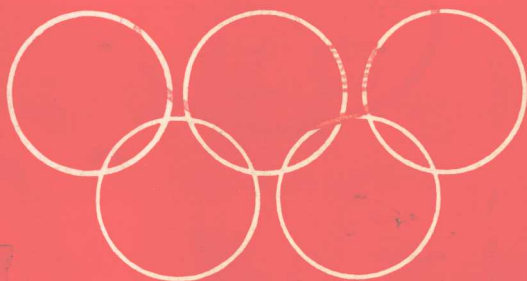


中学数学奥林匹克读物

中学数学中的函数方程

张文忠



北京航空航天大学出版社

中学数学中的 函数方程

张文忠

(京)新登字166号

内 容 简 介

本书通俗系统地讲述了中学数学奥林匹克竞赛和高校入学统考中常见的函数方程类型、它们的初等解法及应用。全书共分五章，即：一、什么是函数方程；二、函数方程的几种常用解法；三、关于递推方程的一些结论；四、二元函数方程的求解；五、函数方程的应用。每章中都精选了各种类型的例题和练习题，并在书后附有全部练习题的解答，以便读者校阅。

本书对象为中学生、中学数学教师和广大的数学爱好者。是一本数学爱好者难得的好书。

中学数学中的函数方程

ZHONGXUE SHUXUE ZHONG DE
HANSHU FANGCHENG

张 文 忠

责任编辑 郭维烈

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

北京密云华都印刷厂印装

787×1092 1/32 印张：7.75 字数：180 千字

1993年6月第一版 1993年6月第一次印刷 印数：2000册

ISBN 7-81012-376-9/O·023 定价：5.70元

前 言

这是为中学的同学们写的一个数学课外读物，我把它献给热爱数学、有志于在数学竞赛和数学考试中取得优秀成绩的广大青少年朋友，献给在中学里培养数学人才的辛勤园丁。

函数方程是数学中一个十分有趣的课题，它紧密地联系着函数和方程这两个重要的概念。这个小册子将介绍在中学数学竞赛和考试中常见的一些具有代表性的函数方程，讲述它们的各种初等解法及其应用。编写时本人力求通俗易懂，以使熟悉中学数学基本知识的读者能轻松而顺畅地阅读它。

这个小册子选用了较多的例题和练习题，不少问题都凝聚着人们利用初等方法求解函数方程的精思妙想。编者期望通过这些例子和习题能有助于领会所讲述的思考方法，增强读者求解数学问题的能力。为了便于读者核对自己的解题是否正确，书后附有全部练习题的解答。

愿这个小册子能给读者带来思维的乐趣和扩展视野的喜悦！

本书在编写中参阅了较多的中学数学期刊资料，限于篇幅未能在文中一一注明，请有关作者予以谅解并表示我的感谢。若发现书中有不妥之处，恳切地希望读者能够指正。

张文忠

写于卫星城西昌

目 录

一、什么是函数方程.....	(1)
1. 函数方程的定义	(1)
2. 最常见的一些函数方程	(5)
3. 函数方程的解	(8)
4. 几个有趣的实例	(16)
练习题一.....	(21)
二、函数方程的几种常用解法.....	(24)
1. 换元法	(24)
2. 解方程法	(31)
3. 待定系数法	(37)
4. 代值减元法	(42)
练习题二.....	(47)
5. 递推求和法	(50)
6. 递推求积法	(57)
7. 数学归纳法	(65)
8. 辅助数列法	(71)
练习题三.....	(78)
三、关于递推方程的一些结论.....	(84)
1. 线性递推方程的概念	(84)
2. 一阶线性递推方程	(89)
3. 二阶线性递推方程	(96)

4. 从二阶到一阶的转化	(104)
5. 一类分式线性递推方程	(111)
练习题四	(119)
四、二元函数方程的求解	(123)
1. 从柯西函数方程的求解说起	(123)
2. 几个重要的二元函数方程	(127)
3. 应用已知的结论求解	(131)
4. 微积分法*	(135)
练习题五	(139)
五、函数方程的应用	(142)
1. 用函数方程定义初等函数	(142)
2. 由函数方程确定函数的性质	(151)
3. 从函数方程到函数不等式	(157)
4. 用函数方程解应用问题	(161)
练习题六	(168)
练习题解答	(171)
练习题一	(171)
练习题二	(177)
练习题三	(189)
练习题四	(211)
练习题五	(224)
练习题六	(232)

一、什么是函数方程

1. 函数方程的定义

在讲述什么是函数方程以前，请先回想一下我们在中学数学课中所学过的有关方程的知识。

大家知道，方程是数学中最古老而又应用比较广泛的重要内容之一。在中学的数学课中，我们从一元一次方程开始，学习过各种代数方程：整式方程、分式方程和无理方程。此后还学习过四种超越方程：指数方程、对数方程、三角方程和反三角方程。这些曾使你兴趣盎然的各种类型的方程贯穿在整个数学学习的过程中，成了中学数学最重要的组成部分之一。

你一定熟悉如下的方程的定义和几个有关的概念：

含有未知数的等式叫做**方程**；

在未知数的允许值范围内，能使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的**解**；

求出方程的解或确定方程无解的过程，叫做**解方程**。

例如，等式

$$x^2 = 2x + 3 \quad (1)$$

就是关于未知数 x 的一元二次方程。你容易求出 $x = -1$ 或 $x = 3$ 是这方程的两个解，事实上，分别将这两个未知数 x 的值代

入式(1)，它两边的值都能相等。除此以外，方程(1)不再有其
它的解。

并不是所有的方程都有解。

例如，方程

$$x^2 + 1 = 0$$

在实数范围内就没有解。

又如，方程

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 3$$

在任何范围内都没有解。

方程的解也可以有无穷多个。

例如，方程

$$2\cos x = 1$$

的解为如下的无穷个数

$$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

我们还可以从函数的角度来看一个方程。比如，一个一元方程的两边的未知数表达式，分别可以看作是同一个自变量的两个函数。

例如，方程(1)的左边是一个二次函数

$$f_1(x) = x^2,$$

右边是一个一次函数

$$f_2(x) = 2x + 3.$$

很明显，对于某一个特定的方程，等式两边的函数是确定的。因此，我们又可以把方程定义成：

含有确定的函数的等式叫做方程。

在这样来看方程时，所谓方程的解，就是使方程两边的

函数值相等的自变量的值；而所谓解方程，就是求出能使这两个函数的值相等的自变量的值，或证明符合这条件的自变量的值不存在。

我们所熟知的用图象解方程的办法，就是建立在上边这种观点之上的。例如，用图象法解方程(1)的作法是：在同一坐标系里分别作出函数

$$f_1(x) = x^2 \text{ 和 } f_2(x) = 2x + 3$$

的图象(图1·1)，由此得抛物线

$y = x^2$ 和直线 $y = 2x + 3$ 的交点坐标是 $A_1(-1, 1)$ 和 $A_2(3, 9)$ 。这表

明，当 $x = -1$ 或 $x = 3$ 时，函数

$f_1(x) = x^2$ 和 $f_2(x) = 2x + 3$ 都有

相等的值(它们分别是1或9)。

由此知 $x_1 = -1$ 或 $x = 3$ 是方程(1)

的两个解。

无论用什么观点来看待上述

的各种方程，都容易发现它们有

一个共同的特点，那就是作为未知

的是一些特定的数值。也就是说，代数方程或超越方程的解

(如果存在的话)都是一些特定的数值。我们接下去要介绍的

是与它们完全不同的另一类有趣的方程，在这种方程的两边

不一定是确定的函数，而至少在某一端中有不确定的、未知

的函数。例如，方程

$$x^2 f(x) + 2 = 3x - f(x) \quad (2)$$

就是含有未知函数 $f(x)$ 的一个简单的例子。此时，解方程(2)

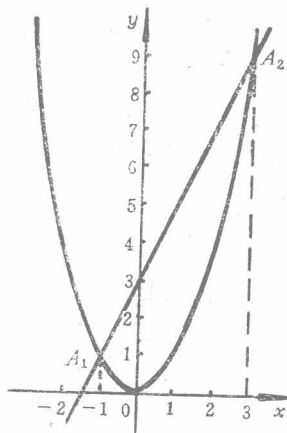


图 1·1

就是要求出能使方程两边变成同样的函数的 $f(x)$ 的解析式(这时自变量 x 取 $f(x)$ 的定义域中的一切值都能使方程成立,而不象在普通方程中那样,只取某些特殊值时才能使方程成立)。这类方程就是我们要介绍的函数方程。为了区别,我们称以前学过的方程为普通方程。

对于函数方程(2)这个简单的例子,我们可以类似于解一元一次方程那样,通过移项、合并等步骤来求解:将函数方程(2)变形为

$$x^2 f(x) + f(x) = 3x - 2,$$

即

$$(x^2 + 1)f(x) = 3x - 2,$$

故方程(2)的解为 $f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$ 。

要验证 $f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$ 确为函数方程(2)的解,只须象大家

熟悉的那样将它分别代入式(2)的左右两边:

$$\text{左边} = x^2 f(x) + 2 = x^2 \cdot \frac{3x - 2}{x^2 + 1} + 2 = \frac{3x^3 + 2}{x^2 + 1},$$

$$\text{右边} = 3x - f(x) = 3x - \frac{3x - 2}{x^2 + 1} = \frac{3x^3 + 2}{x^2 + 1},$$

因左边 = 右边,这表明 $f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$ 确是函数方程(2)

的解。

一般地,我们有:

定义1 含有未知函数的等式叫做**函数方程**。

定义2 能使函数方程成立的函数,叫做**函数方程的解**。

定义3 求出函数方程的解或确定它无解的过程,叫做解

函数方程。

并非所有的函数方程都一定有解。例如，函数方程

$$f(x) - 1 = f(x) + 1$$

就是一个容易想到的没有解的例子，因为移项以后将得到 $0 = 2$ 这样一个不可能成立的式子。

在下一段中我们还会看到有无穷多个解的函数方程的例子，并将逐渐认识到函数方程的一些奇特的性质。

2. 最常见的一些函数方程

虽然在中学的数学课里没有专门讲过函数方程，实际上这种方程对于大家来说并不十分陌生。试看下面几个大家所熟悉的例子：

例1 偶函数的定义：对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意值 x ，如果恒有

$$f(-x) = f(x), \quad (1)$$

那么函数 $f(x)$ 叫做**偶函数**。

此时的关系式(1)就是含有未知函数 $f(x)$ 的一个函数方程。容易验证函数 $f(x) = x^2$ 就是它的一个解。事实上，将 $f(x) = x^2$ 分别代入函数方程(1)的左边和右边，得

$$\text{左边} = f(-x) = (-x)^2 = x^2,$$

$$\text{右边} = f(x) = x^2,$$

可见无论 x 取何值，始终有

$$(-x)^2 = x^2, \text{ 即 } f(-x) = f(x),$$

故函数 $f(x) = x^2$ 是函数方程(1)的一个解。

容易想到函数方程(1)的解远不止 $f(x) = x^2$ 这一个，因为

用完全相同的方法可以验证, 函数

$$f(x) = x^4, \quad f(x) = x^6, \quad f(x) = x^8, \dots,$$

$$f(x) = x^{2n} (n \text{ 为正整数}), \dots$$

以至更一般的只含自变量的偶次方的函数

$$f(x) = g(x^2) \quad (g(x) \text{ 是任意函数}),$$

都是函数方程(1)的解。

由此可见, 函数方程(1)的解有无穷多个(也就是说, 偶函数有无穷多个)。此外, 读者还不难验证, 函数

$$f(x) = \cos x, \quad f(x) = |x|,$$

$$f(x) = \sin^2 x, \quad f(x) = c (c \text{ 是常数}),$$

等等, 都是函数方程(1)的解。

例2 奇函数的定义: 对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意值 x , 如果恒有

$$f(-x) = -f(x), \quad (2)$$

那么函数 $f(x)$ 叫做奇函数。

类似地, 也不难举出函数方程(2)的一些解来。例如

$$f(x) = x, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = x^5, \dots,$$

$$f(x) = x^{2n+1} (n \text{ 是正整数}), \dots,$$

以至任何只含自变量的奇数次方的函数都是函数方程(2)的解, 这种解显然也有无穷多个。

又如, 可以验证, 函数

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = 2^x - 2^{-x},$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot |\operatorname{ctg} x|, \quad f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2},$$

等等, 都是函数方程(2)的解。

例3 周期函数的定义: 如果有一个常数 $T \neq 0$, 使得当

x 取 $f(x)$ 的定义域内的每一个值时, 恒有

$$f(x+T) = f(x), \quad (3)$$

那么函数 $f(x)$ 叫做周期函数, 常数 T 叫做它的一个周期。

周期函数也有无穷多个。例如, 当 n 为正整数时, 函数

$$f(x) = \sin nx$$

就满足函数方程(3)。事实上, 若取常数 $T = \frac{2\pi}{n}$ ($n=1, 2,$

...), 则有

$$\begin{aligned} f(x+T) &= f\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) = \sin n\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \sin(nx + 2\pi) = \sin nx = f(x). \end{aligned}$$

由此可见它们都是周期函数。类似地, 容易验证, 函数

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad f(x) = \operatorname{tg}^2 x,$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}, \quad f(x) = c \quad (c \text{ 为常数}),$$

等等都满足函数方程(3), 即都是它的解。

函数方程(3)的解并非都和三角函数有关, 如上面所举的常数函数 $f(x) = c$ (你可以把它看成是 $f(x) = 0 \cdot x + c$) 就是不含三角函数的周期函数。又如, 函数

$$f(x) = x - [x]$$

也是函数方程(3)的解。这里记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如

$$[-2.3] = -3, [4] = 4, [\sqrt{7}] = 2.$$

很明显, 对任何实数 x , 有

$$[x+1] = [x] + 1.$$

因此, 取 $T=1$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1) - [x+1] = (x+1) - ([x] + 1) \\ &= x - [x] = f(x). \end{aligned}$$

即 $f(x) = x - [x]$ 是函数方程的一个解。这个周期函数的图形如图 1.2 所示，其中各线段上端的小圆圈表示不在图形上的点。

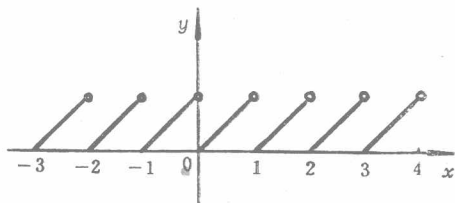


图 1.2

我们在这里把大家早已熟悉的函数的奇偶性和周期性重述了一遍，主要是想引起大家对这三种重要的函数方程的注意：这些例子表明了函数方程可以用来描述某类函数的一些特殊的性质，研究它们具有很大的理论意义；同时也表明了函数方程的解是复杂而多样的，一般说来，解函数方程比解普通方程要困难得多。也正由于此，使得函数方程这个课题在近两百年中引起了人们的极大兴趣，并获得了不少优美的结论。虽然函数方程本身的理论至今尚未臻完善，还有待于人们作进一步的探索，但仅就我们后面所介绍的函数方程的各种初等解法，也足以使读者领略到巧思妙想的乐趣，并由此得到有益的启示。

3. 函数方程的解

在未介绍函数方程的各种解法以前，我们先来看几个函

数方程的解的验证性例子。要验证一个已知函数是某个函数方程的解，最常用的就是代入法，它完全与普通方程的验根相类似。

例1 试证明 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 满足函数方程

$$f(x) + f(x+1) = f(x^2 + x), \quad (1)$$

证明 将 $f(x) = \log_a x$ 分别代入函数方程(1)的左右两边，得

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+1) &= \log_a x + \log_a (x+1), \\ f(x^2 + x) &= \log_a (x^2 + x) = \log_a [x(x+1)] \\ &= \log_a x + \log_a (x+1), \end{aligned}$$

其中最后一步等式是由于 $f(x) = \log_a x$ 的定义域为 $x > 0$ ，于是 $x+1 > 0$ ，可以应用对数函数的性质得出。

因此 $f(x) + f(x+1) = f(x^2 + x)$ 成立，即 $f(x) = \log_a x$ 是函数方程(3)的一个解。

上面的例子还可以更一般地提为：

例2 试证明 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 满足函数方程

$$f(x) + f(y) = f(xy) \quad (2)$$

证明 $\because f(x) = \log_a x$,

$$\therefore f(x) + f(y) = \log_a x + \log_a y,$$

$$f(xy) = \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$\therefore f(x) + f(y) = f(xy)$ 成立，即 $f(x) = \log_a x$ 是函数方程(2)的一个解。

显然，例1仅仅是例2中取 $y = x+1$ 时的一个特殊情况。象例1这种只含有一个变量 x 的函数方程，通常称为一元函数方程；象例2这种含有两个变量 x 和 y 的函数方程，通常称为二元函数方程。一般地，我们有

定义4 含有 n 个变量的函数方程,称为 n 元函数方程。

变量较多的函数方程在某些条件下,常常可以转化成变量较少的函数方程。例如,若在函数方程(2)中令 $y=x$,则二元函数方程就转化成了一元函数方程

$$2f(x) = f(x^2).$$

例3 试证明 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ 满足函数方程

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right). \quad (3)$$

证明 $\because f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x},$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) + f(y) &= \lg \frac{1-x}{1+x} + \lg \frac{1-y}{1+y} = \lg \left(\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} \right) \\ &= \lg \frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y} \\ &= \lg \frac{(1+xy) \left(1 - \frac{x+y}{1+xy} \right)}{(1+xy) \left(1 + \frac{x+y}{1+xy} \right)} \\ &= \lg \frac{1 - \frac{x+y}{1+xy}}{1 + \frac{x+y}{1+xy}} = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right), \end{aligned}$$

故 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ 满足函数方程(3),即是它的一个解。

上述的三个例子中对函数的自变量没有作附加的限制,

它可以取其定义域中的一切值。有的函数方程对其自变量附加了限制，经常遇到的是自变量只能取整数或某些正整数的情况。

例4 试证明：当 n 取自然数时， $f(n) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$ 满足函数方程

$$f(n+2) = f(n) - f(n+1). \quad (4)$$

证明 $\because f(n) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n,$

$$\begin{aligned} \therefore f(n+2) &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(n) - f(n+1) &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \end{aligned}$$

故 $f(n+2) = f(n) - f(n+1)$ 成立。

对于定义在自然数集合上的函数，也可以用数学归纳法来证明它是某个函数方程的解。

例5 已知函数方程

$$f(n+1) = \frac{n(n+1)}{2n-f(n)} \quad \text{且 } f(1) = a, \quad (5)$$