TEXTBOOKS FOR HIGHER EDUCATION

研究生创新教育系列教材

H型群上的偏微分方程

韩军强　钮鹏程　著

西北工业大学出版社

西北工业大学研究生创新教育系列教材

H 型群上的偏微分方程

韩军强　钮鹏程　著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是作者近年来在 H 型群上偏微分方程领域研究成果的总结. 内容包括 H 型群的基本知识，H 型群上的次 Laplace 算子和 p-次 Laplace 算子的基本解及平均值定理，Pohozaev 型积分恒等式与不存在性，H 型群上的 Carleman 估计与唯一延拓性，H 型群上的几类 Hardy 型不等式，H 型群上的 Taylor 展开式与 Hamilton－Jacobi 方程的黏性解，边值问题和特征值问题，H 型群上的 Sobolev－Hardy 型不等式.

本书适用于在校或从事偏微分方程理论方向教学或研究的硕士生、高校教师和相关领域的数学工作者.

图书在版编目(CIP)数据

H 型群上的偏微分方程/韩军强，钮鹏程著. —西安：西北工业大学出版社，2009. 10
ISBN 978－7－5612－2667－4

Ⅰ. H…　Ⅱ. ①韩…②钮…　Ⅲ. 偏微分方程　Ⅳ. O175. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 193177 号

出版发行： 西北工业大学出版社
通信地址： 西安市友谊西路 127 号　　**邮编：** 710072
电　　话： (029)88493844　　88491757
网　　址： www. nwpup. com
印 刷 者： 陕西向阳印务有限公司
开　　本： 787 mm×960 mm　1/16
印　　张： 9
字　　数： 186 千字
版　　次： 2009 年 10 月第 1 版　　2009 年 10 月第 1 次印刷
定　　价： 20. 00 元

前　　言

设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一组 C^∞ 向量场. Hörmander 于 1967 年提出的有限秩条件是

$$\text{rank Lie}\left[X_1, X_2, \cdots, X_m\right] = n$$

这保证了二次方和算子的亚椭圆性. 自 Hörmander 的这项工作开创以来，由向量场 X_1, $X_2, \cdots, X_m$ 构成的次 Laplace 算子 $\sum_{j=1}^{m} X_j^* X_j$（这里 X_j^* 为 X_j 的形式伴随）的研究得到了迅猛的发展. 在这个领域中，一类重要的模型算子是分层幂零 Lie 群（也称为 Carnot 群）上的次 Laplace 算子. 这类群的齐次性和不变性性质使得调和分析在 Hörmander 型算子理论中起到了中心作用. 这种群分析思想首先是由 Stein 于 1970 年在 Nice 国际数学家大会上的报告中提出的，此后数十年间受到众多数学家的重视，成为许多研究的源泉.

在分层幂零 Lie 群中，第一个重要的非交换二步群是 Heisenberg 群. 由于它的结构较为直接、明确，因而对其上左不变向量场所构成的次 Laplace 算子的研究成果最为丰富. 第二个重要的二步群是 Heisenberg 型群，即 H 型群. H 型群由 Kaplan 于 1980 年提出后，由于其 Lie 代数的第二层不再限于是 1 维的，使该群的结构不像 Heisenberg 群那么清晰，故数十年间其上的研究进展不大. 直到 1997 年后，由于 Garofalo 等人的工作，H 型群上的次 Laplace 算子的研究才有所进展，获得了一系列重要成果.

国内以罗学波教授为首的研究集体从 1984 年以来一直在群上调和分析与次椭圆方程方面坚持研究工作. 本书试图小结笔者近年在 H 型群上的偏微分方程方面的研究成果. 如能起到抛砖引玉之效，则笔者幸甚.

本书第一章介绍了 H 型群的一些基本知识. 其中，第 1.1 节介绍了一类最简单的 Carnot 群，即 Heisenberg 群；第 1.2 节简略介绍了一般的 Carnot 群；第 1.3 节介绍了 H 型群，这一节是后面各章的基础.

第二章至第八章除引用的内容外，其余均为笔者的研究结果.

第二章，得到了 H 型群上的次 Laplace 算子和 p-次 Laplace 算子的基本解，给出了平均值定理，导出了函数表示公式. 作为其应用，给出了一个 Hardy 型不等式和不确定原理.

第三章建立了 H 型群上的一些积分恒等式. 应用这些恒等式，建立了 H 型群上半线性次椭圆方程非负解的 Pohozaev 型恒等式及不存在性结果.

第四章导出了 H 型群上的 Carleman 估计，并证明了次 Laplace 算子的唯一延拓性定理.

在第五章，首先建立了 H 型群上的 Picone 恒等式，然后通过构造合适的辅助函数，给出了 H 型群上 p-次 Laplace 算子的 Hardy 型不等式；接着给出了 H 型群上球域内外的 Hardy 型不等式. 此外，还得到了 H 型群上一类更一般的 Hardy 型不等式，用另一种方法证明了 H 型群上次 Laplace 算子的 Hardy 型不等式，确定了不等式中的系数是最佳的.

第六章给出了 H 型群上的 Taylor 展开式及 Hamilton-Jacobi 方程的黏性解.

第七章讨论了 H 型群上的次 Laplace 算子的边值问题和特征值问题，利用凸性方法研究了上述问题的唯一性，得到了相邻特征值之差的万有估计.

第八章建立了 H 型群上的 Sobolev-Hardy 型不等式，并利用改进的集中列紧原理和函数逼近方法讨论了极值函数的存在性问题及最佳常数.

最后，我们衷心感谢参加与本书内容相关的讨论班的同学和朋友们.

陕西师范大学的吴建华教授、西北大学的屈长征教授和西北工业大学的丁晓庆教授仔细审阅了书稿并提出了许多宝贵意见，在此一并表示衷心的感谢.

由于水平所限，书中疏漏和不妥之处，恳请同行、读者指正.

著　者

2009 年 9 月

目　　录

第一章 H 型群的基本知识

与满足 Hörmander 有限秩条件的一组光滑向量场相联系的无穷小量群是非交换幂零 Lie 群,它们的 Lie 代数允许分层. 这些群在亚椭圆偏微分方程、非交换调和分析、次 Riemann 几何和 CR 几何函数理论的研究中占据着中心位置.

本章 1.1 节首先介绍 Heisenberg 群,这是一类最简单的 Carnot 群,这便于理解后文内容,以便于与 H 型群比较. 为方便引入 H 型群,在 1.2 节简略介绍一般的 Carnot 群. 在 1.3 节中由二步 Carnot 群进入到 H 型群,这节内容是后面各章的基础.

1.1 Heisenberg 群

设 $n \geqslant 1$,

$$\xi = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, t) = (x, y, t) \in \mathbf{R}^{2n+1}$$

$$\tilde{\xi} = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_n, \tilde{t}) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \in \mathbf{R}^{2n+1}$$

Heisenberg 群 H^n 是在集 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 上赋予群运算法则

$$\xi \cdot \tilde{\xi} = \left(x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, t + \tilde{t} + 2\sum_{j=1}^{n}(x_j\tilde{y}_j - \tilde{x}_j y_j)\right) \tag{1.1}$$

所得的 Lie 群.

在 Heisenberg 群上,定义模

$$|\xi|_{\mathrm{H}^n} \xlongequal{\text{def}} \left[\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j^2 + y_j^2)\right)^2 + t^2\right]^{\frac{1}{4}} \tag{1.2}$$

记 ξ^{-1} 为 ξ 的逆,并注意到 $\xi^{-1} = -\xi$. 定义 $\xi, \tilde{\xi}$ 之间的距离为

$$\begin{aligned} d(\xi, \tilde{\xi}) \xlongequal{\text{def}} |\tilde{\xi}^{-1} \cdot \xi|_{\mathrm{H}^n} = \\ &\left\{\left[\sum_{j=1}^{n}((x_j - \tilde{x}_j)^2 + (y_j - \tilde{y}_j)^2)\right]^2 + \right. \\ &\left.\left[t - \tilde{t} + 2\sum_{j=1}^{n}(x_j\tilde{y}_j - \tilde{x}_j y_j)\right]^2\right\}^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Heisenberg 群 H^n 有一族伸缩:

$$\delta_\lambda(x, y, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t) \qquad (\forall \lambda > 0) \tag{1.4}$$

而模 $|\cdot|_{\mathrm{H}^n}$ 关于伸缩族$\{\delta_\lambda\}$是一次齐次的,即

$$|\delta_\lambda(\xi)|_{\mathrm{H}^n} = \lambda |\xi|_{\mathrm{H}^n} \qquad (\forall \xi \in \mathrm{H}^n)$$

相应于$\{\delta_\lambda\}$，H^n 的齐次维数为 $Q=2n+2$.

在上述距离下，中心在 ξ 处，半径为 R 的开球定义为

$$B_{H^n}(\xi,R)\xlongequal{\text{def}}\{\eta\in H^n:d(\xi,\eta)<R\}$$

Heisenberg 群的 Lie 代数由向量场

$$\begin{cases}X_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}+2y_j\dfrac{\partial}{\partial t}\\ Y_j=\dfrac{\partial}{\partial y_j}-2x_j\dfrac{\partial}{\partial t}\end{cases}\quad(j=1,2,\cdots,n)\tag{1.5}$$

所张成. 相应的广义梯度为

$$\nabla_{H^n}\xlongequal{\text{def}}(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n)$$

Heisenberg 群上的次 Laplace 算子 Δ_{H^n} 定义为

$$\Delta_{H^n}\xlongequal{\text{def}}\sum_{j=1}^{n}(X_j^2+Y_j^2)\tag{1.6}$$

显然

$$\begin{cases}X_j(\delta_\lambda)=\lambda\delta_\lambda(X_j)\\ Y_j(\delta_\lambda)=\lambda\delta_\lambda(Y_j)\end{cases}\quad(j=1,2,\cdots,n)\tag{1.7}$$

成立。因此

$$\Delta_{H^n}(\delta_\lambda)=\lambda^2\delta_\lambda(\Delta_{H^n})\tag{1.8}$$

容易检验

$$|\nabla_{H^n}|\xi|_{H^n}|^2=\psi\xlongequal{\text{def}}\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)}{|\xi|_{H^n}^2}\tag{1.9}$$

设 $u\in C^2$，且 $u=u(|\xi|_{H^n})$，则成立

$$\Delta_{H^n}u=\psi\left(u''+\frac{2n+1}{|\xi|_{H^n}}u'\right)\tag{1.10}$$

p-次 Laplace 算子为

$$-\sum_{j=1}^{n}[X_j(|\nabla_{H^n}u|^{p-2}X_ju)+Y_j(|\nabla_{H^n}u|^{p-2}Y_ju)]=$$
$$-\nabla_{H^n}(|\nabla_{H^n}u|^{p-2}\nabla_{H^n}u)\tag{1.11}$$

Heisenberg 群上的极坐标变换

$$(x,y,t)=\Phi(\rho,\theta,\theta_1,\cdots,\theta_{2n-1})$$

定义如下：

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \rho(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\cos\theta_1 \\
y_1 &= \rho(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
x_2 &= \rho(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\
y_2 &= \rho(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4 \\
&\cdots\cdots \\
x_n &= \rho(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-2}\cos\theta_{2n-1} \\
y_n &= \rho(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-2}\sin\theta_{2n-1} \\
t &= \rho^2\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

其中

$$\rho \geqslant 0, \theta \in [0,\pi], \theta_i \in (0,\pi), i=1,\cdots,2n-2, \theta_{2n-1} \in [0,2\pi)$$

式(1.12)是由Greiner[1]和D'Ambrosio[2]分别给出的.

用$\boldsymbol{J}(\Phi)$记Φ的Jacobi矩阵,那么

$$|\boldsymbol{J}(\Phi)| = \rho^{2n+1}(\sin\theta)^{n-1}(\sin\theta_1)^{2n-2}\cdots\sin\theta_{2n-1} \tag{1.13}$$

事实上,

$$r = |z| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)} = \rho(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}, \quad t = \rho^2\cos\theta \tag{1.14}$$

$\mathbf{R}^{2n}$上通常的球面坐标给出

$$dz = r^{2n-1}drdw_{2n} \tag{1.15}$$

其中dw_{2n}表示S^{2n-1}上的Lebesgue测度.由式(1.12)和式(1.14)有

$$\frac{\partial(r,t)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial\rho} & \dfrac{\partial r}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial t}{\partial\rho} & \dfrac{\partial t}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \rho^2(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

这就给出

$$drdt = \rho^2(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}d\rho d\theta \tag{1.16}$$

由式(1.15)和式(1.16)得

$$dzdt = r^{2n-1}drdw_{2n}dt = [\rho(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}]^{2n-1}\rho^2(\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}d\rho d\theta dw_{2n} = \rho^{2n+1}(\sin\theta)^{n-1}d\rho d\theta dw_{2n}$$

因此即得式(1.13).

关于球体积,我们分两种情形加以定义.

(1)相应于次Laplace算子,定义球体积[3]

$$|B_{\mathbf{H}^n}(0,R)|_2 = \int_{B_{\mathbf{H}^n}(0,R)}\psi = \int_{B_{\mathbf{H}^n}(0,R)}\frac{|z|^2}{d^2}$$

并用极坐标变换计算知

$$|B_{\mathrm{H}^n}(0,R)|_2=\int_{B_{\mathrm{H}^n}(0,R)}\frac{|z|^2}{d^2}=$$

$$\int_0^R\int_0^\pi\int_{S^{2n-1}}\frac{\rho^2\sin\theta}{\rho^2}\cdot\rho^{Q-1}(\sin\theta)^{n-1}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}w_{2n}=$$

$$w_{2n}\frac{1}{Q}R^Q\int_0^\pi(\sin\theta)^n\mathrm{d}\theta=$$

$$w_{2n}\frac{1}{Q}R^Q\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}=$$

$$\frac{2\pi^{\frac{2n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2n}{2}\right)}\frac{1}{Q}R^Q\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}=$$

$$\frac{2\pi^{n+\frac{1}{2}}R^Q\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}{Q\Gamma(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}$$

(2) 相应于 p-次 Laplace 算子($p\neq 2$),定义球体积[4] 为

$$|B_{\mathrm{H}^n}(0,R)|_p=\int_{B_{\mathrm{H}^n}(0,R)}\frac{|z|^p}{d^p}$$

并计算得

$$|B_{\mathrm{H}^n}(0,R)|_p=\int_{B_{\mathrm{H}^n}(0,R)}\frac{|z|^p}{d^p}=$$

$$\int_0^R\int_0^\pi\int_{S^{2n-1}}\frac{\rho^p(\sin\theta)^{\frac{p}{2}}}{\rho^p}\cdot\rho^{Q-1}(\sin\theta)^{n-1}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}w_{2n}=$$

$$w_{2n}\frac{1}{Q}R^Q\int_0^\pi(\sin\theta)^{n-1+\frac{p}{2}}\mathrm{d}\theta=$$

$$w_{2n}\frac{1}{Q}R^Q\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{p}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+\frac{p}{4}\right)}=$$

$$\frac{2\pi^n}{\Gamma(n)}\frac{1}{Q}R^Q\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{p}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+\frac{p}{4}\right)}=$$

$$\frac{2\pi^{n+\frac{1}{2}}R^Q\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{p}{4}\right)}{Q\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+\frac{p}{4}\right)}$$

1.2 Carnot 群

Hörmander[5] 的有限秩条件为

$$\operatorname{rank}\ \mathrm{Lie}[X_1,\cdots,X_m]\equiv n \tag{1.17}$$

Carnot 群的名称来源于 Carathéodory 在 Carnot 热力学方面的基础性论文[6].

1.2.1 r 步 Carnot 群

设 r 为自然数,一个 r 步 Carnot 群 G 是一个单连通 Lie 群,它的 Lie 代数 g 具有一个 r 步的幂零分层,即满足

$$g=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_r=\oplus_{j=1}^r V_j$$

且

$$[V_1,V_j]=V_{j+1}\qquad(j=1,\cdots,r-1)$$

但

$$[V_1,V_r]=\{0\}$$

给定 g 上的一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$,$\{V_j\}_{j=1}^r$ 关于这一内积互相正交. 设 $m_j=\dim V_j$,$j=1,\cdots,r$,记 $N=\sum\limits_{j=1}^r m_j$ 为 G 的拓扑维数,设 $\{X_{j,1},\cdots,X_{j,m_j}\}$,$j=1,\cdots,r$ 为第 j 层 V_j 的一组固定正交基,V_j 中元素的形式次数为 j. 我们用 g,g',g_0 分别记 G 中的点,而用 Z,Z',Z_0 分别表示 Lie 代数 g 中的元素. 用

$$L_{g_0}(g)=g_0g,\quad R_{g_0}(g)=gg_0 \tag{1.18}$$

分别表示群 G 上由元素 $g_0\in G$ 产生的左平移和右平移. 指数映射 $\exp:g\to G$ 是一个整体解析微分同胚[7]. 令

$$g=\exp(\xi_1(g)+\xi_2(g)+\cdots+\xi_r(g))$$

定义解析映射 $\xi_i:G\to V_i$,$i=1,\cdots,r$. 对 $g\in G$,它的指数坐标在 $V_j(j=1,\cdots,r)$ 上的投影定义为

$$x_{j,s}(g)=\langle\xi_j(g),X_{j,s}\rangle\qquad(s=1,\cdots,m_j) \tag{1.19}$$

为了后文方便,我们给前两层 V_1 和 V_2 中元素以特定的记号. 令 $m=m_1$,$k=m_2$,且记

$$\left.\begin{aligned}X&=\{X_1,\cdots,X_m\}=\{X_{1,1},\cdots,X_{1,m}\}\\Y&=\{Y_1,\cdots,Y_k\}=\{X_{2,1},\cdots,X_{2,k}\}\end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

并以 X 和 Y 表示 G 上相应的左不变向量场,定义为

$$X_j(g)=(L_g)_*(X_j)\qquad(j=1,\cdots,m)$$

$$Y_l(g)=(L_g)_*(Y_l)\qquad(l=1,\cdots,k)$$

其中,$(L_g)_*$ 表示 L_g 的微分. 向量组 X 定义了切丛 TG 的水平次丛 HG 的一组基.

设 $f:G\to\mathbf{R}$,X_j 对 f 的作用定义为

$$X_j f(g) = \lim_{t\to 0} \frac{f(g\exp(tX_j)) - f(g)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g\exp(tX_j)) \mid_{t=0} \tag{1.21}$$

对任何左不变向量场,类似的公式也成立.以

$$\begin{cases} x_j(g) = \langle \xi_1(g), X_j \rangle & (j = 1, \cdots, m) \\ y_s(g) = \langle \xi_2(g), Y_s \rangle & (s = 1, \cdots, k) \end{cases} \tag{1.22}$$

分别表示 g 的指数坐标在 V_1 和 V_2 上的投影.记

$$x(g) = (x_1(g), \cdots, x_m(g))$$

$$y(g) = (y_1(g), \cdots, y_k(g))$$

我们常常把 $g \in G$ 和它的指数坐标

$$g = (x(g), y(g)) \tag{1.23}$$

等同起来,其中"…"表示 $N-(m+k)$ 维向量$(x_{3,1}(g), \cdots, x_{3,m_3}(g), \cdots, x_{r,1}(g), \cdots, x_{r,m_r}(g))$.

特别地,当群 G 是 2 步群时,式(1.23)简化为

$$g = (x(g), y(g), \cdots)$$

G 与 Lie 代数 g 的等同是通过 Baker-Campbell-Hausdorff 公式[7]

$$\exp Z \exp Z' = \exp\left(Z + Z' + \frac{1}{2}[Z, Z'] + \cdots\right) \qquad (Z, Z' \in g) \tag{1.24}$$

来体现的,其中"…"表示包含二阶及更高阶交换子的项的有限线性组合.

对 $Z \in g$,考虑映射 $\theta_Z : g \to g$,

$$\theta_Z(Z') = Z + Z'_0 + \frac{1}{2}[Z, Z'] + \cdots \tag{1.25}$$

其中右端由式(1.24)给出.如果给 Lie 代数 g 赋予多项式群运算法则

$$Z \circ Z' = \theta_Z(Z') \tag{1.26}$$

那么,可以通过指数坐标把群 G 和它的 Lie 代数 g 等同起来.

在 Carnot 群上,$X_j^* = -X_j$[8].与基 X 相联系的次 Laplace 算子是 G 上的二阶偏微分算子

$$L = \sum_{j=1}^{m} X_j^* X_j = -\sum_{j=1}^{m} X_j^2 \tag{1.27}$$

由对 Lie 代数所作的假设,立即可以看到:

$$\text{rank Lie}[X_1, \cdots, X_m] \equiv n$$

因此由 Hörmander[5] 的定理知,算子 L 是亚椭圆的.

每一个 Carnot 群都自然地具有一族各向异性伸缩.Lie 代数 g 上的伸缩 $\Delta_\lambda : g \to g$ 定义为:若 $X = X_1 + \cdots + X_r \in g, X_j \in V_j, j = 1, \cdots, r$,则

$$\Delta_\lambda X = \Delta_\lambda(X_1 + \cdots + X_r) = \lambda X_1 + \cdots + \lambda^r X_r \tag{1.28}$$

用指数映射把式(1.28)提升到群上,即

$$\delta_\lambda(g) = \exp \circ \Delta_\lambda \circ \exp^{-1}(g) \quad (g \in G) \tag{1.29}$$

用 dg 记通过指数映射 exp 提升到 g 上的 Lebesgue 测度而获得的 G 上的双不变 Haar 测度. 于是

$$(d\circ\delta_\lambda)(g)=\lambda^Q dg$$

其中

$$Q=\sum_{j=1}^{r} j\dim(V_j)$$

数 Q 称为 G 的齐次维数,在 Carnot 群分析中扮演着重要的角色. 在非交换情形($r>1$),显然有 $Q>N$. 设 $|\cdot|_g$ 为 g 上任一点到原点的 Euclid 距离,则对 $\xi=\xi_1+\cdots+\xi_r\in g$,$\xi_i\in V_i$,令

$$|\xi|_g=\Big(\sum_{j=1}^{r}|\xi_i|^{\frac{2r!}{i}}\Big)^{\frac{1}{2r!}},\quad |g|_G=|\exp^{-1}g|_g,\quad g\in G$$

G 上与 $|\cdot|_G$ 相联系的拟距离(pseudo distance) 为

$$\rho(g,g')=|g^{-1}g'|_G$$

用记号

$$B_\rho(g,R)=\{g'\in G\mid \rho(g,g')<R\}\tag{1.30}$$

表示以 g 为圆心、R 为半径的规范拟球. 易知,存在 $\alpha=\alpha(G)>0$,使得

$$|B_\rho(g,R)|=\alpha R^Q\qquad (g\in G,\quad R>0)$$

1.2.2 二步 Carnot 群

设 G 是一个二步 Carnot 群,具有 Lie 代数 $g=V_1\oplus V_2$. 设 b_{ij}^l 是由方程

$$[X_i,X_j]=\sum_{i=1}^{k} b_{ij}^l Y_l\tag{1.31}$$

所确定的群常数,其中向量场 $X=\{X_1,\cdots,X_m\}$,$Y=\{Y_1,\cdots,Y_k\}$. 从式(1.21) 立即可以看出,在指数坐标下,$Y_l=\dfrac{\partial}{\partial y_l}$,$l=1,\cdots,k$.

引理 1.1 设 $f:G\to\mathbf{R}$ 可微,那么

$$X_jf(g)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(g)+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k}\Big[\sum_{i=1}^{m} b_{ij}^l x_i(g)\Big]\frac{\partial f}{\partial y_l}(g)$$

证明 为了证明这一引理,我们回忆 $X_jf(g)$ 的定义式(1.21). 设 $g=\exp\xi(g)$,$\xi(g)=\xi_1(g)+\xi_2(g)$,由式(1.24) 得

$$g\exp(tX_j)=\exp\xi(g)\exp(tX_j)=\exp(\xi_1(g)+\xi_2(g))\exp(tX_j)=$$
$$\exp\Big(\xi_1(g)+tX_j+\xi_2(g)+\frac{t}{2}[\xi_1(g),X_j]\Big)$$

从式(1.31) 我们看到

$$[\xi_1(g),X_j]=\Big[\sum_{i=1}^{m}x_i(g)X_i,X_j\Big]=\sum_{l=1}^{k}\Big[\sum_{i=1}^{m}b_{ij}^l x_i(g)\Big]Y_l$$

因此

$$f(g\exp(tX_j))=f(x_1(g),\cdots,x_j(g)+t,\cdots,x_m(g),y_1(g)+\frac{t}{2}\sum_{i=1}^{m}b_{ij}^{1}x_i(g),\cdots,y_k(g)+\frac{t}{2}\sum_{i=1}^{m}b_{ij}^{k}x_i(g))$$

上式关于 t 微分,然后令 $t=0$,即得结论.

对 $Z\in g$,考虑由式(1.25)定义的映射 $\theta_Z:g\to g$. 由式(1.24)可知,θ_Z 是一个 Lie 代数同胚.

命题 1.1 设 $Z'=X'+Y'\in g,X'\in V_1,Y'\in V_2$,那么 $\theta_{Z'}$ 是一个仿射变换,其 Jacobi 矩阵为

$$\mathrm{d}\theta_{Z'}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Id}_{m\times m} & \boldsymbol{0}_{m\times k}\\ \boldsymbol{J}_{k\times m} & \boldsymbol{Id}_{k\times k}\end{bmatrix}\tag{1.32}$$

其中,$\boldsymbol{Id}$ 为一恒等矩阵,$\boldsymbol{J}$ 是一个 $k\times m$ 矩阵:

$$\boldsymbol{J}(l,j)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}b_{ij}^{l}x'_i\qquad(1\leqslant l\leqslant k,\quad 1\leqslant j\leqslant m)$$

证明 令 $Z=X+Y$,那么$[Z',Z]=[X',X]$. 由式(1.31)得

$$\theta_{Z'}(Z)=Z'+Z+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}x'_ix_j[X'_i,X'_j]=$$

$$Z'+Z+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k}(\sum_{i,j=1}^{m}b_{ij}^{l}x'_ix_j)Y_l\tag{1.33}$$

由此即得结论.

1.3 H 型 群

1.3.1 Kaplan 映射

设 G 是一个二步 Carnot 群,具有 Lie 代数 $g=V_1\oplus V_2$. 考虑线性映射 $J:V_2\to\mathrm{End}(V_1)$(其中 $\mathrm{End}(V_1)$ 表示 V_1 的自同态半群):

$$\langle J(\eta)\xi',\xi''\rangle=\langle[\xi',\xi''],\eta\rangle\qquad(\eta\in V_2,\quad \xi',\xi''\in V_1)\tag{1.34}$$

映射 J 的代数性质在二步 Carnot 群的几何和分析性质的研究中有着重要影响. 从 J 的定义,立即可得

$$\langle J(\eta)\xi,\xi\rangle=0\qquad(\eta\in V_2,\quad \xi\in V_1)\tag{1.35}$$

引理 1.2 设 G 是一个二步 Carnot 群,

$$\psi(g)=|x(g)|^2$$

对 $s=1,\cdots,k$,有

$$\langle X\psi,Xy_s\rangle\equiv 0\tag{1.36}$$

令 $l=1,\cdots,k$ 固定,用 $y'(g)$ 表示从 $y(g)$ 中去掉 $y_l(g)$ 后得到的 $k-1$ 维向量,则

$$\langle X\psi, X(|y'|^2)\rangle = 0 \tag{1.37}$$

证明 设 $g=\exp\xi(g)$, $\xi=\xi_1+\xi_2$. 对 $t\in\mathbf{R}$, 由式(1.24) 得

$$\begin{aligned} y_s(g\exp(tX_j)) = y_s(\exp\xi\exp(tX_j)) = \\ y_s(\exp(\xi(g)+tX_j+\frac{t}{2}[\xi_1(g),X_j])) = \\ y_s(g)+\frac{t}{2}\langle[\xi_1(g),X_j],Y_s\rangle = \\ y_s(g)+\frac{t}{2}\langle J(Y_s)\xi_1(g),X_j\rangle \end{aligned} \tag{1.38}$$

从式(1.38) 有

$$(X_jy_s)(g)=\frac{1}{2}\langle J(Y_s)\xi_1(g),X_j\rangle \tag{1.39}$$

同时,从引理 1.1 易得

$$X_j\psi(g)=2x_j(g)=2\langle\xi_1(g),X_j\rangle \tag{1.40}$$

式(1.39) 和式(1.40) 给出

$$\begin{aligned} \langle X\psi, Xy_s\rangle(g) = \sum_{j=1}^{m}X_j\psi(g)(X_jy_s)(g) = \\ 2\sum_{j=1}^{m}\langle\xi_1(g),X_j\rangle\langle J(Y_s)\xi_1(g),X_j\rangle = \\ 2\langle J(Y_s)\xi_1(g),\xi_1(g)\rangle = 0 \end{aligned}$$

在最后一个等式中,用了式(1.35). 这就证明了式(1.36). 从式(1.36),立即得到

$$\langle X\psi, X(|y'|^2)\rangle = 2\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{k}y_s\langle X\psi, X(y_s)\rangle = 0$$

1.3.2 H型群

现在引入 H 型群. 与 Heisenberg 群 H^n 相比,它的几何更加复杂,因为它的中心是任意维数的. 这种群是由 A. Kaplan[9,10,11] 引进的.

定义 1.1 设 G 是一个二步 Carnot 群,如果对任意的 $\eta\in V_2$, $|\eta|=1$, 映射 $J(\eta):V_1\to V_1$ 是正交的,则称 G 是一个 Heisenberg 型群,简称 H 型群.

已知对任何正整数 n,总存在有 n 维中心的 H 型群 G. 当群 G 的中心 V_2 的维数是 1 时,在同构的意义下,H 型群就是 Heisenberg 群 H^n[9]. 我们强调,存在许多 H 型群. 譬如,设 G 是一个秩为 1 的单群,Iwasawa 分解 $G=KAN$ 中的幂零部分 N 就是一个 H 型群,称为 Iwasawa 群[12].

定义 1.1 蕴涵了

$$|J(\eta)\xi|=|\eta||\xi| \qquad (\eta\in V_2,\quad \xi\in V_1) \tag{1.41}$$

$$\langle J(\eta')\xi, J(\eta'')\xi\rangle=\langle\eta',\eta''\rangle|\xi|^2 \qquad (\eta',\eta''\in V_2,\quad \xi\in V_1) \tag{1.42}$$

证明　注意到

$$\langle J(\eta')\xi, J(\eta'')\xi\rangle = \langle J(\sum_{j=1}^{k} y'_j Y_j)\xi, J(\sum_{j,j'=1}^{k} y''_{j'} Y_{j'})\xi\rangle =$$

$$\sum_{j,j'=1}^{k} y'_j y''_{j'} \langle J(Y_j)\xi, J(Y_{j'})\xi\rangle$$

因为

$$\langle J(Y_j)\xi, J(Y_{j'})\xi\rangle = \langle J(Y_j)\sum_{i=1}^{m} x_i X_i, J(Y_{j'})\sum_{i'=1}^{m} x_{i'} X_{i'}\rangle =$$

$$\sum_{i,i'=1}^{m} x_i x_{i'} \langle J(Y_j)X_i, J(Y_{j'})X_{i'}\rangle =$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = |\xi|^2$$

于是

$$\langle J(\eta')\xi, J(\eta'')\xi\rangle = \langle J(\sum_{j=1}^{k} y'_j Y_j)\xi, J(\sum_{j'=1}^{k} y''_{j'} Y_{j'})\xi\rangle =$$

$$\sum_{j,j'=1}^{k} y'_j y''_{j'} |\xi|^2 = \langle \eta', \eta''\rangle |\xi|^2$$

即式(1.42).

在式(1.42)中令 $\eta' = \eta'' = \eta$ 即得式(1.41).

下面的引理建立了 H 型群的一些基本性质.

引理 1.3　设 G 是一个 H 型群,对任何固定的 $l=1,\cdots,k$,有

$$\langle X(y_l)(g), X(|y'|^2)(g)\rangle = 0 \tag{1.43}$$

$$|X(y_l)(g)|^2 = \frac{1}{4}|x(g)|^2 \tag{1.44}$$

$$|X(|y'|^2)(g)|^2 = |x(g)|^2 |y'(g)|^2 \tag{1.45}$$

证明　从式(1.39)知

$$\langle X(y_l)(g), X(|y'|^2)(g)\rangle = 2\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{k} y_s \sum_{j=1}^{m} X_j(y_l)X_j(y_s) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{k} y_s \sum_{j=1}^{m} \langle J(Y_l)(\xi_1)X_j, J(Y_s)(\xi_1)X_j\rangle =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{k} y_s \langle J(Y_l)(\xi_1), J(Y_s)(\xi_1)\rangle \tag{1.46}$$

由式(1.42)得

$$\langle J(Y_l)(\xi_1), J(Y_s)(\xi_1)\rangle = \langle Y_l, Y_s\rangle |\xi_1|^2 = \delta_{ls} |x|^2$$

把上式代入式(1.46)得