数学名著译丛

微分几何基础

（第一卷）

〔美〕小林昭七　野水克己 著

谢孔彬　陈玉琢　谢云鹏 译

科学出版社

www.sciencep.com

数学名著译丛

微分几何基础

（第一卷）

〔美〕小林昭七　野水克己　著

谢孔彬　陈玉琢　谢云鹏　译

科学出版社

北京

图字: 01-2009-7761

内 容 简 介

本书根据 S. Kobayashi and K. Nomizu 所著的 *Foundations of Defferential Geometry* (Wiley & Sons 公司出版的 Wiley 经典文库丛书(1996 版) (第一卷) 译出. 本卷首先给出了若干必要的预备知识, 主要包括微分流形、张量代数与张量分析、Lie 群和纤维丛等. 本卷的中心内容是联络理论, 不仅论述了一般联络理论, 还具体讲述了线性联络、仿射联络、黎曼联络等. 然后讲述了曲率形式和空间形式以及各种空间变换. 此外, 本卷还给出了 7 个附录和 11 个注释, 分别介绍了若干备查知识和历史背景材料.

本书可供数学、物理等专业的研究生及博士生作为教材或参考书, 特别是对有志于研究现代微分几何的青年学子更是极为合适的入门书, 也可供其他相关人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

微分几何基础(第一卷) / (美) 小林昭七, 野水克己著; 谢孔彬, 陈玉琢, 谢云鹏译. —北京: 科学出版社, 2010
(数学名著译丛)
ISBN 978-7-03-026473-2
I. 微… II. ①小… ②野… ③谢… ④陈… ⑤谢… III. 微分几何 IV. O186.1
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 012775 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 鲁 素
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

丽 源 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 1 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2010 年 1 月第一次印刷 印张: 17 1/2
印数: 1—3 000 字数: 335 000

定价: 56.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

译者的话

由两位日裔数学家小林昭七 (加州大学伯克利分校教授) 和野水克己 (布朗大学教授) 合著的这部两卷集 *Foundations of Differential Geometry* 是一部久负盛名的现代微分几何的经典著作. 第一卷为基础部分, 第二卷是若干专题的深入研究. 本书是其第一卷的中译本. 该著作系统地总结了截至 20 世纪 60 年代末微分几何研究的主要成果, 反映了当时微分几何研究的前沿状况和发展趋势, 在第二卷末给出了长达 68 页的文献目录. 该书在微分几何发展史上产生了广泛而深刻的影响, 后来的许多微分几何专著和教科书几乎都把它作为主要参考书, 例如陈省身等著《微分几何讲义》等, 众多的学者把它作为系统研究现代微分几何的入门. 所以它实际上已成为现代微分几何发展史上的一个里程碑. 考虑到现代微分几何与古典微分几何之间, 无论从研究内容到研究方法都有很大的差异, 为了更好地反映本书的内容一度曾想把中译本书名定为“现代微分几何基础”. 但是又考虑到该书是如此广泛地被引用, 若采用不同的书名, 可能会使读者产生误会造成不必要的麻烦, 因此为了方便读者也为了忠实原作与原书名保持一致, 最终仍然定名为《微分几何基础》. 现在将它奉献给读者, 希望它能为我国数学事业的发展, 特别是对微分几何的教学与研究发挥作用. 在这里特别对书中所涉及的数学家的姓名的翻译问题作一点说明. 对于西方数学家的姓名在书中都保留了原文名称, 因为许多现代数学家的名字尚无统一的习惯的译法, 而译法不一则容易引起混乱. 对于华人数学家的名字则尽量恢复汉字全名, 因为原文中往往只给出姓氏 (音译) 而名字缩略, 如 Chen, Wang 等, 而同姓的人太多, 不是很熟悉的人往往不知所指哪位, 为了方便读者尽可能恢复汉字全名. 对于日本数学家的名字, 本来按照日语和汉语的习惯应该是汉字通用, 而读音各按各的读法, 但是因为本书不是从日文直接翻译过来, 而是从英文翻译过来, 因而日本人名也只有英文音译没有汉字, 所以上述原则无法使用. 若要从英文音译恢复汉字则相当困难, 因为日本姓名使用的汉字中同音字太多. 有的多达几十种, 而人名用字都是特定的, 绝不可乱用同音字代替. 由于译者水平和手头资料所限, 难以准确恢复原书人名中的汉字. 因此除本书的作者之外, 其他日本数学家的名字均保留英文音译名. 不过好在许多日本数学家的英文译名是非常流行的.

本书在翻译过程中得到山东理工大学各级领导的关心和鼓励, 特别是得到吕传毅副校长的大力支持. 在此特别向所有关心支持帮助过我们的朋友表示衷心地

感谢!

由于受译者中英文水平和对书中内容理解程度所限，译文中表述不当乃至错误之处在所难免，恳请广大读者和业内同仁批评指正!

译 者

2009 年 10 月

前　　言

微分几何作为数学的一个分支已有悠久的历史, 然而它在现代数学领域中的严格基础却是相对较晚才形成的. 我们写的这部两卷集 *Foundations of Differential Geometry* 的第一卷, 就是要为微分几何提供一个系统的导引, 同时它也可以作为参考书使用.

我们所关心的主要事情是使本书成为自封的并且对基础方面的所有标准结果都给出完整的证明. 我们希望能够通过下列编排来达到这个目的. 在第一章给出微分流形、Lie 群及纤维丛的一个概论. 不熟悉这些内容的读者可以通过在参考文献中所列出的 Chevalley、Montgomery-Zippin、Pontrjagin 及 Steenrod 的书来学习这些科目. 这些著作也是我们在第一章的标准参考书. 我们还写进了张量代数和张量场的简要内容, 其主题是张量场代数的求导问题. 在附录中给出了一些在正文中所需要的来自拓扑学、Lie 群论及其他方面的结果. 有了这些准备, 本书是自封的.

第二章包括 Ehresmann 联络理论及其最新进展. 本章的结果被用于第三章的线性联络和仿射联络也被应用于第四章的 Riemann 联络, 其中关于法坐标、凸邻域、距离、完备性及和乐群的许多基本结果, 包括 Riemann 流形的 de Rham 分解定理都给出了完整的证明.

第五章介绍 Riemann 流形的截曲率和常曲率空间. 关于涉及到的截曲率的 Riemann 流形的若干性质的更完备论述要依赖于变分运算, 我们将在第二卷中论述. 本章将详细讨论平坦仿射联络和 Riemann 联络.

第六章首先讨论保持给定的线性联络或保持 Riemann 度量的变换和无穷小变换, 其中包括关于 Ricci 张量、和乐等距和无穷小等距的各种结果. 然后论述局部变换的扩张以及仿射联络与 Riemann 联络的等价问题. 本章的结果与齐性空间 (特别是对称空间) 的微分几何密切相关. 我们计划把齐性空间和对称空间的微分几何安排在第二卷中.

在所有各章中, 我们都试图让读者通晓在微分几何中普遍使用的各种计算方法. 这些方法是: ① 用指标表示的经典张量运算; ② E. Cartan 的外微分运算; ③ 协变微分形 ∇XY, 这是三者当中最新的. 我们还阐述了利用适当的丛或直接在底空间上进行的方法, 并认为这是适当的.

注释中包含了若干历史事实和与本卷主要内容相关的一些补充结果. 卷末的参

考文献仅包括贯穿本书所引用的那些书籍和论文.

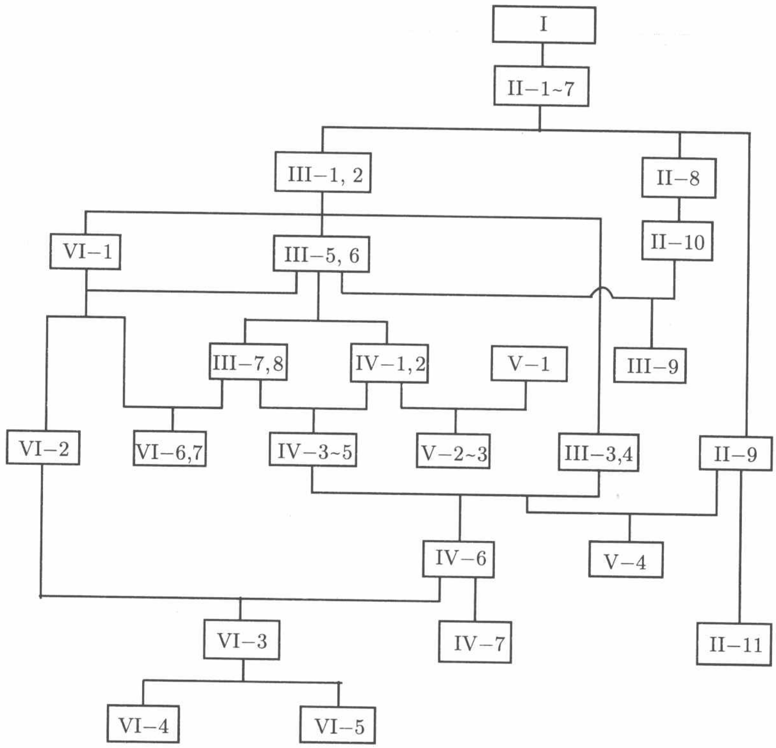
对于定理、命题和推论按节进行编号. 例如在每一章, 比方说在第二章中, 定理 3.1 在第 3 节. 在同一章的其他地方提到时将只说定理 3.1. 若在后面的章节中引用时, 则说第二章定理 3.1.

原来我们计划将这部书写成一卷, 它除包含本卷的内容之外还包括下列论题: 子流形、弧长积分的变分、复流形和 Kähler 流形的微分几何、齐性空间的微分几何、对称空间、示性类等. 但出于时间和篇幅的考虑适合将它分为两卷. 因而就将上面提到的那些论题放到第二卷中.

在本前言即将结束之际, 我们对 L. Bers 教授邀请我们承担这个课题表示感谢; 对 Intersience 出版公司 John Wiley & Sons 分公司的耐心而友好的合作表示感谢; 十分感激 A. J. Lohwater 博士、H. Ozeki 博士、A. Howard 和 E. Ruh 先生的友好帮助, 正是由于他们的帮助使得本书在内容和表述上都有许多改进. 我们还要感谢国际科学基金会的资助支持了包含在本书中的部分工作.

小林昭七
野水克己

各章节之间的依赖关系



例外

第二章：定理 11.8 需要第二章 2.10 节.

第三章：命题 6.2 需要第三章 3.4 节.

第四章：推论 2.4 需要第三章命题 7.4.

定理 4.1, (4) 需要第三章 3.4 节和第三章命题 6.2.

第五章：命题 2.4 需要第三章 3.7 节.

第六章：定理 3.3 需要第五章 5.2 节; 推论 5.6 需要第五章例 4.1;

推论 6.4 需要第四章命题 2.6; 定理 7.10 需要第五章 5.2 节.

目　录

第一章　微分流形

1.1　微分流形

拓扑空间 S 上的伪变换群是一个满足下列公理的变换的集合 Γ:

(1) 每一个 $f \in \Gamma$ 是从 S 的一个开集 (称为 f 的定义域) 到 S 的另一个开集 (称为 f 的值域) 上的同胚;

(2) 如果 $f \in \Gamma$, 那么 f 在其定义域的任意开子集上的限制也在 Γ 中;

(3) 令 $U = \bigcup\limits_i U_i$, 其中每个 U_i 是 S 的一个开集. 如果 f 在每个 U_i 上的限制在 Γ 中, 那么从 U 到 S 的开集上的同胚 f 居于 Γ;

(4) 对于 S 的每个开集 U, U 上的恒等变换在 Γ 中;

(5) 如果 $f \in \Gamma$, 那么 $f^{-1} \in \Gamma$;

(6) 如果 $f \in \Gamma$ 是从 U 到 V 上的同胚, $f' \in \Gamma$ 是从 U' 到 V' 上的同胚, 并且 $V \cap U'$ 是非空的, 那么从 $f^{-1}(V \cap U')$ 到 $f'(V \cap U')$ 上的同胚 $f' \circ f$ 在 Γ 中.

下面给出几个在本书中要用到的伪群的例子. 令 $\mathbf{R}^n$ 是由实数 n 元组 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 构成的空间并且带有通常的拓扑. 若从 $\mathbf{R}^n$ 的开集到 $\mathbf{R}^m$ 中的映射 f 是 r 次可微的, 则我们称它是 C^r 的 $(r = 1, 2, \cdots, \infty)$. 以 C^0 表示 f 是连续的, 用 C^ω 表示 f 是实解析的. $\mathbf{R}^n$ 上的 C^r 伪变换群 $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$ 是从 $\mathbf{R}^n$ 的开集到 $\mathbf{R}^n$ 的开集上的同胚 f 的集合并且使得 f 和 f^{-1} 都是 C^r 的. 显然 $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个伪变换群. 如果 $r < s$, 那么 $\Gamma^s(\mathbf{R}^n)$ 是 $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$ 的子群. 若只考虑那些 Jacobi 行列式处处为正的 $f \in \Gamma^r(\mathbf{R}^n)$, 则得到 $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$ 的一个伪子群. 将这个伪子群记作 $\Gamma_0^r(\mathbf{R}^n)$, 并称之为 $\mathbf{R}^n$ 的保持定向的 C^r 伪变换群. 令 $\mathbf{C}^n$ 是带通常拓扑的复 n 元组构成的空间. $\mathbf{C}^n$ 上的全纯 (即复解析) 伪变换群可类似地定义并且记之为 $\Gamma(\mathbf{C}^n)$. 我们将 $\mathbf{C}^n$ 与 $\mathbf{R}^{2n}$ 等同, 必要时通过把 $(z^1, \cdots, z^n) \in \mathbf{C}^n$ 映射到 $(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n) \in \mathbf{R}^{2n}$ 来实现, 其中 $z^j = x^j + iy^j$. 在这个等同下, 对于任何 r, $\Gamma(\mathbf{C}^n)$ 都是 $\Gamma_0^r(\mathbf{R}^{2n})$ 的伪子群.

拓扑空间 M 的一个与伪群相容的卡集是一族称为坐标卡的二元组 (U_i, φ_i) 并且使得

(a) 每个 U_i 都是 M 的开集而且 $\bigcup\limits_i U_i = M$;

(b) 每个 φ_i 是从 U_i 到 S 的一个开集上的同胚;

(c) 当 $U_i \cap U_j$ 非空时, 从 $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ 到 $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ 上的映射 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 是 Γ

的一个元.

M 的一个与 Γ 相容的完备卡集是 M 的与 Γ 相容的卡集而且它不包含在 M 的与 Γ 相容的任何其他卡集之中. M 的每一个与 Γ 相容的卡集均包含在 M 的唯一一个与 Γ 相容的完备卡集中. 事实上, 给定 M 的一个与 Γ 相容的卡集 $A = \{(U_i, \varphi_i)\}$, 令 $\tilde{A}$ 是所有这种二元组 (U, φ) 的集族, 其中 φ 是从 M 的开集 U 到 S 的一个开集上的同胚并且当 $U \cap U_i$ 非空时,

$$\varphi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_i) \to \varphi_i(U \cap U_i)$$

是 Γ 的一个元, 那么 $\tilde{A}$ 是包含 A 的完备卡集.

如果 Γ' 是 Γ 的一个伪子群, 那么 M 的与 Γ' 相容的卡集也是与 Γ 相容的.

一个 C^r 微分流形是一个带有与 $\Gamma(\mathbf{R}^n)$ 相容的固定完备卡集的 Hausdorff 空间, 整数 n 称为流形的维数. Hausdorff 空间的任何一个与 $\Gamma^r(\mathbf{R}^n)$ 相容的卡集均可扩充成一个完备卡集以定义一个可微结构. 因为对于 $r < s$, $\Gamma^r(\mathbf{R}^n) \supset \Gamma^s(\mathbf{R}^n)$, 所以一个 C^s 可微结构唯一地决定一个 C^r 可微结构. C^ω 可微流形也称为实解析流形 (贯穿全书我们将更多地考虑 C^∞ 可微流形. 今后若提到“微分流形”或简称“流形”时总是指 C^∞ 微分流形). 一个 n 维复 (解析) 流形是一个 Hausdorff 空间并且带有一个固定的与 $\Gamma(\mathbf{C}^n)$ 相容的完备卡集. 一个 C^r 定向微分流形是一个带有固定的与 $\Gamma_0^r(\mathbf{R}^n)$ 相容的完备卡集的 Hausdorff 空间. 一个 C^r 定向微分结构唯一地产生一个 C^r 可微结构. 但并不是每一个 C^r 可微结构都是这样被定向的, 如果它是从一个定向结构而得到的, 则称之为可定向的. 若一个可定向 C^r 流形是连通的, 则它恰好容许有两种定向. 我们将这一事实的证明留给读者, 而只说明如何将一个定向流形反向定向. 若一族坐标卡 (U_i, φ_i) 确定一个定向流形, 那么卡族 (U_i, φ_i) 确定相反定向的流形, 其中 ψ_i 是 φ_i 与 $\mathbf{R}^n$ 的变换 $(x^1, x^2, \cdots, x^n) \to (-x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 的复合. 由于 $\Gamma(\mathbf{C}^n) \subset \Gamma_0^r(\mathbf{R}^{2n})$, 所以每个复流形都可作为 C^r 流形而被定向.

对于所考虑的任何结构 (例如 C^r 可微结构) 而言, 一个可容许的坐标卡是一个属于定义该结构的固定完备卡集的坐标卡. 今后, “坐标卡”一词将专指可容许的坐标卡. 给定一个 n 维 C^r 流形 M 的容许坐标卡 (U_i, φ_i), 在 U_i 上定义的函数系 $x^1 \circ \varphi_i, \cdots, x^n \circ \varphi_i$ 称为 U_i 上的局部坐标系, 而且称 U_i 是一个坐标邻域. 对于 M 的每一点 p, 可以找到一个坐标卡 (U_i, φ_i) 使得 $\varphi_i(p)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的原点而且 φ_i 是从 U_i 到由 $|x'| < a, \cdots, |x^n| < a$($a$ 为某个正数) 界定的 $\mathbf{R}^n$ 的开集上的同胚. 因而 U_i 称为 p 点的方形邻域.

自然 $\mathbf{R}^n$ 对于任何 r 都是 C^r 定向流形, 坐标卡是由 $\Gamma_0^r(\mathbf{R}^n)$ 的元素 f 和 f 的定义域构成的. 类似地, $\mathbf{C}^n$ 是一个复流形. C^r 流形 M 的任何开子集 N 自然也是一个 C^r 流形, N 的坐标卡由 $(U_i \cap N, \psi_i)$ 给出, 这里 (U_i, φ_i) 是 M 的坐标卡, 而 ψ_i 是 φ_i 在 $U_i \cap N$ 上的限制. 类似地, 对复流形的情况也是如此.

给定两个 C^r 流形 M 和 M' 以及映射 $f: M \to M'$, 若对 M 的每个坐标卡 (U_i, φ_i) 和 M' 的每个坐标卡 (V_j, ψ_j) 都有 $f(U_i) \subset V_j$ 而且从 $\varphi_i(U_i)$ 到 $\psi_j(V_j)$ 的映射 $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ 是 C^k 可微的, 则称 f 是 $C^k(k \leqslant r)$ 可微的. 如果 $u^1, \cdots, u^n$ 是 U_i 上的一个局部坐标系而 $v^1, \cdots, v^m$ 是 V_j 上的一个局部坐标系, 那么 f 可以用一族 C^k 可微函数表示为:

$$v^1 = f^1(u^1, \cdots, u^n), \cdots, v^m = f^m(u^1, \cdots, u^n).$$

以后凡是提到“可微映射”或简称“映射”, 总是指 C^∞ 映射. M 上的 C^k 可微函数是 M 到 $\mathbf{R}$ 中的 C^k 映射. 全纯 (或复解析) 映射或函数的情况是类似的.

M 中的一条 C^k 可微曲线是指从 $\mathbf{R}$ 的一个闭区间 $[a, b]$ 到 M 中的一个 C^k 可微映射, 即从包含 $[a, b]$ 的开区间到 M 中的 C^k 映射的限制. 现在来定义在 M 的一点 p 处的切向量 (或简称向量). 令 $\mathfrak{F}(p)$ 为在 p 点的邻域中定义的 C^1 可微函数构成的代数. 令 $x(t)$ 是一条 C^1 曲线 $(a \leqslant t \leqslant b)$ 并且使得 $x(t_0) = p$. 曲线 $x(t)$ 在 p 点的切向量是由

$$Xf = \left(\frac{df(x(t))}{dt}\right)_{t_0}$$

定义的一个映射 $X: \mathfrak{F}(p) \to \mathbf{R}$. 换句话说, Xf 是 f 沿曲线 $x(t)$ 在 $t = t_0$ 点的方向上的导数. 向量 X 满足下列条件:

(1) X 是从 $\mathfrak{F}(p)$ 到 $\mathbf{R}$ 中的线性映射;

(2) $X(fg) = (Xf)g(p) + f(p)(X_g), \quad f, g \in \mathfrak{F}(p)$.

满足上述两个条件的从 $\mathfrak{F}(p)$ 到 $\mathbf{R}$ 中的映射的集合构成实向量空间. 现在说明 p 点所有向量的集合成为一个 n 维子向量空间, 其中 n 是 M 的维数. 令 $u^1, \cdots, u^n$ 是 p 点的邻域 U 上的一个局部坐标系. 对于每一个 j, $\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\right)_p$ 是一个满足上面的条件 (1) 和 (2) 的从 $\mathfrak{F}(p)$ 到 $\mathbf{R}$ 中的映射. 我们将说明 p 点处所有向量的集合是一个以 $\left(\dfrac{\partial}{\partial u^j}\right)_p, \cdots, \left(\dfrac{\partial}{\partial u^n}\right)_p$ 为基的向量空间. 给定适合 $p = x(t_0)$ 的任何曲线 $x(t)$, 令 $u^j = x^j(t)$ $(j = 1, \cdots, n)$ 是曲线在局部坐标系 $u^1, \cdots, u^n$ 中的方程. 那么

$$(df(x(t))/dt)_{t_0} = \sum_j (\partial f/\partial u^j)_p \cdot (dx^j(t)/dt)^*_{t_0},$$

这说明 p 点的每一个向量都是 $(\partial/\partial u^1)_p, \cdots, (\partial/\partial u^n)_p$ 的线性组合. 反过来, 给定一个线性组合 $\Sigma \xi^j (\partial/\partial u^j)_p$, 考虑由

$$u^j = u^j(p) + \xi^j t, \quad j = 1, \cdots, n$$

* 对于求和符号参看基本符号一览表.

定义的曲线. 那么这条曲线在 $t=0$ 点的切向量是 $\sum \xi^j(\partial/\partial u^j)_p$. 为证明 $(\partial/\partial u^1)_p, \cdots, (\partial/\partial u^n)_p$ 线性无关, 假设 $\Sigma \xi^j(\partial/\partial u^j)_p = 0$, 那么

$$0 = \sum \xi^j(\partial u^k/\partial u^j)_p = \xi^k, \quad k=1,\cdots,n.$$

这就证明了我们的断言. 将 p 点处切向量的集合记为 $T_p(M)$ 或 T_p, 并且称之为 M 在 p 点的切空间; 把 n 元数组 $\xi^1,\cdots,\xi^n$ 称作向量 $\sum \xi^j(\partial/\partial u^j)_p$ 关于局部坐标系 $u^1,\cdots,u^n$ 的分量.

评注　我们知道, 若 M 是一个 C^∞ 流形, 那么 $T_p(M)$ 与满足上面的条件 (1) 和 (2) 的 X: $\mathfrak{F}(p) \to \mathbf{R}$ 组成的空间一致, 其中 $\mathfrak{F}(p)$ 表示在 p 点附近定义的所有 C^∞ 函数组成的代数. 今后我们将主要考虑 C^∞ 流形和 C^∞ 映射.

流形 M 上的一个向量场 X 是对 M 的每一点指定一个向量 X_p 的一种指派. 若 f 是 M 上的可微函数, 那么 Xf 是 M 上由 $(Xf)(p) = X_pf$ 定义的函数. 一个向量场 X, 若对于每个可微函数 f, Xf 都是可微的, 则称向量场 X 是可微的. 利用局部坐标系 $u^1,\cdots,u^n$, 向量场 X 可表示为 $X=\sum \xi^j(\partial/\partial u^j)$, 其中 ξ^j 是在坐标邻域内定义的函数, 称为 X 关于 $u^1,\cdots,u^n$ 的分量. X 是可微的当且仅当它的分量 ξ^j 都可微的.

令 $\mathfrak{X}(M)$ 是 M 上所有可微向量场的集合. 它在自然加法和数乘运算之下成为一个实向量空间. 如果 X 和 Y 都在 $\mathfrak{X}(M)$ 中, 那么把括号运算 $[X,Y]$ 定义为从 M 上的函数环到其自身的映射

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

我们将证明 $[X,Y]$ 是一个向量场. 利用局部坐标系 $u^1,\cdots,u^n$ 写成

$$X=\sum \xi^j(\partial/\partial u^i), \quad Y=\sum \eta^j(\partial/\partial u^i),$$

那么

$$[X,Y]f = \sum_{j,k}\left(\xi^k\frac{\partial \eta^j}{\partial u^k} - \eta^k\frac{\partial \xi^j}{\partial u^k}\right)\frac{\partial f}{\partial u^j}.$$

这意味着 $[X,Y]$ 是一个向量场, 并且它关于 $u^1,\cdots,u^n$ 的分量由 $\sum_k\left(\xi^k\frac{\partial \eta^j}{\partial u^k} - \eta^k\frac{\partial \xi^j}{\partial u^k}\right)(j=1,\cdots,n)$ 给出. $\mathfrak{X}(M)$ 关于这个括号运算成为实数域上的一个 (无穷维)Lie 代数. 特别有 Jacobi 恒等式:

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0, \quad X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M).$$

还可以将 $\mathfrak{X}(M)$ 看作由 M 上的可微函数组成的代数 $\mathfrak{F}(M)$ 上的模如下: 若 f 是 M 上的一个函数, X 是 M 上的一个向量场, 则 fX 是 M 上由 $(fX)_p = f(p)X_p(p \in M)$ 定义的向量场. 那么

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X, \quad f, g \in \mathfrak{F}(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

对于 M 的一点 p, 我们把切空间 $T_p(M)$ 的对偶空间 $T_p^*(M)$ 称为 p 点的余切空间, 把在每一点 p 指定一个余切向量的指派称为 1 形式 (1 次微分形式). 对于 M 上的每个函数 f, 将 f 在 p 点的全微分 $(df)_p$ 定义为

$$\langle (df)_p, X \rangle = Xf, \quad X \in T_p(M),$$

其中, $\langle , \rangle$ 表示作为 $T_p(M)$ 上的线性泛函第一个元素作用在第二个元素上的值. 如果 $u^1, \cdots, u^n$ 是 p 的邻域上的局部坐标系, 那么全体微分 $(du^1)_p, \cdots, (du^n)_p$ 构成 $T_p^*(M)$ 的一个基. 实际上, 它们构成 $T_p(M)$ 的基 $(\partial/\partial u^1)_p, \cdots, (\partial/\partial u^n)_p$ 的对偶基. 在 p 的邻域中, 每个 1 形式 ω 能够唯一地写成

$$\omega = \sum_j f_j du^j,$$

其中各 f_j 是在 p 点的邻域中定义的函数, 称为 ω 关于 $u^1, \cdots, u^n$ 的分量. 如果各个 f_j 都是可微的 (此条件依赖于局部坐标系的选取), 那么 1 形式 ω 就称作可微的. 我们将只考虑可微的 1 形式.

一个 1 形式 ω 也可以定义为 $\mathfrak{F}(M)$ 模 $\mathfrak{X}(M)$ 到 $\mathfrak{F}(M)$ 中的 $\mathfrak{F}(M)$ 线性映射. 两种定义通过下式相关 (参看命题 3.1):

$$(\omega(X))_p = \langle \omega_p, X_p \rangle, \quad X \in \mathfrak{X}(M), p \in M.$$

令 $\wedge T_p^*(M)$ 是 $T_p^*(M)$ 上的外代数. 一个 r 形式 ω 是对 M 的每一点指定 $\wedge T_p^*(M)$ 中的一个 r 次元素的一种指派. 利用局部坐标系 $u^1, \cdots, u^n$ 可将 ω 唯一地表示成

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} f_{i_1 \cdots i_r} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}.$$

如果各分量 $f_{i_1 \cdots i_r}$ 都是可微的, 则称 r 形式 ω 是可微的. 今后凡提到"r 形式"都是指可微的 r 形式. 也可以将 r 形式 ω 定义为 $\mathfrak{F}(M)$ 上的从 $\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)$($r$ 次乘积) 到 $\mathfrak{F}(M)$ 中的反对称 r 线性映射. 两种定义有如下关系: 如果 $\omega_1, \cdots, \omega_r$ 是 1 形式而 $X_1, \cdots, X_r$ 是向量场, 那么 $(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r)(X_1, \cdots, X_r)$ 是 r 阶矩阵 $(\omega_j(X_k))_{j,k=1,\cdots,r}$ 的行列式的 $\dfrac{1}{r!}$ 倍.

对于每个 $r=0,1,\cdots,n$, 用 $\mathfrak{D}^r=\mathfrak{D}^r(M)$ 表示 M 上 (可微)r 形式的全体. 那么 $\mathfrak{D}^0(M)=\mathfrak{F}(M)$. 每个 $\mathfrak{D}^r(M)$ 都是一个实向量空间并且也可以看作一个 $\mathfrak{F}(M)$ 模: 对于 $f\in\mathfrak{F}(M)$ 和 $\omega\in\mathfrak{D}^r(M)$, $f\omega$ 是一个由 $(f\omega)_p=f(p)\omega_p(p\in M)$ 定义的 r 形式. 置 $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}(M)=\sum\limits_{r=0}^{n}\mathfrak{D}^r(M)$. $\mathfrak{D}(M)$ 关于外积运算形成一个实数域上的代数. 可将外微分运算 d 的性质描述如下:

(1) d 是从 $\mathfrak{D}(M)$ 到其自身的一个 $\mathbf{R}$ 线性映射且使得 $d(\mathfrak{D}^r)\subset\mathfrak{D}^{r+1}$;

(2) 对于函数 $f\in\mathfrak{D}^0$ 而言, df 就是全微分;

(3) 若 $\omega\in\mathfrak{D}^r$ 且 $\pi\in\mathfrak{D}^s$, 那么

$$d(\omega\wedge\pi)=d\omega\wedge\pi+(-1)^r\omega\wedge d\pi;$$

(4) $d^2=0$.

用局部坐标系表示则有, 若 $\omega=\sum\limits_{i_1<\cdots<i_r}f_{i_1\cdots i_r}du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}$, 那么 $d\omega=\sum\limits_{i_1<\cdots<i_r}df_{i_1\cdots i_r}\wedge du^1\wedge\cdots\wedge du^{i_r}$.

以后还需要考虑取值于任意向量空间的微分形式. 令 V 是一个 m 维实向量空间. M 上的一个 V 值 r 形式是这样一种指派, 它对每一点 $p\in M$ 指定一个从 $T_p(M)\times\cdots\times T_p(M)$($r$ 次乘积) 到 V 中的反对称 r 线性映射. 若取定 V 的一个基 $e_1,\cdots,e_m$, 则可将 ω 唯一地写成 $\omega=\sum\limits_{j=1}^{m}\omega^j\cdot e_j$, 其中 ω^j 是 M 上的通常 r 形式. 由定义, 若各 ω^j 都是可微的, 则 ω 是可微的. 将外导数 $d\omega$ 定义为 $\sum\limits_{j=1}^{m}d\omega^j\cdot e_j$, 它是一个 V 值的 $(r+1)$ 形式.

给定从流形 M 到另一个流形 M' 的映射 f, 那么 f 在 p 点的微分是如下定义的从 $T_p(M)$ 到 $T_{f(p)}(M')$ 中的一个线性映射 f^*. 对于每个 $X\in T_p(M)$, 在 M 中选取一条曲线 $x(t)$ 使得 X 是 $x(t)$ 在 $p=x(t_0)$ 点的一个切向量, 那么 $f^*(X)$ 是曲线 $f(x(t))$ 在 $f(p)=f(x(t_0))$ 点的切向量. 由此立即得知, 若 g 是 $f(p)$ 的邻域中的可微函数, 那么 $(f^*(X))g=X(g\circ f)$. 当需要指明 p 点时则写成 $(f^*)_p$. 在不至于引起混淆时, 可将 f^* 简写成 f. $(f^*)_p$ 的转置是一个从 $T^*_{f(p)}(M')$ 到 $T^*_p(M)$ 的线性映射. 对 M' 上的任何一个 r 形式 ω', 均可通过

$$(f^*\omega')(X_1,\cdots,X_r)=\omega'(f^*X_1,\cdots,f^*X_r),\quad X_1,\cdots,X_r\in T_p(M)$$

定义 M 上的一个 r 形式 $f^*\omega'$. 外微分 d 与 f^* 可交换: $d(f^*\omega')=f^*(d\omega')$.

对于从 M 到 M' 的映射 f, 如果 $f^*(T_p(M))$ 的维数是 r, 则称 f 在点 $p\in M$ 的秩是 r. 如果 f 在 p 点的秩为 $n=\dim M$, 那么 $(f^*)_p$ 是内射并且 $\dim M\leqslant\dim M'$;