + b\partial^\nu / \partial t^\nu \quad (1.3)$$

其中, $\nu \in (0,1)$ 为分数导数的阶次, a, b 为固有系数参数。分数阶微分算子解析表达式为

$$\frac{\partial^\nu P}{\partial t^\nu} = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{-\nu} P(\tau) d\tau, \quad (0 < \nu < 1) \quad (1.4)$$

可以看出, 此例中的刚性回转记忆梁是用具有分数阶次的微分方程来描述的, 是一个受控的分数阶系统。

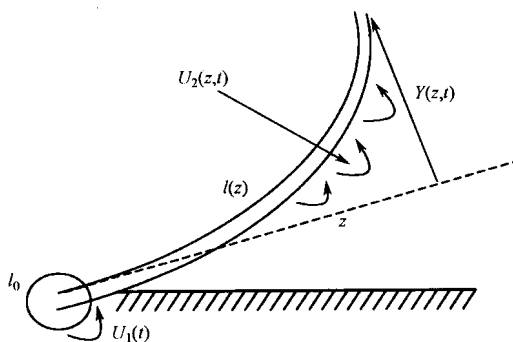


图 1-2 带有刚性转轴的内存性旋转梁

除了物理系统之外, 一些弥散性动态过程同样具有分数阶特质。如在某些物质的热扩散过程^[2]中, 其热能溢出 $q(t)$ 与温度 $T(t)$ 之间存在如下关系:

$$q(t) = \frac{d^{0.5}T(t)}{dt^{0.5}} \quad (1.5)$$

这同样是一个系统本身具有非整数阶特质的分数阶系统。此外, 一些存在特殊规律衰耗的 RC 电路其电压电流关系同样具有类似的性质。总之, 具有非整数阶特质的物理系统是普遍存在的。

1.3 分数阶控制系统的应用

虽然分数阶系统控制理论还在逐步完善中，然而近年来，分数阶控制系统的研究已经开始出现在鲁棒控制、图像处理、神经网络和信号处理等信息科学各个领域，人们对其的重视程度越来越高。

在分数阶系统与分数阶控制器方面，分数阶微分电路的初步实现^[3]为分数阶控制器在信息科学领域的普遍应用做了铺垫。分数阶控制器目前主要有四种，一为 TID 控制器。它由积分环节、微分环节和一个分数阶环节并联组成，其结构简单，参数较少，调节方便，但很难达到理想效果。二是 CRONE 控制器^[26]。它由 Oustaloup 提出，由于分数阶控制系统具有很好的鲁棒性，分数阶鲁棒控制器 CRONE 最早获得了成功的应用，现已形成 MATLAB 的 CRONE 控制工具箱，是分数阶控制的一种理想选择。三是 Podlubny 提出的 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器^[14]，可以获得更精确的控制性能，但结构较为复杂，参数较多，有 3 个增益和 2 个阶次参数。基于分数阶系统零极点^[40]的理解，本书提出更合理的 $P(ID)^{\mu}$ 控制器^[41]，在保证控制有效性的基础上，很好地简化了设计复杂性。四是超前滞后校正补偿器，它同样能够取得很好的控制效果，但是需要系统的设计方法。基于分数阶系统扩展频域法对分数阶超前校正器与超前滞后校正器^[41]重新建模，使任意阶控制器在零极点意义和形式上取得统一，与其他控制器相比具有许多不可替代的优点。分数阶控制器的具体内容将在后续章节详细论述。

在分数阶信号与分数阶滤波器方面，文献[4]提出的分数阶 FIR 滤波器为计算一维信号的分数阶微分响应提供了方便算法，然而对于一些特别是能够用有限项多项式描述的信号没有必要采用 Grünwald-Letnikov 分数阶微分下精确的分数阶 FIR 滤波器，为此，文献[5]提出了另一种基

于牛顿级数展开的分数阶离散微分器。文献[6]则提出分数阶微分器系数函数的概念,从而将分数阶滤波器扩展成为一般意义下的分数阶微分器。针对各种信号,文献[7]在频域中将微分算子分解为幅度算子和相位算子进行分数阶微分运算,同时提供了一些信号的分数阶微分运算结果。此外,分数阶预测滤波器的神经网络实现还为图形图像处理^[8]提供了全新的手段。分数阶干扰观测器^[49]、分数阶正弦振荡器^[9]和分数阶Wien-Bridge振荡器^[10]也成功应用于磁盘驱动和信号调制等领域。

综上所述,关于分数阶控制系统的应用研究具有如下特点:在宏观形势上,分数阶的概念正不断融入自动控制、信号处理、网络通信和电子工程等信息领域,正在并且继续为相应领域的技术进步做出实质性的贡献;在微观实物上,分数阶控制系统与分数阶控制器的应用涉及各个领域,分数阶环节的实物实现决定着应用的前景,更加高效精确稳定的分数阶微分电路的设计尤为必要;在控制元件上,分数阶控制器目前的种类还不能满足各领域的需求,并且设计方法不系统,需进一步统一和完善。

第 2 章 分数阶控制系统的数学基础

本章内容为分数阶控制系统的数学基础，包括分数阶微积分和分数阶控制系统数学模型两个部分。

分数阶微积分 (Fractional Calculus) 几乎与 Newton-Leibniz 传统微积分同时出现，最早可以追溯至 Leibniz 和 Hospital 在 1695 年的研究工作^[13]，距今已经有三百多年的历史，然而由于各种实际应用与处理手段上的原因，分数阶微积分在几十年前依然停留在纯粹的理论研究阶段。直到 20 世纪晚期，计算技术的发展和工业技术要求的提高为分数阶微积分由理论阶段向实验及应用阶段的迈进提供了客观条件，分数阶微积分迅速在应用数学、医疗、材料和信息科学等许多基础研究领域得到广泛的应用^[8,9]。在控制科学方面，分数阶微积分方程可以用来很好地对分数阶控制系统进行数学描述，并在此基础上进行系统的动态和稳态性能分析。近二十年来利用分数阶微积分进行分数阶控制系统 (Fractional-order Control System) 研究的成果^[1,26,34]表明，分数阶微积分已经成为分析研究分数阶控制系统的基本数学工具。

分数阶微积分理论以研究函数的分数阶次导数与积分为基本出发点，主要包括分数阶微积分的几种基本定义形式，分数阶微积分的存在性与唯一性以及分数阶微积分的积分变换等^[11~13]内容。本章前三节将对这些内容作简要论述。

分数阶控制系统已经出现多种模型形式，如时域与频域传递函数描述^[13~17]，状态空间描述^[18]，矩阵分式描述与多项式矩阵描述^[19,20]和神经网络模型^[22]等。

分数阶系统的时域传递函数描述为分数阶微分方程，其时域分析较